Arthur Constantino Scardua

Ondas Gravitacionais Primordiais em Modelos com Ricochete

Brasil

Agosto 2014

Arthur Constantino Scardua

Ondas Gravitacionais Primordiais em Modelos com Ricochete

Dissertação para obtenção de título de Mestre em Física pelo Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas.

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas – CBPF

Instituto de Cosmologia Relatividade e Astrofísica – ICRA

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Nelson Pinto Neto

Brasil

Agosto 2014

Arthur Constantino Scardua
Ondas Gravitacionais Primordiais em Modelos com Ricochete/ Arthur Constantino Scardua. – Brasil, Agosto 2014-
79 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Nelson Pinto Neto

Dissertação (Mestrado) – Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas – CBPF
Instituto de Cosmologia Relatividade e Astrofísica – ICRA
Programa de Pós-Graduação, Agosto 2014.

1. Ricochete. 2. Ondas Gravitationais. I. Nelson Pinto Neto. II. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. III. Instituto de Cosmologia Relatividade e Astrofísica. IV. Ondas Gravitacionais em Modelos de Ricochete

Este trabalho é dedicado a todos que,
mesmo sem saber para onde vão, querem saber de onde vieram.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que de alguma forma nesses últimos dois anos e meio participaram da minha vida, e àqueles que proporcionaram esse período de conhecimento.

Especialmente, agradeço ao Nelson Pinto-Neto pela orientação, paciência e iluminação que me deu durante esses anos; aos meus amigos Cristofher Zuñinga, Robinson Acosta, Lucianno Augusto, Igor Acácio e Clécio Debom, por participarem diretamente da minha dissertação, e sem os quais eu não conseguiria; aos meus familiares, que incluem meus pais, irmãos, tios, primos, avós, namorada e seus familiares, aos quais serei eternamente grato pelo apoio e compreensão; aos professores José Helayël, Álvaro Nogueira, Sebastião Dias, Felipe Tovar, Martin Makler, Evaldo Curado, Roberto Sarthour, José Salim, Nami Svaiter e Paulo Maria pelo conhecimento compartilhado e dúvidas criadas; ao time de rugby Guanabara, pela força e velocidade; aos meus amigos Maurício e Fabrício que me deram tanto apoio; à minha patota do centro de pesquisa, amigos que vieram e nunca serão esquecidos; aos demais que aqui não foram escritos, mas que deveriam.

"A modern physicist is a quantum theorist on Monday, Wednesday, and Friday, and a student of gravitational relativity theory on Tuesday, Thursday, and Saturday. On Sunday the physicist is neither, but is praying to his God that someone, preferably himself, will find the reconsiliation between these two views."
(I am a mathematician (1956), Norbert Wiener)

" Ora (direis) ouvir estrelas! Certo
Perdeste o senso!" E eu vos direi, no entanto,
Que, para ouvi-las, muita vez desperto
E abro a janela, pálido de espanto...[...]"
(Ouvir Estrelas, Olavo Bilac)

Resumo

Nesta dissertação, estudamos as ondas gravitacionais primordiais amplificadas em um Universo sem singularidade quando um fluido perfeito representando matéria dura, isto é, com parâmetro da equação de estado próximo da unidade, domina durante o ricochete. Analisamos, por meio do espectro de sua densidade de energia, se é possível observá-las com detectores de ondas gravitacionais atuais. Para tanto, investigamos sua evolução quando efeitos quânticos geram um ricochete, aplicando ao caso de um Universo preenchido com radiação, poeira e o fluido que representa a matéria dura. Mostramos que com a inclusão da matéria dura haverá amplificação das ondas gravitacionais geradas numa época anterior ao ricochete, podendo ser medidas pelos detectores atuais. Para alcançar esse objetivo, separamos a teoria da Relatividade Geral em espaço e tempo, possibilitando construir a hamiltoniana da teoria, cuja dinâmica quântica é construída pela equação de Wheeler-de Witt e descrita pela interpretação de de Broglie-Bohm da mecânica quântica. Este trabalho estende o caso apresentado no artigo (BESSADA et al., 2012) com o acréscimo da matéria dura, já que naquela situação a amplitude das ondas gravitacionais é imperceptível em qualquer faixa observável de frequência.

Palavras-chaves: ricochete. ondas gravitacionais. cosmologia quântica.

Abstract

In this dissertation, we study the primordial gravitational waves amplified in a universe without singularity when a perfect fluid representing stiff matter, i. e., the state parameter close to unity, dominates during the bouncing. We analyze, through its energy density spectrum, if you can observe them with current gravitational wave detectors. To this end, we investigated its evolution when quantum effects generate a bouncing applying to the case of a universe filled with radiation, dust and the stiff fluid. We show that the inclusion of stiff matter will amplify the gravitational waves generated before the bouncing, which can be measured by current detectors. To achieve this goal, we separate the theory of General Relativity in space and time, what allows to build the Hamiltonian of the theory, whose quantum dynamics is built by the Wheeler-de Witt equation and described by the de Broglie-Bohm interpretation of quantum mechanics. This work extends the case presented in the article (BESSADA et al., 2012) with the addition of stiff matter, since in that situation the amplitude of gravitational waves is too low to be detected in any observable frequency range.

Key-words: bouncing. gravitational waves. quantum cosmology.

Sumário

Introdução **13**

1 COSMOLOGIA CLÁSSICA **17**

Nesse Capítulo, desenvolveremos a teoria hamiltoniana da relatividade geral e a aplicaremos para o caso da propagação de perturbações tensoriais na solução de minisuperespaço homogêneo.

1.1 Formalismo Hamiltoniano **18**

1.1.1 Separando o espaço-tempo 18

1.1.2 A hamiltoniana vinculada 24

1.2 Universo Homogêneo e Isotrópico **26**

1.2.1 Universo preenchido com um fluido perfeito 27

1.2.2 Ondas gravitacionais 31

1.3 Hamiltoniana das ondas gravitacionais **32**

1.3.1 Densidade de energia de ondas gravitacionais 35

2 COSMOLOGIA QUÂNTICA **37**

Nesse Capítulo, desenvolveremos a teoria canônica de quantização baseada na hamiltoniana obtida no capítulo 1 e na teoria da onda piloto.

2.1 Quantização **39**

2.2 Ondas gravitacionais **41**

2.3 A teoria da onda piloto **43**

3 ONDAS GRAVITACIONAIS EM MODELOS DE RICOCHETE . . . **49**

Nesse Capítulo, aplicamos a teoria ao caso de um Universo composto de poeira, radiação e uma matéria quase dura.

3.1 Solução Clássica **50**

3.2 Solução quântica **51**

3.3 Análise do potencial **51**

3.4 Resultados analíticos **54**

Considerações Finais **61**

Referências **63**

APÊNDICES 67

APÊNDICE A – A AÇÃO DE EINSTEIN-HILBERT NO FORMALISMO 3+1 69

APÊNDICE B – HAMILTONIANA PERTURBADA 73

APÊNDICE C – CONDIÇÃO DE NORMALIZAÇÃO NA EXPANÇÃO DE FOURIER DOS OPERADORES DE PERTURBAÇÃO 79

Introdução

Os astros sempre fascinaram a humanidade. Distantes, etéreos e divinos permaneceram os brilhos celestes até a compreensão da gravitação, a atração mútua e nunca repulsiva de objetos massivos. Em 1589 Galileo já fazia experimentos mostrando que a aceleração de materiais que caiam não dependiam de suas massas (DRAKE, 2003), mas foi quase um século depois, em 1686, quando foi publicado *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* da autoria de Newton, que os brilhos do céu seriam descritos pelas mesmas leis que regem os objetos terrenos (NOVELLO NELSON PINTO NETO, 2010). Essa teoria foi testada até dezenas de microtrons (HOYLE et al., 2004), todavia não existem experimentos que detectem uma gravitação a nível molecular, cujas interações eletromagnéticas são importantes e o regime da mecânica quântica se torna importante.

Assim como possivelmente existe um limite de pequenas dimensões à teoria de gravitação newtoniana, há um limite superior. Ela perde a validade em situações onde o potencial gravitacional, gerador da força motora da gravitação de Newton, é superior à interação do Sol com Mercúrio (NOVELLO NELSON PINTO NETO, 2010). Foi no intuito de propor uma lei de gravidade que contemplasse a relatividade especial, que Einstein propôs, em 1916, (EINSTEIN, 1916b; EINSTEIN, 1920) a teoria da Relatividade Geral, que associa a cinemática das trajetórias de partículas sob a ação da gravidade não mais a uma força, mas a geodésicas em um espaço quadridimensional pseudo-Riemanniano curvo. As curvas que as partículas seguem possuem dinâmica, relacionada à evolução da curvatura descrita pela equação de Einstein, que pode ser exposta pela minimização da ação (CARROLL, 2003)

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{2\kappa}\int R\sqrt{-g}d^4x \qquad , \tag{1}$$

cujas variáveis representam o escalar de curvatura R, o determinante da métrica do espaço g e a constante que ajusta o limite newtoniano da teoria $\kappa = \frac{c^4}{8\pi G}$[1]. Como, neste trabalho, procuraremos tratar efeitos quânticos na gravitação, utilizaremos o sistema de unidades naturais (RYDEN, 2002), no qual a velocidade da luz c e a constante de Planck $\hbar$ são unitários, $c = 1$ e $\hbar = 1$. Nessa convenção, a escala de energia é dada em termos $\hbar$ e a de tempo em c. Podemos, então descrever κ em termos das novas unidades, obtendo

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{6\ell_{\mathrm{Pl}}}\int R\sqrt{-g}d^4x \qquad , \tag{2}$$

onde $\ell_{\mathrm{Pl}} \sim 10^{-33}$ cm é o comprimento de Planck, associado a escala de efeitos fundamentalmente quânticos (RAGAZZONI; TURATTO; GAESSLER, 2003).

Diferente da gravitação newtoniana, a Relatividade Geral impede que informações se propaguem com velocidade ilimitada. Os campos da teoria se propagam com a rapidez

[1] As constantes c e G são a velocidade da luz e a constante gravitacional de Newton.

da luz, assim como o eletromagnetismo de Maxwell. Da mesma forma que na outra teoria, a gravitação de Einstein possui radiação, no caso, ondas gravitacionais. Elas são ondas de forças de maré que se propagam no espaço e no tempo, geradas por efeitos gravitacionais da mesma maneira como ondas eletromagnéticas são geradas (TAYLOR; WHEELER, 2000). É esperado que sejamos bombardeados diariamente com uma infinidade dessas ondas, de diferentes fontes e formas, mas sua intensidade é muito pequena para ser observada.

As primeiras soluções de ondas gravitacionais foram feitas por Einstein e Eddington (WEBER, 1960a; EDDINGTON, 1922; EINSTEIN, 1916a; EINSTEIN, 1918) em artigos de 1916 e 1923, as quais revelam-se como perturbações tensoriais da métrica que se propagavam com uma equação de onda no espaço plano. Sua detecção foi proposta somente em 1959 por Weber (WEBER, 1960b), que foi responsável pela evolução dos detectores atuais (LEVINE, 2004). Ele foi o primeiro a enfrentar as dificuldades dos pequenos sinais gerados pelas ondas gravitacionais, menores que as interações elétricas dos constituintes do experimento (GIBBONS; HAWKING, 1971). Em 1974, foi detectado o pulsar binário PSR B1913+16 cujo decréscimo do período de rotação foi associado à geração de ondas gravitacionais (WEISBERG; TAYLOR; FOWLER, 1981). Todavia, elas não foram detectadas diretamente. Alguns anos depois, em 2000, Weber morreu sem ver um sinal que apontasse para a detecção direta de ondas gravitacionais.

As ondas gravitacionais podem ter origem astrofísica, que possuem fontes localizadas como buracos negros, um conjunto binário de estrelas etc; ou cosmológica, que são geradas em todo o Universo em algum tempo. Este trabalho trata do segundo caso, para ondas gravitacionais oriundas de flutuações quânticas em todo o Universo.

Ainda não foram detectadas diretamente ondas gravitacionais, isto é, observações das forças de maré por experimentos controlados pelo homem. Mas, neste ano (2014), foram observados padrões na Radiação Cósmica de Fundo (RFCF) que podem ter origem na ação de ondas gravitacionais sobre a polarização da radiação na época em que ela se desacoplou da matéria (BICEP2 Collaboration et al., 2014). O efeito detectado remonta de ondas gravitacionais primordiais, perturbações que passaram por uma época quando o Universo era muito quente e denso, quando fenômenos quânticos dominavam sobre a dinâmica, fato que possibilitou a investigação de uma gravitação quantizada, que até hoje não foi detectada.

Os medidores diretos de ondas gravitacionais obtêm um sinal relativo à passagem delas que altera o comprimento em direções diferentes. Um exemplo de sinal obtido pode ser a variação de tamanho de duas hastes ortogonais. Um sinal comum é composto pelo sinal feito pelas ondas gravitacionais $s(t)$ mais o ruído gerado por outras fontes não esperadas $r(t)$, $S(t) = s(t) + r(t)$. O sinal gerado pela ondas depende da forma do detector e é relativo à sensibilidade do detector em cada modo e direção das ondas $s(t) = D^{ab}w_a b(t)$, onde D^{ab} é conhecido como o tensor do detector (MAGGIORE, 2000). Para que a detecção

seja de origem cosmológica, o tensor D^{ab} não pode ter dependência angular, ou seja, deve ser isotrópico.

As soluções clássicas de Universo homogêneo e isotrópico possuem uma singularidade no passado, que seria o Big Bang (MUKHANOV, 2005). Essa singularidade pode ser evitada por efeitos quânticos, que impedem que ele se contraia a um ponto degenerado, gerando um ricochete no Universo. Ou seja, ele possuía um período anterior aonde depois se contrairá (NOVELLO; BERGLIAFFA, 2008).

Já é conhecido fato de que um Universo dominado por poeira e radiação não é capaz de gerar ondas gravitacionais detectáveis(BESSADA et al., 2012). Nesse mesmo trabalho, mostrou-se que a amplificação das ondas gravitacionais é maior nas frequências que são mais influenciadas pela radiação, que possui um parâmetro de estado maior do que a poeira. Neste trabalho, investigamos o caso da adição de um fluido com parâmetro de estado maior do que a radiação, quase duro, observando a sua influência sobre o espectro de amplitudes das ondas gravitacionais primordiais.

Para atingir esse objetivo, analisaremos a dinâmica de ondas gravitacionais originadas por flutuações quânticas em uma fase do Universo em que ele era plano homogêneo e isotrópico antes do ricochete. No primeiro capítulo, definiremos uma hamiltoniana da Relatividade Geral através da separação 3+1 da teoria, e a aplicaremos na abordagem da dinâmica clássica de ondas gravitacionais em um Universo homogêneo e isotrópico. No segundo capítulo, abordaremos a dinâmica quântica das pertubações tensoriais com a equação de Wheeler-deWitt, e a interpretação de de Broglie-Bohm. Aplicaremos a teoria desenvolvida no terceiro capítulo para o caso do Universo preenchido com matéria, radiação e uma matéria quase dura, no intuito de observar a influência desta última sobre a amplificação das ondas primordiais. Concluímos, no último capítulo, a respeito dos aspectos abordados.

1 Cosmologia Clássica

Nesse Capítulo, desenvolveremos a teoria hamiltoniana da relatividade geral e a aplicaremos para o caso da propagação de perturbações tensoriais na solução de minisuperespaço homogêneo.

"Caio, logo existo."
(Cosmologia(2010), Mário Novello)

1.1 Formalismo Hamiltoniano

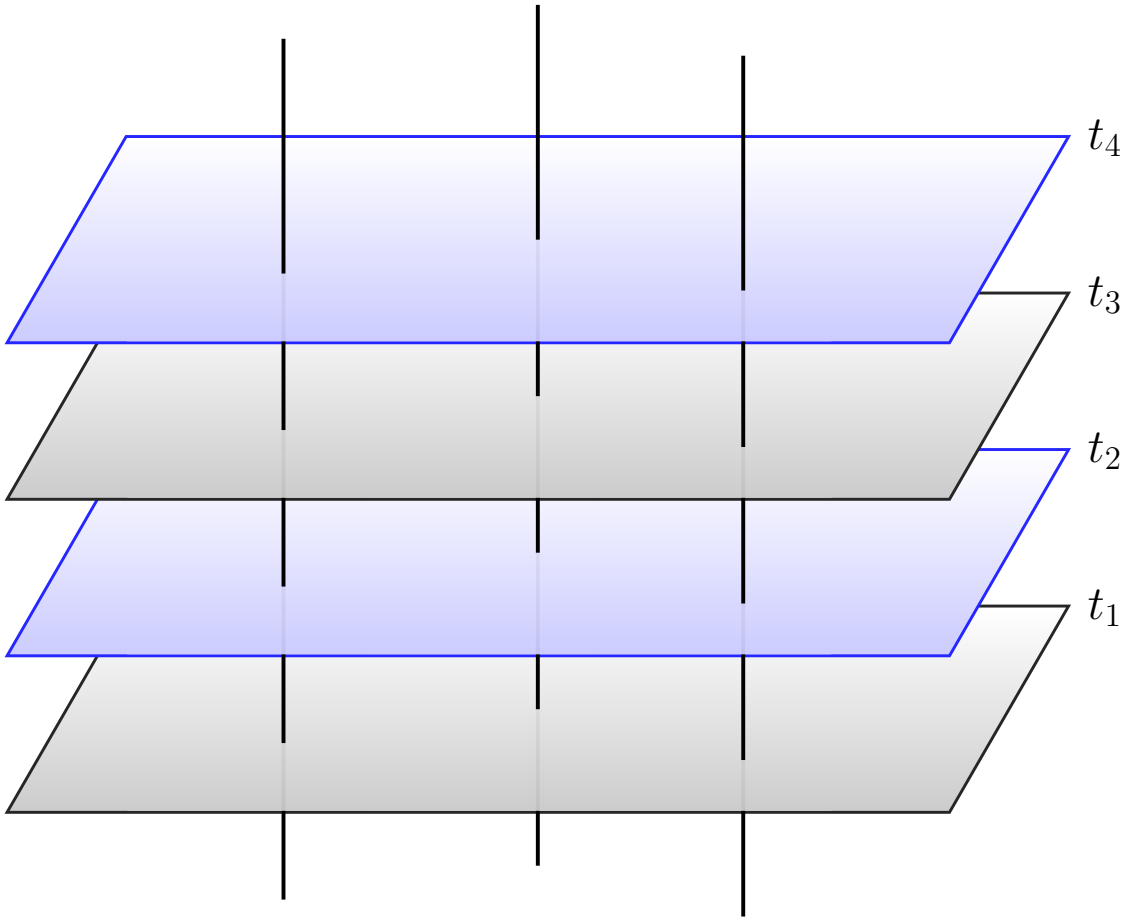


Figura 1 – Quadriespaço seccionado

O formalismo hamiltoniano não é covariante. Nele é necessário separar a variedade em seções espaciais a tempo constante 1, cabendo à hamiltoniana o papel de gerador das translações temporais entre as hipersuperfícies espaciais. Nem todas as variedades da Relatividade Geral podem ser separadas em espaço e tempo dessa forma. A solução de Gödel (GöDEL, 1949) é um exemplo de variedade que não pode ser seccionada por superfícies espaciais globais a tempo constante. Essa peculiaridade surge por haver curvas, tipo tempo, que podem ser fechadas, o que possibilita, por exemplo, a volta no tempo.

Para situações em que não é possível a volta no tempo, sempre podemos separar a teoria em uma parte espacial e temporal relativa a um observador.

1.1.1 Separando o espaço-tempo

Se não é possível voltar no tempo; o agora tem sentido Universal. Nenhum ser pode, nesse cenário, viver o mesmo instante duas vezes. É possível, assim, separar o *espaço-tempo* em superfícies espaciais simultâneas globais de um observador. Cada ponto no quadriespaço

possui somente um valor de tempo $t(x)$, medido pelo observador. As hipersuperfícies simultâneas são o conjunto de pontos tais que possuem o mesmo tempo. O gradiente de t, a um-forma $\mathbf{dt}$, é perpendicular à hipersuperfície no sentido de que $\langle \mathbf{dt}, \mathbf{u} \rangle = \vec{\nabla} t \cdot \mathbf{u} = 0$, para qualquer vetor $\mathbf{u}$ pertencendo ao espaço tangente da hipersuperfície simultânea[1], onde $\vec{\nabla} t$[2] é o dual métrico de $\mathbf{dt}$. Para haver consistência física, $t(x)$ deve ser contínuo e $\vec{\nabla} t$ deve ser um vetor tipo tempo não nulo, de forma que o tempo sempre cresça em direção às folhas espaciais do futuro. Como o tempo t não possui pontos estacionários, é possível montar um quadrivetor perpendicular às folhas espaciais que seja normalizado, $\mathbf{n} = -N\vec{\nabla} t$, onde $N = \frac{1}{\sqrt{-\vec{\nabla} t \cdot \vec{\nabla} t}}$ é o lapso[3].

As folhas de simultaneidade podem ser trabalhadas independentemente do quadri-espaço, com uma métrica própria, a trimétrica

$$\gamma = \mathbf{g} + \mathbf{n} \bigotimes \mathbf{n} \qquad , \tag{1.1}$$

em componentes

$$\gamma_{\alpha}{}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} + n_{\alpha} n_{\beta}$$

que também é o projetor na hipersuperfície[4]. Isto é,

$$\gamma \left[T_{\alpha_1 \cdots \alpha_n}{}^{\beta_1 \cdots \beta_m} \right] = \gamma_{\alpha_1}{}^{\lambda_1} \cdots \gamma_{\alpha_n}{}^{\lambda_n} \gamma_{\sigma_1}{}^{\beta_1} \cdots \gamma_{\sigma_m}{}^{\beta_m} T_{\lambda_1 \cdots \lambda_n}{}^{\sigma_1 \cdots \sigma_m} \tag{1.2}$$

As folhas possuem propriedades geométricas independentes do espaço em que estão mergulhadas como, por exemplo, a curvatura. O tensor de curvatura de Riemann das folhas tridimensionais, a curvatura intrínseca, é definida pelos operadores diferenciais $D = \gamma[\nabla \cdot]$ atuando sobre vetores que são tangentes a ela, por exemplo, a projeção de um vetor quadrimensional sobre a hiperssuperfície, $\gamma^{\mu}{}_{\alpha} v^{\alpha}$. Similarmente à definição do tensor de Riemann, responsável pela ideia de curvatura, o tensor de curvatura tridimensional é definido como

$$D_{[\mu} D_{\nu]} \gamma^{\sigma}{}_{\alpha} v^{\alpha} = R^{\sigma}{}_{\alpha\mu\nu} v^{\alpha} \tag{1.3}$$

A curvatura intrínseca não é suficiente para caracterizar unicamente as folhas dentro do espaço quadridimensional. Duas com trimétricas iguais podem ser imersas no espaço quadridimensional de forma diferente 2. A mudança está em como o vetor normal varia sobre a hipersuperfície, i.e., a derivada direcional do vetor normal dada por uma

[1] O espaço tangente referido são os vetores gerados pelas tangentes de cuvas que pertencem à hipersuperfície.

[2] O dual métrico $\vec{\nabla} t$ é o vetor associado à um-forma $\mathbf{dt}$ com a métrica $\mathbf{g}$. Em notação de índices, $\nabla^{\mu} t = g^{\mu\nu} \nabla_{\nu} t = g^{\mu\nu} (\mathbf{dt})_{\nu}$

[3] A assinatura escolhida para a métrica é +2, o que significa que vetores tipo tempo tem norma negativa, tipo nulo zero e tipo espaço norma positiva (WALD, 1984) .

[4] Se dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ pertencem à folha de simultaniedade, então $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Portanto, γ tem o papel de métrica na folha. Mais ainda, com o projetor é possível separar um vetor $\mathbf{h}$ do quadriespaço em parte paralela, $\gamma(\mathbf{h})$, e perpendicular, $(\mathbf{h} \cdot \mathbf{n})\,\mathbf{n}$, à hipersuperfície de simultaneidade.

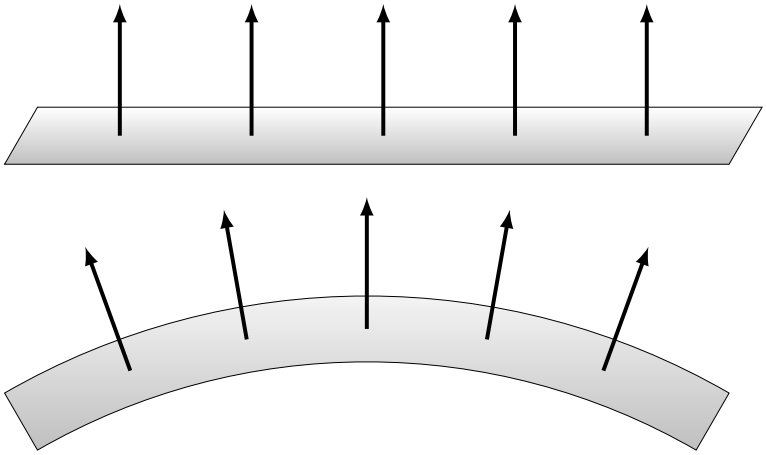


Figura 2 – Duas folhas de papel, que não planas, podem ser organizadas de formas diferentes no espaço tridimensional. Na primeira forma, linhas retas desenhadas na folha seguem uma linha reta no espaço 3D; no segundo caso, não.

curva pertencente à folha espacial. Podemos generalizar esse tensor, chamado de curvatura extrínseca, na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= -\mathbf{u}\cdot\nabla_{\gamma(\mathbf{v})}\mathbf{n} \\ K_{\mu}{}^{\nu} &= -\gamma_{\mu}{}^{\alpha}\nabla_{\alpha}n^{\nu} \qquad , \end{aligned} \tag{1.4}$$

onde $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores do espaço quadridimensional. Esse tensor pertence, por definição, à hipersuperfície espacial. Isso é visto se observarmos que a quantidade $\gamma\left[\nabla\mathbf{T}\right] = D\mathbf{T}$ ($\gamma_{\alpha}{}^{\beta}\gamma_{\theta}{}^{\sigma}\cdots\gamma_{\mu}{}^{\nu}\nabla_{\nu}T^{\alpha\cdots}{}_{\sigma\cdots} = D_{\mu}T^{\beta\cdots}{}_{\theta\cdots}$) é um operador diferencial na folha espacial, de forma que[5]

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= -\mathbf{u}\cdot D_{\mathbf{v}}\mathbf{n} \\ K_{\mu}{}^{\nu} &= -D_{\mu}n^{\nu} \end{aligned} \tag{1.5}$$

De maneira mais geral, o gradiente $\nabla_{\mu}n^{\nu}$ pode ser escrito em uma parte espacial relativa à curvatura extrínseca e uma perpendicular à folha tridimensional

$$\begin{aligned} n^{\mu}\nabla_{\mu}n_{\nu} &= -n^{\mu}\nabla_{\mu}\left(N\nabla_{\nu}t\right) = -\nu^{\mu}N\overbrace{\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}t}^{\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}t} - n^{\mu}\nabla_{\nu}t\nabla_{\mu}N = \\ &= n^{\mu}N\nabla_{\nu}\left(\frac{n_{\mu}}{N}\right) + \frac{n^{\mu}n_{\nu}}{N}\nabla_{\mu}N = -N\nabla_{\nu}\left(\frac{1}{N}\right) + \left(\gamma^{\mu}{}_{\nu} - \delta^{\mu}_{\nu}\right)\nabla_{\mu}\ln N \\ &= \nabla_{\nu}\ln N - \nabla_{\nu}\ln N + \gamma^{\mu}{}_{\nu}\nabla_{\mu}\ln N = D_{\nu}\ln N \end{aligned}$$

[5] É interessante observar que D só é um operador diferencial se aplicado a um objeto pertencente à hipersuperfície espacial. Caso contrário, deve ser tratado como a projeção da derivada covariante quadridimensional. Por exemplo, de (1.5), $\gamma_{\alpha\nu}K_{\mu}{}^{\nu} = \gamma_{\alpha\nu}D_{\mu}n^{\nu} \neq D_{\mu}\gamma_{\alpha\nu}n^{\nu} = 0$, apesar de que, para todo v^{ν} que pertence às folhas espaciais $\gamma_{\alpha\nu}D_{\mu}v^{\theta} = D_{\mu}\gamma_{\alpha\nu}v^{\theta}$.

$$\begin{aligned}\nabla_\mu n^\nu &= \left(\gamma^\alpha{}_\mu - n^\alpha n_\mu\right)\nabla_\alpha n^\nu \\ &= -K_\mu{}^\nu - n_\mu\left(n^\alpha \nabla_\alpha n^\nu\right) \\ &= -K_\mu{}^\nu - n_\mu D^\nu \ln N \qquad (1.6)\end{aligned}$$

$$(1.7)$$

A partir de uma hipersuperfície espacial, podemos montar as demais levando cada ponto $\mathbf{p}$ da superfície inicial a um tempo t até outro $\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{m}\delta t$ referente a um tempo posterior $t + \delta t$ infinitesimalmente maior, propagado na direção normal, levado pelo vetor $\delta t\mathbf{m} = \alpha \mathbf{n}\delta t$

$$\begin{aligned} t(\mathbf{p} + \delta t\mathbf{m}) = t(p) + \langle \mathbf{dt}, \mathbf{m}\rangle \delta t = t(\mathbf{p}) + \delta t \\ \langle \mathbf{dt}, \mathbf{m}\rangle = 1 = \alpha\langle \mathbf{dt}, \mathbf{n}\rangle = \alpha\vec{\nabla}t \cdot \left(-N\vec{\nabla}t\right) = \frac{\alpha}{N} \\ \therefore \mathbf{m} = -N^2\vec{\nabla}t \qquad . \qquad (1.8)\end{aligned}$$

A relação de $\mathbf{dt}$ e $\mathbf{m}$ é parecida com a de dualidade de base (1.13). Todavia, nem sempre o dual relativo à base de $\mathbf{dt}$, $\partial_\mathbf{t}$, possui a mesma direção que o seu dual métrico $\vec{\nabla}t$. Apesar do dual métrico de $\mathbf{dt}$ ser tipo tempo, o dual de base não necessariamente o é. A parte espacial do dual de base é o *shilft*.

$$\partial_\mathbf{t} = \mathbf{m} + \beta \Rightarrow \langle \mathbf{dt}, \beta\rangle = 0 = \vec{\nabla}\mathbf{t} \cdot \beta \propto \mathbf{n} \cdot \beta \qquad (1.9)$$

O dual métrico de uma quantidade (por exemplo, ∇t é dual métrico de $\mathbf{dt}$) nem sempre é igual ao seu dual de base. De fato, um exemplo é o sistema de coordenadas como o da figura 3.

O vetor $\vec{\nabla}\mathbf{t} = -\frac{1}{N^2}\mathbf{m}$ está ligado à direção em que o tempo t cresce, assim como na figura 3 os gradientes apontam para o crescimento das variáveis. Já o vetor $\partial_\mathbf{t}$ é a direção em que todas as demais variáveis são constantes, exceto t, no sentido crescente dele, assim como $\partial_\mathbf{u}$ e $\partial_\mathbf{v}$ são perpendiculares aos eixos de v (v constante) e u (u constante), respectivamente. Calcular a variação de um objeto sobre a curva dada pelo $\partial_\mathbf{t}$ é calcular sua derivada parcial: $\mathcal{L}_{\partial_\mathbf{t}} O = \frac{\partial O}{\partial t} = \dot{O}$. São essas variações sobre curvas dadas por $\partial_\mathbf{t}$ que serão as velocidades que se relacionarão com os momentos na teoria hamiltoniana.

Como visto na equação (1.9), e como proposto acima, curvas geradas por $\partial_\mathbf{t}$ e $\vec{\nabla}_\mathbf{t}$ são diferentes. É interessante relacionarmos a evolução da trimétrica γ com sua velocidade, a taxa de variação da trimétrica sobre uma curva ∂_t, $L_{\partial_\mathbf{t}}\gamma = \dot{\gamma}$. A evolução de γ

$$L_\mathbf{m}\gamma_{\alpha\beta} = m^\mu \nabla_\mu \gamma_{\alpha\beta} + \gamma_{\mu\beta}\nabla_\alpha m^\mu + \gamma_{\alpha\mu}\nabla_\beta m^\mu = -2NK_{\alpha\beta} \qquad (1.10)$$

Então, como apontado por (1.10), a taxa de variação de γ está associada com a função lapso e a curvatura extrínseca. Agora, dada a relação (1.9), podemos relacionar a

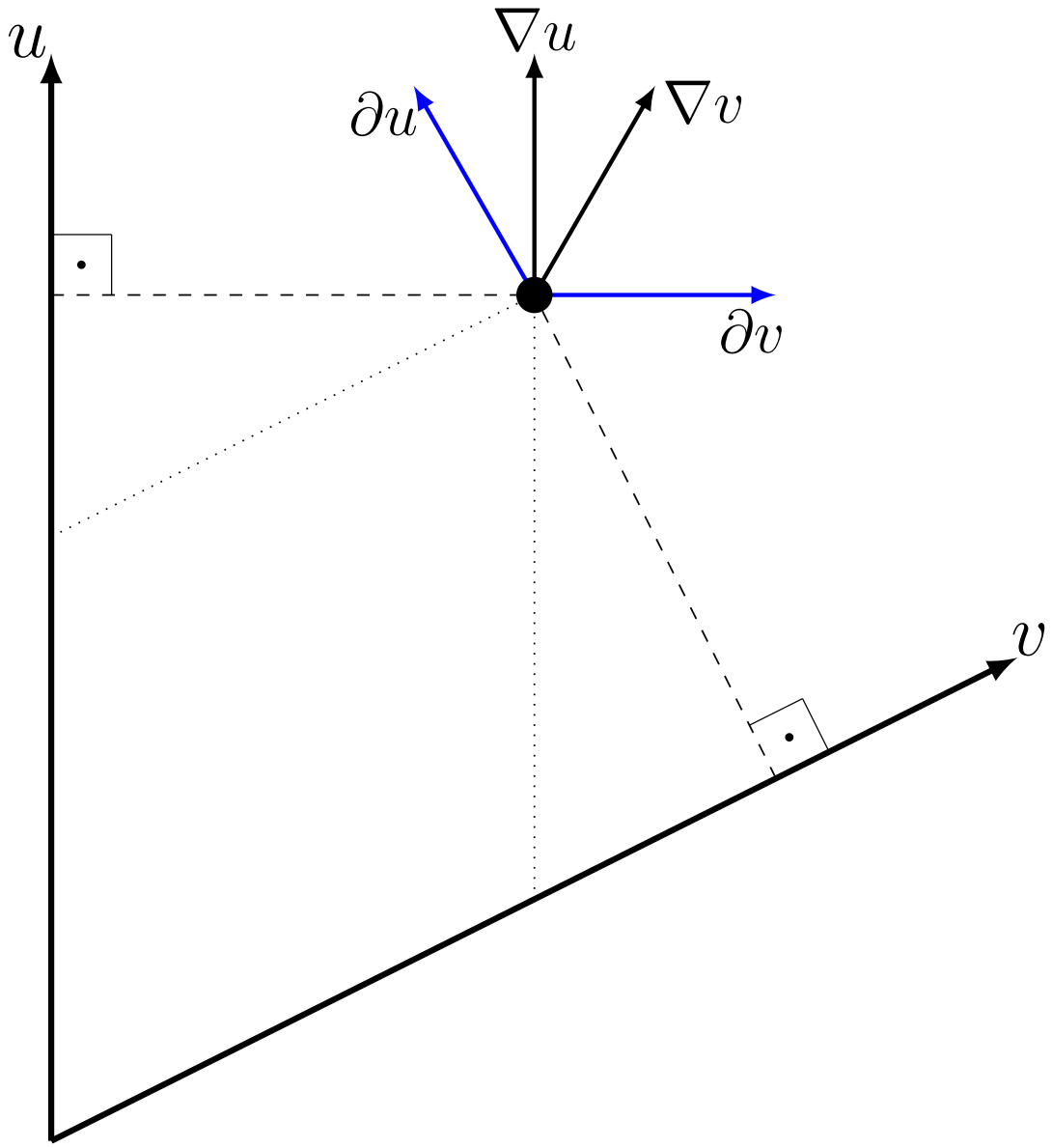


Figura 3 – Diferença entre dual métrico de 1-formas ($\vec{\nabla}$) e seus duais (∂).

curvatura extrínseca com as velocidades. Isso é importante, pois é a curvatura extrínseca que carregará os termos de velocidade na lagrangiana da relatividade geral.

$$L_{\mathbf{m}}\gamma_{\alpha\beta} = L_{\partial\mathbf{t}}\gamma_{\alpha\beta} - L_{\beta}\gamma_{\alpha\beta} = -2NK_{\alpha\beta} = \dot{\gamma}_{\alpha\beta} - D_{(\alpha}\beta_{\beta)} \tag{1.11}$$

$$\therefore K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2N}\left[D_{(\alpha}\beta_{\beta)} - \dot{\gamma}_{\alpha\beta}\right] \tag{1.12}$$

Com as quantidades definidas: β, $\mathbf{m}$, $\partial_{\mathbf{t}}$, $\partial_{\mathbf{i}}$ e N, somos capazes de separar a lagrangiana da relatividade geral em espaço e tempo. Nesse feito, vamos utilizar a base $\{\partial_\mu\}$[6], onde os vetores da base $\{\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{y}}, \partial_{\mathbf{z}}\}$[7] formam uma base para as folhas espaciais. É

[6] Na base $\{\partial_\mu\}$, $\mathbf{m} = (N, 0, 0, 0)$ e $\beta = (0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$.

[7] O vetor ∂_μ é a tangente da curva que passa pelo ponto avaliado e que possui todas as componentes com

possível montar uma base para o espaço cotangente a partir da base usando a relação de dualidade de bases: Se $\{\mathbf{e_j}\}$ são vetores base do espaço tangente e $\left\{\mathbf{b^k}\right\}$ são um-formas que atendem à equação.

$$\langle \mathbf{b^k}, \mathbf{e_j} \rangle = \delta^k_j \qquad , \tag{1.13}$$

então $\left\{\mathbf{b^k}\right\}$ são duais à base $\{\mathbf{e_j}\}$ e formam uma base no espaço tangente. Dessa forma, $\{\mathbf{dt}, \mathbf{dx}, \mathbf{dy}, \mathbf{dz}\}$ é uma base do espaço cotangente dual a $\{\partial_\mathbf{t}, \partial_\mathbf{x}, \partial_\mathbf{y}, \partial_\mathbf{z}\}$. Todas as quantidades agora serão expressas nessa base, em que índices gregos para componentes espaço-temporais e latinos para espaciais.

- Componentes temporais

$$\mathbf{g}(\partial_\mathbf{t}, \partial_\mathbf{t}) = g_{00} = \mathbf{m}^2 + \beta^2 = -N^2 + \beta^i \beta_i \tag{1.14}$$

- Componentes espaço-temporais

$$\mathbf{g}(\partial_\mathbf{t}, \partial_\mathbf{i}) = g_{0i} = g_{i0} = \overbrace{\mathbf{g}(\mathbf{m}, \partial_\mathbf{i})}^{0} + \mathbf{g}(\beta, \partial_\mathbf{i}) = \beta_i \tag{1.15}$$

- Componentes espaciais

$$\mathbf{g}(\partial_\mathbf{i}, \partial_\mathbf{j}) = \gamma_{ij} = \gamma_{ji} = \gamma(\partial_\mathbf{i}, \partial_\mathbf{j}) \tag{1.16}$$

Dessa forma

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -N^2 + \beta^k \beta_k & \beta_j \\ \beta_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix} \qquad , \tag{1.17}$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{\beta_j}{N^2} \\ \frac{\beta_i}{N^2} & \gamma^{ij} - \frac{\beta^i \beta^j}{N^2} \end{pmatrix} \qquad , \tag{1.18}$$

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{\gamma} \qquad , \tag{1.19}$$

onde foram usadas a identidade de Banachiewicz para inverter a matriz e a fórmula de determinante de Schur (ZHANG, 2005).

Definidas agora as quantidades na base $\{\partial_\mu\}$, dividiremos os vetores em suas componentes espaciais representadas com o índice latino, e as espaço-temporais com

exceção da componente μ constantes. Em notação de índices,${\partial_t}^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial t}$. Essa quantidade é o campo vetorial formado pela tangente de curvas geradas por coordenadas espaciais constantes e tempo variável, ou seja, o conjunto delas é determinado por $\Gamma(t_0, x_1, x_2, x_3) : \left\{x \in \mathbb{R}^4 | \forall l \in \mathbb{R}, x = (t_0 + l, x_1, x_2, x_3)\right\}$. Qualquer vetor descrito na base espacial escolhida é perpendicular a $\vec{\nabla} t$: $\mathbf{g}(\vec{\nabla} t, \partial_\mathbf{i}) = \langle \mathbf{dt}, \partial_\mathbf{i} \rangle = \delta^0_i = 0$. Note que $\partial_t \neq \vec{\nabla} t$, e que a base espacial utilizada não é necessariamente ortogonal. A base do espaço tangente $\{\partial_\mu\}$ é dual à base do espaço cotangente $\{\mathbf{dx}^\mu\}$ ($\langle \partial_\mu, \mathbf{dx}^\mu \rangle = \delta^\nu_\mu$), enquanto a base de vetores $\left\{\vec{\nabla} x^\mu\right\}$ é dual métrico de $\{\mathbf{dx}^\mu\}$ ($\vec{\nabla} x^\mu = \mathbf{g}(\mathbf{dx}^\mu, \cdot)$).

índices gregos. Nessa notação, as quantidades pertencentes às folhas de simultaneidade não possuem componentes 0. Por exemplo, o tensor métrico das hipersuperfícies de tempo constante

$$\begin{aligned} \gamma_{0\mu} = \gamma_{\mu 0} &= 0 \\ \gamma_{ij} &= \gamma_{ji} \\ \gamma^{0\mu} = \gamma^{\mu 0} &= 0 \\ \gamma^{ij} &= \left(\gamma^{-1}\right)^{ij} \end{aligned}$$

Agora que conseguimos definir nossas folhas, somos capazes de substituir essas quantidades na ação da relatividade geral entre duas hipersuperfícies simultâneas e, ao remover os termos superficiais da ação, ela tem a forma (Apêndice A)

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{6\ell_{\mathrm{Pl}}} \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Sigma} N \left[R + K_{ij}K^{ij} - K^2\right] \sqrt{\gamma} dV dt \quad , \tag{1.20}$$

onde a integral é feita sobre a folha de tempo constante Σ_t.

A equação (1.20) apresenta a ação em termos das variáveis de configuração N, β e γ, que representam unicamente as variáveis da métrica. Nessa nova forma dada em (1.20), fica nítida a separação entre espaço e tempo, o que torna possível definir uma hamiltoniana em função das velocidades $\dot{N}$, $\dot{\beta}$ e $\dot{\gamma}$ [8]. Todavia, das dez variáveis de configuração por ponto, apenas duas representam graus de liberdade reais, que irão evoluir no tempo independentemente, isto é, haverá apenas dois momentos linearmente independentes. Neste caso, serão os momentos associados a γ. Os momentos relacionados a β e N serão nulos. Portanto, não há inversa no mapa entre os momentos e velocidades dessas quantidadess. Ou seja, o mapa não é bijetor e há necessidade de vínculos.

1.1.2 A hamiltoniana vinculada

Para desenvolvermos o método hamiltoniano, primeiro encontramos os momentos a partir de (1.20). Analisando a lagrangiana, o único termo que possui dependência explícita em derivadas temporais é a curvatura extrínseca (R só depende de derivadas espaciais da métrica das folhas).

Como apontado na equação (1.12), a lagrangiana só possui dependência explícita em γ dentro de K. Isso significa que os momentos associados a β, $\mathbf{P}_\beta$, e N, P_N, não podem ser quaisquer momentos, devem ser nulos. Isso significa que devemos nos ater ao espaço de soluções em que esses momentos são nulos, isto é, onde $\mathbf{P}_\beta = 0$ e $\mathbf{P_N} = 0$. Devemos montar a hamiltoniana usando $\dot{\beta}$ e $\dot{N}$ como novas variáveis, responsáveis pelos vínculos dos momentos nulos, que junto com as quantidades P_N, N, β, $\mathbf{P}_\beta$, $\mathbf{\Pi}$ e γ formarão o espaço

[8] O ponto nas variáveis representa a derivada parcial em relação ao tempo, por exemplo, $\dot{\gamma} = \partial_t \gamma$.

de fase dela. Da dinâmica obtida, retiramos a solução impondo às equações as restrições dos momentos nulos de β e N.

O momento canonicamente conjugado a γ, $\mathbf{\Pi}$, pode ser obtido com a equação (1.20) e (1.12)

$$\Pi^{ij} = \sqrt{\gamma}\left(K^l_l\gamma^{ij} - K^{ij}\right) \quad . \tag{1.21}$$

A densidade de Hamiltoniana gerada pela transformação de Legende não pode ser feita de forma tradicional, pois não existem momentos relacionados a β e N. Para resolver esse problema, fazemos a transformação com $\dot{\beta}$ e $\dot{N}$, P_N, N, β, $\mathbf{P}_\beta$, $\mathbf{\Pi}$ e γ variáveis independentes. Da dinâmica obtida, escolhemos um subconjunto em que $\mathbf{P}_\beta$ e P_N são nulos. Nessa escolha, teremos um mapa bijetor.

$$\begin{aligned} H &= \int_{\Sigma_t}\left[\Pi^{ij}\gamma_{ij} + \dot{N}P_N + \dot{\beta}^i(P_\beta)_i - \mathcal{L}\right]dV \\ &= \int_{\Sigma_t}\left[\frac{\sqrt{\gamma}}{6\ell_{\rm Pl}}\left(N\mathcal{H}_0 + 2\beta^i\mathcal{H}_i\right) + \dot{N}P_N + \dot{\beta}^i(P_\beta)_i\right]dV \quad , \end{aligned} \tag{1.22}$$

onde

$$\mathcal{H}_0 = R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = R + \frac{36\ell^2_{\rm Pl}}{\gamma}\left(\frac{1}{2}\gamma_{op}\gamma_{jk} - \gamma_{oj}\gamma_{pk}\right)\Pi^{op}\Pi^{jk} \tag{1.23a}$$

$$\mathcal{H}_i = D_jK^j_i - D_iK = \frac{6\ell_{\rm Pl}}{\sqrt{\gamma}}D_b\Pi_i{}^b \tag{1.23b}$$

onde $\mathbf{K}$ pode ser posto de forma a depender do momento $\mathbf{\Pi}$

$$K_{mn} = -\frac{6\ell_{\rm Pl}}{\sqrt{\gamma}}\left(\frac{1}{2}\gamma_{ab}\gamma_{mn} - \gamma_{ma}\gamma_{nb}\right)\Pi^{ab} \tag{1.24}$$

Toda a dinâmica vem das equações de Hamilton com a variável H em (1.22), que impõe a restrição de que os momentos de β e N devem ser nulos. A evolução é descrita a partir dos parênteses de Poisson

$$\{N(x',t), H(t)\} = \int_{\Sigma_t}\dot{N}(x,t)\overbrace{\{N(x',t), P_N(x,t)\}}^{\delta(x-x')}dV = \dot{N}(x',t) \tag{1.25a}$$

$$\left\{\beta^i(x',t), H(t)\right\} = \int_{\Sigma_t}\dot{\beta}^i(x,t)\overbrace{\left\{\beta^i(x',t), \left(\mathbf{P}_\beta\right)_i(x,t)\right\}}^{\delta(x-x')}dV = \dot{\beta}^i(x',t) \tag{1.25b}$$

$$\begin{aligned} \{\gamma_{ij}(x',t), H(t)\} &= \frac{1}{6\ell_{\rm Pl}}\int_{\Sigma_t}\left[N(x,t)\left\{\gamma_{ij}(x',t), \mathcal{H}_0(x,t)\right\} - 2\beta^i(x,t)\left\{\gamma_{ij}(x',t), \mathcal{H}_i(x,t)\right\}\right]\sqrt{\gamma}dV = \\ &= \dot{\gamma}(x',t) = -2N(x',t)K_{ij}(x',t) + D_{(i}\beta_{j)} \end{aligned} \tag{1.25c}$$

$$\left\{(\mathbf{P}_\beta)_l(x',t), H(t)\right\} = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H}_i(x,t)\overbrace{\left\{(\mathbf{P}_\beta)_l(x',t), \beta^i(x,t)\right\}}^{-\delta(x-x')}\frac{\sqrt{\gamma}}{6\ell_{\rm Pl}}dV = \left(\dot{\mathbf{P}}_\beta\right)_l(x',t) \equiv 0$$
$$\therefore \mathcal{H}_l(x',t) \equiv 0 \tag{1.25d}$$

$$\{P_N(x',t), H(t)\} = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H}_0(x,t)\overbrace{\{P_N(x',t), N(x,t)\}}^{-\delta(x-x')}\frac{\sqrt{\gamma}}{6\ell_{\rm Pl}}dV = \dot{P}_N(x',t) \equiv 0$$
$$\therefore \mathcal{H}_0(x',t) \equiv 0 \tag{1.25e}$$

$$\left\{\Pi^{ab}(x',t), H(t)\right\} = \frac{1}{6\ell_{\rm Pl}}\int_{\Sigma_t}\left[N(x,t)\left\{\Pi^{ab}(x',t), \mathcal{H}_0(x,t)\right\} - \beta^i(x,t)\left\{\Pi^{ab}(x',t), \mathcal{H}_i(x,t)\right\}\right]\sqrt{\gamma}dV =$$
$$= \dot{\Pi}^{ab}(x',t)$$
$$\therefore \left(L_{\partial_t} - L_\beta\right)K_{ij} = -D_iD_jN + N\left(R_{ij} + K^l{}_lK_{ij} - 2K^l_iK_{lj}\right) \tag{1.25f}$$

As equações (1.25a) e (1.25b) não acrescentam nova informação ao sistema, mas são esperadas pelo formalismo de Hamilton. As equações (1.25d) e (1.25e) são equações relacionadas aos vínculos, e estão ligadas à conservação de momento linear e energia , respectivamente. Já as equações (1.25c) e (1.25f) não são equações independentes e tratam da evolução do sistema.

Na próxima seção, vamos obter as equações de Friedmann a partir do método hamiltoniano. Todavia, não com as equações geradas em (1.25), mas com a exigência da métrica homogênea e isotrópica.

1.2 Universo Homogêneo e Isotrópico

Dados da radiação cósmica de fundo indicam um Universo quase homogêneo e isotrópico, ou seja, igual em todas as direções e em todos os locais para todos os observadores comoveis ao observador cósmico[9] (ULLRICH, 2007). A métrica que esse observador analisa tem a forma

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -N^2(t) & 0 \\ 0 & a(t)\zeta_{ij}(x,y,z) \end{pmatrix} \quad , \tag{1.26}$$

onde ζ_{ij} é uma trimétrica maximalmente simétrica[10] cuja curvatura é

$$R_{mnab} = \frac{C}{a^4}\left(\zeta_{ma}\zeta_{nb} - \zeta_{mb}\zeta_{na}\right) \quad . \tag{1.27}$$

[9] O sistema de coordenadas que observa o Universo de Friedmann homogêneo e isotrópico é um observador cósmico. Um observador que não é comóvel ao observador cósmico não verá um Universo homogêneo e isotrópico. Um efeito de um observador não comóvel pode ser observado no dipolo da radiação cósmica de fundo (Kogut et al., 1993).

[10] Uma métrica de um espaço n-dimensional é dita maximalmente simétrica se possui $\frac{n(n+1)}{2}$ isometrias contínuas. Para o caso tridimensional estudado (n=3), a curvatura de uma métrica maximalmente simétrica tem a forma $R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{R}{6}\left(\zeta_{\mu\alpha}\zeta\nu\beta - \zeta\mu\beta\zeta\nu\alpha\right)$, onde o escalar de Ricci, $R = 6C$, é constante.

As quantidades de (1.20) geradas por essa métrica são

$$N = N \quad , \tag{1.28a}$$
$$\beta = \mathbf{0} \quad , \tag{1.28b}$$
$$\gamma_{ij} = a^2\zeta_{ij} \quad , \tag{1.28c}$$
$$\gamma = a^6\zeta \quad , \tag{1.28d}$$

com essas quantidades, as demais são construídas[11].

$$\Pi^{ij} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\gamma}_{ij}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{a}}\frac{\partial\dot{a}}{\partial\dot{\gamma}_{ij}} = \frac{P_a a\gamma^{ij}}{6} \tag{1.29}$$

Usando a relação (1.24)

$$K_{ij} = -\frac{6\ell_{\mathrm{Pl}}P_a\gamma_{ij}}{12a^2\sqrt{\zeta}} = -6\ell_{\mathrm{Pl}}\frac{P_a\zeta_{ij}}{12\sqrt{\zeta}} \tag{1.30}$$

$$\mathcal{H}_i = 0 \tag{1.31a}$$
$$\mathcal{H}_0 = \frac{6C}{a^4} + (6\ell_{\mathrm{Pl}})^2\frac{P_a^2}{24a^4\zeta} = 0 \tag{1.31b}$$
$$H = \int_{\Sigma_t}\left[6\ell_{\mathrm{Pl}}N\left(6Ca\sqrt{\zeta} + 6\ell_{\mathrm{Pl}}\frac{P_a^2}{24a\sqrt{\zeta}}\right) + \dot{N}P_N\right]dV \tag{1.31c}$$

A equação (1.31b) é um vínculo da dinâmica relacionado à conservação da energia. As equações geradas são para um Universo vazio, autogravitante. A dinâmica se torna interessante quando são adicionadas fontes ao Universo. Isso será discutido na próxima seção.

1.2.1 Universo preenchido com um fluido perfeito

O Universo não é vazio, mas preenchido com objetos formados por átomos, radiação e outras partículas. Esse conteúdo gera a dinâmica do Universo. Esta seção é dedicada a contabilizar essa participação na hamiltoniana (1.31) para o caso em que o conteúdo do Universo é tratado como um fluido perfeito[12,13].

[11] É possível relacionar $\dot{a}$ com $\dot{\gamma}_{ij}$ por meio de sua definição

$$\begin{aligned} a^2\zeta_{ij} &= \gamma_{ij} \\ \Rightarrow \dot{\gamma}_{ij} &= \frac{2\dot{a}}{a}\gamma_{ij} \\ \therefore \frac{\partial\dot{a}}{\partial\dot{\gamma}_{ij}} &= \frac{a\gamma^{ij}}{6} \end{aligned}$$

[12] Um fluido perfeito é um fluido sem condução de calor nem viscosidade (SELIGER; WHITHAM, 1968; SCHUTZ, 1985).

[13] Análises de modelos perturbados aos de Friedmann mostram que o fluido perfeito é uma boa aproximação para dimensões superiores às dimensões de aglomerados de galáxias (WEINBERG, 2008).

Mais à frente, observáveis do fluido serão usados para medir o tempo, que é perdido durante a quantização canônica. A ação de um fluido perfeito é dada pela sua pressão p (SELIGER; WHITHAM, 1968), que está ligada ao campo de quadri-velocidades do fluido, $\mathbf{u}(x,t)$[14], através de seus potenciais velocidade α, β, Φ, S e h descritos por Schutz (SCHUTZ, 1970). Aqui α e β, que são responsáveis pela vorticidade do fluido, serão tomados nulos, pelas simetrias espaciais da métrica de FRLW. O fluido será responsável pela dinâmica de FRLW. Portanto, o observador especial das hipersuperfícies maximalmente simétricas será aquele que está parado em relação ao fluido: $\partial_t^\mu = \frac{u^\mu}{N}$. A relação entre os potenciais e a quadri-velocidade, com excessão dos parâmetros de vorticidade, é

$$u^\mu = \frac{g^{\mu\nu}\left(\Phi_{,\nu} + \theta S_{,\nu}\right)}{h} \quad , \tag{1.32}$$

onde S e h são a entropia e entalpia, respectivamente. As demais quantidades não têm interpretação direta (TAUB, 1954). A quadrivelocidade é normalizada (nem todos os potenciais são independentes), gerando a relação entre os potenciais[15]

$$h = -\frac{\dot{\Phi} + \theta\dot{S}}{N} \tag{1.33}$$

Vamos tratar de fluidos que, como a radiação, possuem equação de estado $p = \lambda\rho$, onde ρ é a densidade de energia do sistema que possui uma contribuição referente à energia de repouso, ρ_0, e à energia interna específica, Π: $\rho = \rho_0(1+\Pi)$. A entalpia, que está presente na quadrivelocidade, é a soma de pressão p com a densidade sobre a densidade específica[16]. Pela primeira lei da termodinâmica

$$\begin{aligned} &\tau dS = d\Pi + \rho d(1/\rho_0) = (1+\Pi)d\left[\ln(1+\Pi) - \lambda\ln(\rho_0)\right] \\ &\Rightarrow \tau = 1+\Pi \quad ; \quad S = \ln\left(\frac{1+\Pi}{\rho_0^\lambda}\right) \\ &\therefore p = \lambda\rho_0^{\lambda+1}\exp(s) \end{aligned} \tag{1.34}$$

Mais ainda

$$dp = \rho_0 dh - \rho_0\tau dS \quad , \tag{1.35}$$

onde obtemos que $\rho_0 = \left[\frac{h\exp(-s)}{1+\lambda}\right]^{\frac{1}{\lambda}}$.

[14] A quadrivelocidade do fluido é um campo vetorial tipo tempo normalizado, $u^\mu u_\mu = -1$, que determina o fluxo do fluido.

[15] A condição de normalização tem a forma

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}u^\mu\nu = -1 = \mathbf{g}(\partial_\mathbf{t}, \mathbf{u}) = \\ = \frac{\partial_t^\mu\Phi_{,\mu} + \partial_t^\mu S_{,\mu}\theta}{h} \\ \therefore h = -\frac{\dot{Phi} + \theta\dot{S}}{N} \end{aligned}$$

[16] $h = \frac{p+\rho}{\rho_0}$

A ação de Friedmann com o fluido perfeito toma a forma

$$\mathcal{A} = \int \left(\mathcal{L}_{\text{vácuo}} + p\sqrt{-g}\right) d^4x \tag{1.36}$$

A equação (1.36), para ser passada para o formalismo hamiltoniano, deve seguir os mesmos passos anteriores, pois o mapa entre os momentos do fluido e as variáveis de configuração não é bijetor (a hessiana tem determinante nulo)[17]. A definição dos momentos nos dá dois vínculos e uma relação entre as velocidades e um momento

$$P_S = \theta P_\Phi \qquad \text{Vínculo} \tag{1.37}$$

$$P_\theta = 0 \qquad \text{Vínculo} \tag{1.38}$$

$$P_\Phi = \rho_0 a^3 \sqrt{\zeta} \tag{1.39}$$

$$\Rightarrow p = \lambda \left(\frac{P_\Phi}{a^3\sqrt{\zeta}}\right)^{\lambda+1} \exp(S) \tag{1.40}$$

A hamiltoniana resultante tem a forma

$$H = \int_{\Sigma_t} \left[\dot{N}P_N + \dot{\theta}P_\theta + \dot{S}\left(P_S - \theta P_\Phi\right) - N\left(\frac{6Ca\sqrt{\zeta}}{6\ell_{\text{Pl}}} + 6\ell_{\text{Pl}}\frac{P_a^2}{24a\sqrt{\zeta}} + \right.\right.$$
$$\left.\left. - \left(\frac{P_\Phi}{a^3\sqrt{\zeta}\kappa}\right)^{\lambda+1} \exp(S) a^3\sqrt{\zeta}\right)\right] dV \quad , \tag{1.41}$$

cujas equações são as equações de Friedmann para um fluido perfeito. As variações de S, θ e Φ e seus respectivos momentos provêm as equações de movimento do fluido, e a variação de a e N geram as equações de movimento da métrica.

- Métrica

$$\{P_N, H\} = \dot{P}_N \equiv 0 = -\frac{6Ca\sqrt{\zeta}}{6\ell_{\text{Pl}}} - 6\ell_{\text{Pl}}\frac{P_a^2}{24\sqrt{\zeta}a} + \rho a^3\sqrt{\zeta} \tag{1.42a}$$

$$\{a, H\} = \dot{a} = 6\ell_{\text{Pl}}\frac{NP_a}{12a\sqrt{\zeta}} \tag{1.42b}$$

$$\{P_a, H\} = \dot{P}_a = -\frac{6C\sqrt{\zeta}N}{6\ell_{\text{Pl}}} + 6\ell_{\text{Pl}}\frac{P_a^2 N}{24a^2\sqrt{\zeta}} - 3pa^2\sqrt{\zeta}N \tag{1.42c}$$

As equações de Friedmann são geradas por essas equações (MUKHANOV, 2005)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \ell_{\text{Pl}}\rho N^2 - \frac{CN^2}{a^2} \tag{1.43a}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\dot{N}}{aN} = -\frac{\ell_{\text{Pl}}N^2(\rho + 3p)}{2} \tag{1.43b}$$

[17] O fato da matriz hessiana, dada por $\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial q_i \partial q_j}$, ter determinante nulo em algum ponto (no caso, teremos sobre todos os pontos) significa que na vizinhança dele não é possível obter uma inversa. Um caso é P_θ que é nulo, e não é possível relacionar um P_θ diferente para cada $\dot{\theta}$, e vice-versa.

- Fluido

$$\{\Phi, H\} = \dot{\Phi} = -hN \tag{1.44a}$$

$$\{P_\Phi, H\} = \dot{P}_\Phi = 0 = \sqrt{\zeta}\frac{\partial}{\partial t}\left[(\rho\exp(S))^{\frac{1}{\lambda+1}}\, a^3\right] \tag{1.44b}$$

$$\{P_\theta, H\} = \dot{P}_\theta \equiv 0 = \dot{S}P_\Phi \tag{1.44c}$$

$$\{P_S, H\} = \dot{P}_S \equiv \dot{\theta}P_\Phi = \frac{P_\Phi N\rho}{\rho_0} \tag{1.44d}$$

As equações de movimento do fluido geram as equações esperadas da dinâmica (SCHUTZ, 1971)

$$\rho \propto \frac{1}{a^{3(1+\lambda)}} \tag{1.45a}$$

$$\dot{S} = 0 \tag{1.45b}$$

$$\dot{\theta} = \tau N \tag{1.45c}$$

Para o fluido quantizado é interessante usar outras variáveis canônicas para que tenhamos bem determinado o tempo. A transformação de variáveis

$$\left\{a, P_a, N, P_N, \dot{N}, S, \dot{S}, P_S, \dot{\theta}, \theta, P_\theta, \Phi, P_\Phi\right\} \to \left\{a, P_a, N, P_N, \dot{N}, \dot{S}, \dot{\theta}, \theta, P_\theta, P_T, T, \Phi_N, P_{\Phi_N}\right\} \quad ,$$

onde

$$P_T = -\left(\frac{P_\Phi}{\sqrt{\zeta}}\right)^{\lambda+1}\exp(S)\sqrt{\zeta} \tag{1.46a}$$

$$T = P_S\exp(-S)\left(\frac{P_\Phi}{\sqrt{\zeta}}\right)^{-(\lambda+1)}\frac{1}{\sqrt{\zeta}} \tag{1.46b}$$

$$\Phi_N = \Phi(\lambda+1)\frac{P_S}{P_\Phi} \tag{1.46c}$$

$$P_{\Phi_N} = P_\Phi \quad , \tag{1.46d}$$

é uma transformação canônica, pois seus parênteses de Poisson só são nulos quando formam unidade com sua respectiva variável conjugada (LEMOS, 2007)[18].

[18] De fato, é uma transformação canônica. Os únicos parênteses que não são explícitamente zero são

$$\{T, \Phi_N\} = (\lambda+1)\frac{T}{P_\Phi} - (\lambda+1)\frac{T}{P_\Phi} = 0$$
$$\{\Phi_N, P_T\} = \{T, P_{\Phi_N}\} = 0$$
$$\{\Phi_N(t,x'), P_T(t,x)\} = \{\Phi_N(t,x'), P_T(t,x)\} = \delta(x-x')$$

A hamiltoniana tem a forma

$$H = \int_{\Sigma_t} \left[N \left(\frac{6a\sqrt{\zeta}}{6\ell_{\mathrm{Pl}}} + 6\ell_{\mathrm{Pl}} \frac{P_a^2}{24a\sqrt{\zeta}} + \frac{P_T}{a^{3\lambda}} \sqrt{\zeta} \right) + \dot{N} P_N + \dot{\theta} P_\theta - \dot{S} \left(T P_T + \theta P_{\Phi_N} \right) \right] dV \quad , \tag{1.47}$$

que é mais simples que (1.41). As equações para as antigas variáveis permanecem, somando-se à dinâmica das novas variáveis.

$$\{T, H\} = \dot{T} = \frac{N}{a^{3\lambda}} \tag{1.48a}$$

$$\{P_T, H\} = \dot{P}_T = 0 \tag{1.48b}$$

$$\{P_{\Phi_N}, H\} = \dot{P}_{\Phi_N} = 0 \tag{1.48c}$$

$$\dot{P}_{\Phi_N} = \dot{\Phi}_N = 0 \tag{1.48d}$$

onde da (1.48a) obtemos a relação entre o tempo próprio e o tempo t[19]

$$dT = \frac{N}{a^{3\lambda}} dt \tag{1.49}$$

Possuímos, então, a hamiltoniana de um fluido perfeito em um Universo igual em todos os pontos e em todas as direções. Na realidade, não observamos um Universo estritamente dessa forma. A existência de galáxias ou nós mesmos são fatos que corroboram com a existência de inomogeneidades no nosso Universo. Em certas escalas, muito maiores que o tamanho de galáxias (WEINBERG, 2008), as inomogeneidades são pequenas o suficiente para permitir o tratamento perturbativo do modelo de Friedmann.

1.2.2 Ondas gravitacionais

O espectro térmico da RCF foi medido em 1965 (WEINBERG, 2008), e apresentou pequenas flutuações de temperatura da ordem de $\frac{\delta T}{T} \sim 10^{-5}$ medidas pelo telescópio COBE em 1992 (SMOOT et al., 1992). Elas são referentes a aglomerações de matéria do Universo primordial que formaram as estruturas cosmológicas atuais como aglomerado de galáxias. Apesar de pequenas as diferenças de temperatura entre pontos na RCF, não é possível descrever todos os objetos existentes no Universo a partir das condições iniciais apresentadas nela, ou seja, não é possível determinar totalmente o passado de todos os objetos existentes somente com a RCF. Todavia, é possível descrever a gravitação com esses resultados iniciais para grandes escalas a partir de pequenas perturbações do modelo cosmológico de Friedmann. Essas últimas são descritas por um termo extra na métrica (1.50),$\delta\mathbf{g}$, referente ao desvio da homogeneidade, e seu domínio de aplicação se limita às pequenas frequências de sua expansão em modos de Fourier (1.58), o limite de grandes escalas.

[19] Em comparação com o tempo conforme, basta que $N = a$.

A perturbação δg é ambígua. Mudanças infinitesimais de coordenadas podem gerar termos adicionais à métrica como o $\delta\mathbf{g}$ (MUKHANOV, 2005). Para contornar esse problema, as perturbações são trabalhadas com quantidades invariantes formadas por termos da decomposição em harmônicos tensoriais de $\delta\mathbf{g}$ (HALLIWELL; HAWKING, 1985). Em segunda ordem de perturbação, válida para baixas frequências, as componentes da decomposição tensorial evoluem independentemente. Esse é o caso da perturbação tensorial, um invariante representado pela parte harmônica tensorial da parte espacial da métrica.

As perturbações tensoriais não são ambíguas. Não é possível, através de uma transformação de coordenadas, gerar um termo harmônico tensorial espacial extra na métrica. Ela não contribui para perturbações do tensor momento energia, e se configura como variações da própria geometria. Para fatores de escala a próximos aos de hoje, as perturbações tensoriais são soluções de uma equação de onda, por isso as perturbações tensoriais também são conhecidas como ondas gravitacionais.

Os detectores que pretendem observar diretamente ondas gravitacionais medirão sua densidade crítica de ondas gravitacionais por logaritmo de frequência, Ω_{OG}, ligada ao seu tensor de energia momento. Como puramente geométricas, só é possível definir um pseudo-tensor momento energia para as ondas gravitacionais. Existem duas formas de defini-lo, que são iguais para fatores de escala próximos ao de hoje[20] (GIOVANNINI, 2010). Neste trabalho, optaremos pelo pseudo-tensor dado pela derivada funcional da lagrangiana pela métrica não perturbada.

Neste capítulo, será desenvolvida a teoria das ondas gravitacionais no contexto da Hamiltoniana do capítulo 1.2. Sua equação de movimento e densidade crítica serão determinados para o caso não quântico.

1.3 Hamiltoniana das ondas gravitacionais

A métrica espacial com as ondas gravitacionais possui um termo extra referente às anisotropias tensoriais

$$\gamma_{ij} = a^2(t)\left[\zeta_{ij}(x,y,z) + w_{ij}(x,y,z)\right] \tag{1.50}$$

A perturbação tensorial é um tensor espacial transverso de traço nulo, segundo ζ_{ij}. Como ela é um tensor no triespaço, a métrica ζ_{ij} será responsável pelas operações de traço

[20] O pseudo tensor momento-energia pode ser dado pela perturbação da componente tempo-tempo do tensor de Einstein ou pela derivada funcional da lagrangiana em relação à métrica não perturbada. Neste trabalho, optaremos pela segunda forma.

e duais métricos deste tensor.

$$w_{ij}\zeta^{ij} = w^{i}_{\ i} = 0 \tag{1.51a}$$

$$w^{i}_{\ j//i} = 0 \qquad , \tag{1.51b}$$

onde $O_{//i}$ é a derivada covariante relativa à métrica ζ_{ij}.

A Hamiltoniana das ondas gravitacionais é obtida perturbando a equação (1.22) e adicionando o momento referente às ondas gravitacionais na equação[21] (1.29)

$$\Pi^{ij} \to \zeta^{ij}\left(\frac{P_a}{6a} - \frac{P_w^{ab}\zeta_{ab}}{3a^2}\right) + \frac{P_w^{ij}}{a^2} \tag{1.52a}$$

$$\gamma \to a^6\zeta\left(1 - \frac{1}{2}w_{ij}w^{ij}\right) \tag{1.52b}$$

$$P_T \to P_T\left(1 + \frac{\omega w_{ij}w^{ij}}{4}\right) \tag{1.52c}$$

Com as quantidades perturbadas, a hamiltoniana toma a forma

$$\begin{aligned} H = \int_{\Sigma_t} N\Bigg\{\left(6C - Cw^{ab}w_{ab} - \frac{w^{ab//c}w_{ab//c}}{4}\right)a\frac{\sqrt{\zeta}}{6\ell_{\rm Pl}} + \\ + \frac{6\ell_{\rm Pl}}{\sqrt{\zeta}}\left[\frac{P_a^2}{24a}\left(1 - \frac{5w_{ab}w^{ab}}{12}\right) - \frac{P_w^{ij}w_{ij}P_a}{3a^2} - \frac{P_w^{ij}P_{(w)ij}}{a^3}\right] + \frac{P_T}{a^{3\omega}}\left(1 + \frac{\omega}{4}w_{ab}w^{ab}\right)\Bigg\}dV + \\ + \int_{\Sigma_t}\left[\dot{N}P_N + \dot{\theta}P_\theta - \dot{S}\left(TP_T\left(1 + \frac{\omega}{4}w_{ab}w^{ab}\right) + \theta P_{\Phi_N}\right)\right]dV \qquad . \end{aligned} \tag{1.53}$$

Até a primeira ordem, todas as equações geradas para o caso não perturbado são iguais. A diferença se encontra no fato de que agora temos uma dinâmica para as perturbações. Com os parênteses do Poisson, obtemos a dinâmica do sistema

$$\begin{aligned} \{w_{ij}(x), H(t)\} = \dot{w}_{ij}(x) = 6\ell_{\rm Pl}\int_{\Sigma_t}\frac{1}{\sqrt{\zeta}}\left[-\frac{w_{ab}P_a}{3a^2} - \frac{2P_{(w)ab}}{a^3}\right]\left\{w_{ij}(x), P_w^{ab}(x')\right\}dV' = \\ = -\frac{6\ell_{\rm Pl}N}{\sqrt{\zeta}}\left[\frac{w_{ij}P_a}{3a^2} + \frac{2P_{(w)ij}}{a^3}\right] \\ \therefore P_w^{kl} = -\frac{\sqrt{\zeta}a^3}{6\ell_{\rm Pl}N}\left(2\mathcal{H}w^{kl} + \frac{\dot{w}^{kl}}{2}\right) \end{aligned} \tag{1.54}$$

Então, em primeira ordem, a evolução das perturbações seguem a equação (apêndice B)

$$\begin{aligned} -\{\dot{w}_{ij}, H\}\frac{\sqrt{\zeta}}{6\ell_{\rm Pl}} = \ddot{w}_{ij} = -\frac{\dot{N}}{N}\frac{\sqrt{\zeta}}{6\ell_{\rm Pl}}\dot{w}_{ij} + \frac{NP_a}{3a^2}\dot{w}_{ij} + \frac{Nw_{ij}}{3}\left\{\frac{P_a}{a^2}, H\right\} - \frac{6N\mathcal{H}P_{ij}}{a^3} + \frac{2N}{a^3}\{P_{ij}, H\} \\ \therefore \ddot{w}_{ij} + 3\mathcal{H}\dot{w}_{ij} - \dot{w}_{ij}\frac{\dot{N}}{N} + 2\frac{N^2C}{a^2}w_{ij} - \left(\frac{N^2}{a^2}w_{ij}\right)^{//c}_{\ \ //c} = 0 \end{aligned} \tag{1.55}$$

[21] Ver apêndice B.

Essa equação pode ser simplificada pela transformação canônica feita em segunda ordem perturbativa[22]

$$\tilde{a} = ae^{-\frac{w_{ab}w^{ab}}{12}} \simeq a\left(1 - \frac{w_{ab}w^{ab}}{12}\right) \tag{1.56a}$$

$$\tilde{P}_a = P_a e^{\frac{w_{ab}w^{ab}}{12}} \simeq P_a\left(1 + \frac{w_{ab}w^{ab}}{12}\right) \tag{1.56b}$$

$$\tilde{w}_{ij} = w_{ij} \tag{1.56c}$$

$$\tilde{P}^{ij}_w = P^{ij}_w + \frac{aP_a w^{ij}}{6} = P^{ij}_w + \frac{\tilde{a}\tilde{P}_a\tilde{w}^{ij}}{6} \tag{1.56d}$$

que gera uma Hamiltoniana mais simples em segunda ordem

$$H = \int_{\Sigma_t} N\left\{\left(6C - \frac{C}{2}w^{ab}w_{ab} - \frac{w^{ab//c}w_{ab//c}}{4}\right)\tilde{a}\frac{\sqrt{\zeta}}{6\ell_{\rm Pl}} + \right.$$
$$\left. + \frac{6\ell_{\rm Pl}}{\sqrt{\zeta}}\left[\frac{\tilde{P}_a^2}{24\tilde{a}} - \frac{\tilde{P}^{ij}_w\tilde{P}_{(w)ij}}{\tilde{a}^3}\right] - \frac{P_T}{\tilde{a}^{3\omega}}\right\}dV +$$
$$+ \text{Dinâmica das demais variáveis.}$$

Essa nova equação gera uma dinâmica para as perturbações mais simples. Daqui por diante, não utilizaremos o til e $N = a(t)$

$$\ddot{w}_{ij} - w_{ij}{}^{//c}{}_{//c} + 2Cw_{ij} + 2\mathcal{H}\dot{w}_{ij} = 0 \tag{1.57}$$

A perturbação w_{ij} possui apenas 2 graus de liberdade[23], que são os modos de polarização das perturbações tensoriais. Para melhor compreender como os modos evoluem, eles são divididos em sua série de Fourier[24].

$$w_{ij} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{\lambda=1}^{2}\int_{\bar{\Sigma}_t}\varepsilon^{(\lambda)}_{ij}w^{(\lambda)}_k(t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}dV_k \tag{1.58}$$

A transformada de Fourier da equação (1.57) leva à evolução dos modos das ondas gravitacionais

$$\ddot{\mu} + \left(k^2 + 2C - \frac{\ddot{a}}{a}\right)\mu = 0 \qquad , \tag{1.59}$$

onde $\mu = w^{(\lambda)}_k a$ representa a amplitude dos modos das perturbações tensoriais.

A equação (1.59) nos dá a evolução dos modos de Fourier que depende das escalas, representadas pelo comprimentos de onda, e em função do tempo. Os detectores de ondas gravitacionais de forma direta[25] pretendem, através de seus dados, determinar a densidade crítica de ondas gravitacionais por logaritmo de frequência $\Omega_{OG}(f)$.

[22] A transformação permanece canônica para a segunda ordem perturbativa (PETER; PINHO; PINTO-NETO, 2005).

[23] O tensor w_{ij} possui 9 índices e 7 equações: 3 devido à simetria $w_{[ij]} = 0$; 1 devido ao traço nulo $w^i_i = 0$; 3 devido à divergência nula $w^{//i}_{ij} = 0$.

[24] A integração da transformada de Fourier é feita sobre $\bar{\Sigma}_t$, espaço de fase relativo ao espaço compacto Σ_t.

[25] É possível detectar ondas gravitacionais de forma indireta, como feito com medidas de polarização da RCF (ADE et al., 2014).

1.3.1 Densidade de energia de ondas gravitacionais

Os detectores de ondas gravitacionais medem o seu espectro, isto é, a intensidade do sinal pela frequência das ondas. A equação (1.59) possui soluções oscilatórias para comprimentos de onda que estão dentro da escala de curvatura[26] e que são medidos por esses detectores. Uma caracterização desse espectro é feita por meio da densidade crítica de ondas gravitacionais por logaritmo de frequência $\Omega_{OG}(f)$[27], que está relacionada com a densidade média de energia das perturbações tensoriais[28] (MAGGIORE, 2000; BESSADA et al., 2012).

$$\begin{aligned}\Omega_{OG}(\eta) = \frac{\rho_{OG}}{\rho_c} = \frac{\langle T^0{}_0 \rangle}{\rho_c} &= -\left\langle \frac{2}{\rho_c\sqrt{-g^{(0)}}}\frac{\partial \mathcal{L}^{(2)}}{\partial g^{(0)}_{00}} g_{00} \right\rangle \\ &= \frac{1}{12\ell^2_{\rm Pl}}\left\langle \frac{1}{a^2} w^{ab'} w_{ab'} - \frac{1}{2} w^{ij,k} w_{ij,k} \right\rangle \end{aligned} \tag{1.60}$$

onde $\rho_c = \left(\frac{\mathcal{H}_0}{\ell_{\rm Pl}}\right)^2$ é a densidade crítica. Novamente, podemos expandir os w_{ab} em suas transformadas de Fourier, obtendo

$$\begin{aligned}\Omega_{OG}(\eta) &= \frac{1}{\rho_c a^2}\sum_\lambda \int d(\ln k)\frac{k^3}{4\pi^2}\left[\left|\mu_k^{(\lambda)'}\right|^2 - 2\mathcal{H} Re\left\{\mu_k^{(\lambda)'}\mu_k^{(\lambda)}\right\} + \left(k^2+\mathcal{H}^2\right)\left(\left|\mu_k^{(\lambda)}\right|^2 + \left|\mu_k^{(\lambda)'}\right|^2\right)\right] \\ &= \int d(\ln k)\Omega_{OG}(k,\eta) \qquad , \end{aligned} \tag{1.61}$$

onde $\Omega_{OG}(k,\eta)$ é o parâmetro densidade de energia por logaritmo de frequência, e $\mu_k^{(\lambda)} = a w_k^{(\lambda)}$. Quando as perturbações estão dentro da escala de curvatura no regime onde $k \gg \mathcal{H}$, a densidade de energia das ondas gravitacionais tem uma forma mais simples

$$\Omega_{OG}(k,\eta) = \frac{k^5\left|\mu_k^{(\lambda)}\right|^2}{4\pi^2\rho_c a^2} \qquad , \tag{1.62}$$

onde, na aproximação perturbativa de dentro da escala de curvatura, $\mu(\eta) \propto e^{-ik\eta}$.

Os detectores gravitacionais procuram medir $\Omega_{OG}(k,\eta)$ para obter um espectro primordial de ondas gravitacionais, assim como se obteve o espectro de ondas eletromagnéticas. A observação dessa quantidade nos dará informação da evolução das perturbações tensoriais, principalmente em uma fase em que elas foram muito importantes: quando o fator de escala $a(\eta)$ foi muito pequeno. No próximo capítulo, abordaremos essa região no cenário de ricochete causado por efeitos quânticos.

[26] O comprimento de onda observado hoje, devido a expansão do Universo, cresce com o fator de escala, $\lambda = \frac{a}{k}$, enquanto a escala de curvatura do Universo para as ondas gravitacionais, $R_H = \sqrt{\frac{a^3}{\ddot{a}}}$, dependente do conteúdo que domina o Universo na era analisada. Quando o comprimento de onda da perturbação está dentro do raio de Hubble, R_H, $k^2 \gg \frac{\ddot{a}}{a}$ e a equação (1.59) admite soluções tipo onda.

[27] O espectro de ondas gravitacionais pode ser caracterizado pela densidade crítica por logaritmo de frequência ($\Omega_{OG}(f)$), pela densidade espectral da média das componentes de Fourier da métrica ($S_h(f)$) e pela sua amplitude característica ($h_c(f)$) (MAGGIORE, 2000) .

[28] No caso quântico, a densidade das ondas gravitacionais estará relacionada com o valor esperado no vácuo do operador relativo ao tensor energia momento, $\rho_{OG} = \langle 0|\hat{T}^0{}_0|0\rangle$ (MAGGIORE, 2000; BESSADA et al., 2012).

2 Cosmologia Quântica

Nesse Capítulo, desenvolveremos a teoria canônica de quantização baseada na hamiltoniana obtida no capítulo 1 e na teoria da onda piloto.

"The sober, practical, matter-of-fact nineteenth century - wich carries over into our day - suspected all speculative and interpretative tendencies as "metaphysical" and limited its programme to the pure description of natural events."
(Variational Principles os Mechanics, (1952), Lanczoz, C.)

A Relatividade Geral e a Mecânica Quântica são teorias que se aplicam a escalas diferentes. Enquanto a teoria de Einstein discursa sobre sistemas que possuem energia e momento suficientes para curvar o espaço-tempo como as estruturas em grande escala – galáxias, aglomerado de galáxias e estruturas maiores –, a teoria quântica trata de fenômenos nanoscópicos, em que a ação do princípio variacional está na ordem da constante de Planck. Até hoje, não existe experimento que demonstre um elo entre as duas teorias. Todavia, existem fenômenos quânticos, e também existem fenômenos gravitacionais. Ambos são observados no mesmo Universo, mas em escalas diferentes. Pela solução apresentada no capítulo anterior, a distância de dois objetos no espaço depende do fator de escala a, que a milhões de anos atrás possuía um valor muito pequeno. Deste modo, pequenas dimensões no passado, como as que pertencem ao reino da fenomenologia quântica, podem ter influenciado comprimentos maiores com o crescimento do fator de escala. Nesse sentido, para se entender a formação das estruturas atuais, precisamos dominar a física quântico-gravitacional.

Quanto menor o fator, mais densa é a energia. A aglomeração de matéria apresentada da RCF, vestígio direto mais antigo que se tem do Universo atualmente, data mais de 13 bilhões de anos (RYDEN, 2002). Espera-se que tenha havido um período em que a densidade era tão grande que efeitos quânticos não poderiam ser desprezados para a evolução do Universo como um todo. Apesar disso, até hoje não existem experimentos conclusivos que observam efeitos quânticos na gravitação. No modelo abordado neste trabalho, o comportamento quântico do Universo domina sobre sua evolução no ricochete quando o fator de escala a atinge seu valor mínimo. Nessas condições, utilizaremos uma teoria que unifica o comportamento gravitacional e o quântico de um sistema.

A quantização da geometria na teoria da Relatividade Geral ainda não é consenso (KRAEMER, 2013). Não é de todo lógico que se as fontes dessa teoria são quantizadas, ela também deva ser. Existem diversas formas de quantizar a teoria da gravitação, cada qual com sua função definida em razão de um objetivo específico. Entre esses métodos de quantizar, temos a quantização por loop (LQG), a teoria de cordas (ST) e quantização dinâmica triangular casual (CDT). Aqui escolheremos um método de quantização que não depende de condições de contorno assintóticas, que servirá para o Universo fechado: a quantização canônica.

O roteiro deste capítulo será trabalhado com a quantização da teoria abordada no capítulo anterior no contexto de seções espaciais fechadas, que será aplicada ao minisuperespaço homogêneo, referente ao modelo cosmológico de Friedmann. Depois, será aplicada a interpretação de De Broglie-Bohm para que seja obtida a trajetória bohmiana dos autovalores da teoria.

2.1 Quantização

Para quantização da Hamiltoniana, é necessário fazer o transporte do espaço de fase da teoria clássica para o espaço de operadores que atuam sobre o espaço Hilbert da mecânica quântica. Para tanto, as variáveis da teoria e seus respectivos momentos canonicamente conjugados devem ser transformados em operadores auto-adjuntos que obedecem à relação de comutação oriunda dos parênteses de Poisson

$$\left\{N, P_N, \beta^i, P_{(\beta)i}, \gamma_{ij}, \Pi^{ij}\right\} \to \left\{\hat{N}, \hat{P}_N, \hat{\beta}^i, \hat{P}_{(\beta)i}, \hat{\gamma}_{ij}, \hat{\Pi}^{ij}\right\}$$

$$\{A, B\} \to \frac{-i}{\hbar}\left[\hat{A}, \hat{B}\right] \qquad ,$$

onde $\hbar$ é a constante de Planck. Para as variáveis de fase e seus momentos, por exemplo,

$$\left[\hat{N}(t), \hat{P}_N(t)\right] = i\hbar \tag{2.1a}$$

$$\left[\hat{\beta}^i(t,x), \hat{P}_{(\beta)j}(t,x')\right] = i\hbar\delta^i_j\delta(x-x') \tag{2.1b}$$

$$\left[\hat{\gamma}_{ab}(t,x), \hat{\Pi}^{ij}(t,x')\right] = \frac{i\hbar}{2}\left(\delta^i_a\delta^j_b + \delta^i_b\delta^j_a\right)\delta(x-x') \tag{2.1c}$$

Esses operadores atuam sobre um espaço de estados, o espaço de Hilbert. Um estado define completamente o sistema, no caso, o Universo. Um determinado estado $|\Psi\rangle$ evolui segundo a equação de Schroedinger da mecânica quântica (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOE, 1991)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = \hat{H}|\Psi\rangle \qquad , \tag{2.2}$$

cuja hamiltoniana $\hat{H}$ é o operador auto-adjunto oriundo da quantização da equação (1.22). Além do mais, o estado tem que obedecer aos vínculos da teoria. No caso da relatividade geral

$$\hat{H}|\Psi\rangle = 0 \tag{2.3a}$$

$$\hat{P}_N|\Psi\rangle = 0 \tag{2.3b}$$

$$\hat{P}_{(\beta)i}|\Psi\rangle = 0 \tag{2.3c}$$

$$\hat{\mathcal{H}}_0|\Psi\rangle = 0 \tag{2.3d}$$

$$\hat{\mathcal{H}}_i|\Psi\rangle = 0 \tag{2.3e}$$

A interpretação dos vínculos fica mais clara na representação dos estados em funcionais de onda $\Psi\left[h_{ij}, t, N, \beta_i\right] = \langle h_{ij}, \beta^k, N|\Psi\rangle$, que são coeficientes do estado Ψ na base de auto vetores de h_{ij}, N, β^k: $|h_{ij}, \beta^k, N\rangle$

$$|\Psi\rangle = \int \langle\Psi|h_{ij}, \beta^k, N\rangle\langle h_{ij}, \beta^k, N|d\gamma_{ij}d\beta^k dN$$

Nessa representação, os operadores são da forma

$$\begin{aligned}
\hat{h}_{ij} &= h_{ij} \\
\hat{\Pi}^{ij} &= -i\hbar\frac{\delta}{\delta h_{ij}} \\
\hat{N} &= N \\
\hat{P}_N &= -i\hbar\frac{\delta}{\delta N} \\
\hat{\beta}^i &= \beta^i \\
\hat{P}_{(\beta)i} &= -i\hbar\frac{\delta}{\delta\beta^i} \\
\hat{H} &= -i\hbar\frac{\delta}{\delta t}
\end{aligned}$$

A primeira equação de vínculo (2.3a) mostra que o funcional de onda não pode depender da parametrização temporal

$$\hat{H}\Psi = -i\hbar\frac{\delta\Psi}{\delta t} = 0 \qquad , \tag{2.4}$$

ou seja, ele não pode depender da forma como seccionamos o espaço-tempo, questão relacionada com a invariância da relatividade geral sobre reparametrização temporal ($t(x) \to t'(x) = t(x) + \delta t(x)$). Os dois vínculos que sucedem, (2.3b) e (2.3c), são relativos à independência da função de onda de N e β^i

$$\hat{P}_N\Psi = -i\hbar\frac{\delta\Psi}{\delta N} = 0 \tag{2.5a}$$

$$\hat{P}_{(\beta)i}\Psi = -i\hbar\frac{\delta\Psi}{\delta\beta^i} = 0 \qquad , \tag{2.5b}$$

sobrando a Ψ a dependência somente na trimétrica limitada pelos vínculos (2.3d) e (2.3e)

$$R[\gamma_{ij}]\Psi - \frac{36\ell_{\mathrm{Pl}}^2}{\gamma}\left(\frac{1}{2}\gamma_{op}\gamma_{jk} - \gamma_{oj}\gamma_{pk}\right)\frac{\delta^2\Psi}{\delta h_{op}\delta h_{jk}} = 0 \tag{2.6a}$$

$$\hat{D}_b\hat{\Pi}_i^{\ b}\Psi = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\delta\Psi}{\delta h_{ij}}\right) + \Gamma^i_{jk}\frac{\delta\Psi}{\partial h_{jk}} = 0 \tag{2.6b}$$

Ambas as equações, (2.6a) e (2.6b), apresentam problemas de ordenamento nos termos $\frac{36\ell_{\mathrm{Pl}}^2}{\hat{\gamma}}\left(\frac{1}{2}\hat{\gamma}_{op}\hat{\gamma}_{jk} - \hat{\gamma}_{oj}\hat{\gamma}_{pk}\right)\hat{\Pi}^{op}\hat{\Pi}^{jk}$ e $\hat{\Gamma}^i_{jk}\hat{\Pi}^{jk}$, respectivamente. Até hoje, não existe um ordenamento conclusivo para as equações (2.6). Todavia, como a relatividade geral é invariante sobre reparametrização espacial, o ordenamento de (2.6b) é plausível. A equação (2.6a) é conhecida como *equação de Wheeler-DeWitt* e governa a evolução do sistema a nível quântico, mesmo sem possuir dependência explícita com o tempo.

Na próxima seção, será retomada a noção de tempo quando existe uma quantidade que interage gravitacionalmente e possui, adicionado à hamiltoniana gravitacional, um termo linear de momento. No caso apresentado, o parâmetro T do fluido perfeito, quantizado de (1.46b), tomará esse papel.

2.2 Ondas gravitacionais

Pra quantizar um sistema quântico, é necessário fazer o transporte das variáveis de fase para operadores que agem em um espaço de Hilbert, o qual contém todos os estados possíveis do Universo quântico. Esses operadores devem atender uma álgebra de comutação segundo os parênteses de Poisson clássicos e que sattisfazem os vínculos. Com isso, os mesmos resultados do capítulo anterior são obtidos, inclusive para transformações canônicas(ANDERSON, 1994).Todos os ordenamentos da hamiltoniana são equivalentes (PETER; PINHO; PINTO-NETO, 2005). Todavia, para cada situação, é necessário ajustar o produto escalar, de forma que a hamiltoniana seja auto-adjunta, ou seja, ela deve ser tal que, para o produto escalar entre dois estados ψ e ϕ

$$(\phi, \hat{H}\psi) = (\hat{H}\phi, \psi) \tag{2.7}$$

Para facilitar, será utilizado o ordenamento da hamiltoniana[1] (1.53)

$$\begin{aligned}\hat{H} = \int_{\Sigma_t} \hat{N} \Bigg\{ & \left(6C - C\hat{w}^{ab}\hat{w}_{ab} - \frac{\hat{w}^{ab//c}\hat{w}_{ab//c}}{4}\right)\hat{a}\frac{\sqrt{\hat{\zeta}}}{6\ell_{\mathrm{Pl}}} + \\ & + \frac{6\ell_{\mathrm{Pl}}}{\sqrt{\hat{\zeta}}}\left[\frac{1}{24\hat{a}^{\frac{3\omega+1}{2}}}\hat{P}_a\hat{a}^{\frac{3\omega-1}{2}}\hat{P}_a\left(1 - \frac{5\hat{w}_{ab}\hat{w}^{ab}}{12}\right) - \frac{1}{\hat{a}^2}\hat{P}_a\frac{\left(\hat{P}_w^{ij}\hat{w}_{ij} + \hat{w}_{ij}\hat{P}_w^{ij}\right)}{3} + \right. \\ & \left. - \frac{\hat{P}_w^{ij}\hat{P}_{(w)ij}}{\hat{a}^3}\right] + \frac{\hat{P}_T}{\hat{a}^{3\omega}}\left(1 + \frac{w}{4}\hat{w}^{ab}\hat{w}_{ab}\right)\Bigg\} dV\end{aligned} \tag{2.8}$$

em que está explícita somente a parte da dinâmica responsável pelo fator de escala, perturbações cosmológicas e o parâmetro T do fluido.

A equação (2.8) pode ser simplificada, como foi a (1.53), pela transformação canônica (1.56), ao aplicar a mesma transformação para o regime quântico (PETER; PINHO; PINTO-NETO, 2005), tomando o cuidado de deixar os operadores resultantes auto-adjuntos[2]

$$\hat{\bar{a}} = \hat{a}e^{-\frac{\hat{w}_{ab}\hat{w}^{ab}}{12}} \simeq a\left(1 - \frac{\hat{w}_{ab}\hat{w}^{ab}}{12}\right) \tag{2.9a}$$

$$\hat{\bar{P}}_a = \hat{P}_a e^{\frac{\hat{w}_{ab}\hat{w}^{ab}}{12}} \simeq \hat{P}_a\left(1 + \frac{\hat{w}_{ab}\hat{w}^{ab}}{12}\right) \tag{2.9b}$$

$$\hat{\bar{w}}_{ij} = \hat{w}_{ij} \tag{2.9c}$$

$$\hat{\bar{P}}_w^{ij} = \hat{P}_w^{ij} + \frac{\left(\hat{a}\hat{P}_a + \hat{P}_a\hat{a}\right)\hat{w}^{ij}}{12} = \hat{P}_w^{ij} + \frac{\left(\hat{\bar{a}}\hat{\bar{P}}_a + \hat{\bar{P}}_a\hat{\bar{a}}\right)\hat{\bar{w}}^{ij}}{12} \tag{2.9d}$$

[1] A transformação canônica quântica do fluido, não apresentada explicitamente nesse trabalho, provém de uma transformação ponto nas coordenadas S e depois de uma inversão momento-coordenada (ANDERSON, 1994).

[2] Queremos que os operadores continuem observáveis (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOE, 1991)

gerando a hamiltoniana e desconsiderando as barras sobre as variáveis transformadas,

$$\hat{H} = \int_{\Sigma_t} \hat{N} \left\{ \left(6C - \frac{C}{2}\hat{w}^{ab}\hat{w}_{ab} - \frac{\hat{w}^{ab//c}\hat{w}_{ab//c}}{4} \right) \hat{a}\frac{\sqrt{\zeta}}{6\ell_{\mathrm{Pl}}} + \right. \\ \left. + \frac{6\ell_{\mathrm{Pl}}}{\sqrt{\zeta}} \left[\frac{1}{24\hat{a}^{\frac{3\omega+1}{2}}} \hat{P}_a \hat{a}^{\frac{3\omega-1}{2}} \hat{P}_a - \frac{\hat{P}_w^{ij}\hat{P}_{(w)ij}}{\hat{a}^3} \right] - \frac{\hat{P}_T}{\hat{a}^{3\omega}} \right\} dV \quad (2.10)$$

Aplicando (2.10) a um estado, na notação de funcional de onda

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial T} = \left(a^{3\omega+1}\frac{C\sqrt{\zeta}}{12\ell_{\mathrm{Pl}}} w^{ab}w_{ab} + a^{3\omega+1}\frac{\sqrt{\zeta}}{24\ell_{\mathrm{Pl}}} w^{ab//c}w_{ab//c} - \frac{6\ell_{\mathrm{Pl}}}{\sqrt{\zeta}a^{3(1-\omega)}}\frac{\delta^2}{\delta w^{ij}\delta w_{ij}} \right)\Psi + \\ + \left[-a^{3\omega+1}\frac{C\sqrt{\zeta}}{\ell_{\mathrm{Pl}}} + \frac{\ell_{\mathrm{Pl}}}{\sqrt{\zeta}4}\frac{\partial^2}{\partial\chi^2} \right]\Psi \equiv H_T\Psi \quad , \quad (2.11)$$

onde $\chi = \frac{2}{3(1-\omega)} a^{\frac{3(1-\omega)}{2}}$.

A noção temporal perdida pelo vínculo (2.3a) é recuperada pelo parâmetro T do fluido que gera a hamiltoniana H_T. A nova hamiltoniana H_T é definida sobre o espaço de Hilbert dotado pelo produto escalar

$$(\psi, \phi) = \int_0^\infty \int_{\Omega_w} \psi^* \phi d\chi dw = \int_0^\infty \int_{\Omega_w} a^{\frac{1-3\omega}{2}} \psi^* \phi da dw \quad , \quad (2.12)$$

onde o domínio $(0, \infty)$ de χ implicará em uma condição de contorno necessária a ser atendida pelos Ψ, de forma que H_T seja auto-adjunto. Isso define uma densidade de probabilidade em uma equação de continuidade, que será explicada na próxima seção.

A função de onda solução de (2.11) pode ser separada em duas partes $\Psi = \varphi\psi$: uma referente ao fundo, $\varphi(\chi, T)$, e outra referente às perturbações $\psi[\chi, T, w_{ij}]$. Aplicando essa separação a (2.11)

$$0 = \varphi\left(a^{3\omega+1}\frac{C\sqrt{\zeta}}{12\ell_{\mathrm{Pl}}} w^{ab}w_{ab} + a^{3\omega+1}\frac{\sqrt{\zeta}}{24\ell_{\mathrm{Pl}}} w^{ab//c}w_{ab//c} - \frac{6\ell_{\mathrm{Pl}}}{\sqrt{\zeta}a^{3(1-\omega)}}\frac{\delta^2}{\delta w^{ij}\delta w_{ij}} - i\frac{\partial}{\partial T} \right)\psi + \\ + \psi\left[-a^{3\omega+1}\frac{C\sqrt{\zeta}}{\ell_{\mathrm{Pl}}} + \frac{\ell_{\mathrm{Pl}}}{\sqrt{\zeta}4}\frac{\partial^2}{\partial\chi^2} - i\frac{\partial}{\partial T} \right]\varphi + \frac{\ell_{\mathrm{Pl}}}{4\sqrt{\zeta}}\left(2\frac{\partial\varphi}{\partial\chi}\frac{\partial\psi}{\partial\chi} + \varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial\chi^2} \right) \quad , \quad (2.13)$$

onde, para conseguir a separação entre fundo e perturbação, basta que $\psi[\chi, T, w_{ij}] = \psi_1[T, w_{ij}] + \psi[T, w_{ij}] \int \frac{d\xi}{\varphi^2(\xi)}$. Assim, o último termo em destaque de (2.13) se anula, e cada parte da função de onda total deve atender

$$i\frac{\partial\psi}{\partial T} = \left(a^{3\omega+1}\frac{C\sqrt{\zeta}}{12\ell_{\mathrm{Pl}}} w^{ab}w_{ab} + a^{3\omega+1}\frac{\sqrt{\zeta}}{24\ell_{\mathrm{Pl}}} w^{ab//c}w_{ab//c} - \frac{6\ell_{\mathrm{Pl}}}{\sqrt{\zeta}a^{3(1-\omega)}}\frac{\delta^2}{\delta w^{ij}\delta w_{ij}} \right)\psi \quad (2.14a)$$

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial T} = \frac{\ell_{\mathrm{Pl}}}{\sqrt{\zeta}4}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\chi^2} - a^{3\omega+1}\frac{C\sqrt{\zeta}}{\ell_{\mathrm{Pl}}}\varphi \quad (2.14b)$$

Para o caso sem curvatura espacial $C = 0$[3], a exigência da hamiltoniana H_T ser auto-adjunta implica que, se duas funções de onda $\phi(\xi, T)$ e $\sigma(\xi, T)$ pertencem ao conjunto de

[3] Até o final da dissertação, a curvatura espacial será nula, portanto, $\zeta = 1$.

soluções de (2.14b), elas devem ser tais que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \phi^* \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \chi^2} d\bar{\chi} &= \int_0^\infty \sigma \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial \chi^2} d\bar{\chi} \\ \Rightarrow \left(\phi^* \frac{\partial \sigma}{\partial \chi} - \frac{\partial \phi^*}{\partial \chi} \sigma \right) \Big|_{\chi=\infty} &= \left(\phi^* \frac{\partial \sigma}{\partial \chi} - \frac{\partial \phi^*}{\partial \chi} \sigma \right) \Big|_{\chi=0} \\ \therefore \frac{\partial \phi}{\partial \chi} = \alpha \phi \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial \chi} &= \alpha \sigma \qquad , \end{aligned} \tag{2.15}$$

onde α é um parâmetro que definirá as condições de contorno do sistema, aos quais delimitarão o espaço de soluções de (2.14b) (LEMOS, 1996).

Será estudada, de agora em diante, a solução da forma de um pacote de onda gaussiano concentrado em $\chi = 0$

$$\varphi_0 = \left(\frac{8}{T_0 \pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{-\chi^2}{T_0}} \qquad , \tag{2.16}$$

que servirá de condição inicial para (2.14b). O fator T_0 define a largura da gaussiana. Mais à frente, será mostrado que T_0 é o tempo característico do ricochete. Com a condição inicial apontada em (2.16) para a equação (2.14b) em função do fator de escala a é

$$\begin{aligned} \varphi(a,T) = \left[\frac{8T_b}{\pi \left(T^2 + T_b^2\right)} \right]^{1/4} \exp \left[\frac{-4T_b a^{3(1-\omega)}}{9 \left(T^2 + T_b^2\right) (1-\omega)^2} \right] \times \\ \times \exp \left\{ -i \left[\frac{4T a^{3(1-\omega)}}{9 \left(T^2 + T_b^2\right) (1-\omega)^2} + \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{T_b}{T} \right) - \frac{\pi}{4} \right] \right\} \qquad , \end{aligned} \tag{2.17}$$

A mecânica quântica usual, regida pela interpretação de Copenhagen, não dá suporte ao Universo na escala quântica porque supõe um observador clássico externo ao sistema quântico, ou seja, maior que o Universo, e um regime frequentista para as realizações do Universo. Uma das soluções desses problemas é a interpretação de De Broglie-Bohm das ondas piloto, que entende que existem trajetórias reais nas quais as variáveis de configuração percorrem. Nesse sentido, na próxima seção descreveremos a teoria e obteremos a trajetória bohmiana do fator de escala, a qual representará o fator de escala dependente do tempo a nível quântico.

2.3 A teoria da onda piloto

A teoria da onda piloto propõe que existe uma trajetória quântica do sistema no espaço de configuração com realidade objetiva, descrita por $\vec{x}$, que não depende da observação. Ela é relacionada à corrente conservada $\vec{j}$ e densidade de probabilidade ρ do sistema descrito pela função de onda Ψ quântica pela equação

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\vec{j}}{\rho} \qquad , \tag{2.18}$$

similar à uma definição de momento linear na mecânica newtoniana. Esta interpretação exige mais condições iniciais que a de Copenhagen: a posição inicial $\vec{x}(t_0)$, da qual não temos acesso. Isso faz da interpretação de de Broglie-Bohm uma teoria de variáveis escondidas (PINTO-NETO, 2010). Uma função de onda que satisfaz à equação de Schroedinger e os seus vínculos pode ser separada de forma geral por $\Psi = Ae^{i\frac{S}{\hbar}}$, onde A e S são funções reais dos graus de liberdade dos sistema. Para uma hamiltoniana clássica $\hat{H}_c = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{V}$,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla_x^2 A}{A} = 0 = \frac{\partial S}{\partial t} + \tilde{H}\left(\nabla S, x\right) + Q\left(\nabla A, A\right) \tag{2.19a}$$

$$\vec{j} = \frac{A^2 \nabla S}{m} \tag{2.19b}$$

$$\rho = A^2 \tag{2.19c}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t^2} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \tag{2.19d}$$

onde a equação (2.19a) pode ser interpretada como uma transformação de Hamilton-Jacobi com o gerador S e hamiltoniana $\tilde{H} + Q$. De fato, quando $\tilde{H}$ é muito maior que Q, é retomada uma equação para o espaço de fase clássico com o gerador S, sendo Q o papel da interface clássico-quântico, o potencial quântico. Nesse sentido, ∇S seria o momento canonicamente conjugado à posição da partícula.

$$P = \nabla S \tag{2.20}$$

Todas as partículas seguiriam trajetórias definidas pelas curvas integrais de seus momentos e a forma probabilística seria dada pelo desconhecimento das suas posições iniciais, variáveis ocultas da teoria. Como não sabemos onde estão inicialmente, temos que impor uma condição de provável localização no tempo inicial, dada por $P_0 = A^2(t_0)$. Como apresentada na equação (2.19d), que é uma equação de continuidade, a densidade de probabilidade de partículas se conserva no tempo. Mesmo se as condições iniciais das partículas não coincidirem com a densidade de probabilidade $|\Psi|^2$, elas vão ser iguais a um tempo finito (VALENTINI, 1991b; VALENTINI, 1991a). Dessa forma, as quantidades do espaço de fase possuem uma trajetória real, chamada trajetória Bohmiana, que depende das condições iniciais. Com isso, não há a necessidade de um observador clássico externo, nem de várias realizações do Universo para tratar de mecânica quântica no período de pequeno fator de escala.

A equação de continuidade tipo (2.19d) para o caso da hamiltoniana do fundo clássico definida em (2.15) tem a forma

$$\partial_t \rho_\chi + \partial_\chi j_\chi = 0 \qquad , \tag{2.21}$$

onde ρ_χ e j_χ são a densidade de probabilidade e a corrente de probabilidade, respectivamente, para a variável ξ, definidas por

$$\rho_\chi = |\varphi|^2 \qquad\qquad j_\chi = \frac{\ell_{\mathrm{Pl}}\rho_\chi}{2}\partial_\chi S \qquad . \tag{2.22}$$

Para o caso do fator de escala a

$$\partial_t|\varphi|^2 + \frac{\ell_{\rm Pl}}{2}a^{\frac{3\omega-1}{2}}\partial_a\left(a^{\frac{3\omega-1}{2}}|\varphi|^2\partial_a S\right) = 0$$
$$\partial_t\left(a^{\frac{1-3\omega}{2}}|\varphi|^2\right) + \partial_a\left[\left(a^{\frac{1-3\omega}{2}}|\varphi|^2\right)a^{3\omega-1}\partial_a S\right] = 0$$

onde a densidade e a corrente de probabilidade para o fator de escala são

$$\rho_a = a^{\frac{1-3\omega}{2}}|\varphi|^2 \tag{2.23a}$$
$$j_a = \rho_a a^{3\omega-1}\partial_a S \tag{2.23b}$$

A equação que define a trajetória bohmiana do fator de escala, segundo (2.18), deve ser

$$\frac{da}{dT} = a^{3\omega-1}\partial_a S \tag{2.24}$$

Usando a interpretação ontológica da função (2.17), onde $\varphi = Ae^{iS}$, é possível obter a trajetória do fator de escala a no espaço de fase

$$A = \left[\frac{8T_b}{\pi\left(T^2+T_b^2\right)}\right]^{1/4}\exp\left[\frac{-4T_b a^{3(1-\omega)}}{9\left(T^2+T_b^2\right)(1-\omega)^2}\right] \tag{2.25a}$$
$$S = -\left[\frac{4Ta^{3(1-\omega)}}{9\left(T^2+T_b^2\right)(1-\omega)^2} + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{T_b}{T}\right) - \frac{\pi}{4}\right] \tag{2.25b}$$

A equação (2.25b) aplicada à equação para a trajetória bohmiana (2.24) fornece

$$a(T) = a_b\left[1+\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{3(1-\omega)}} \tag{2.26}$$

Como $a(T)$ pode ser visto como uma função de T, é possível implementar as seguintes transformações canônicas dependentes do tempo. Primeiramente[4]

$$w_{ij} \to \frac{\sqrt{12}\ell_{\rm Pl}}{a}\mu_{ij}$$
$$-i\frac{\delta}{\delta w_{ij}} \to -i\frac{a}{\sqrt{12}\ell_{\rm Pl}}\frac{\delta}{\delta\mu_{ij}}$$
$$\frac{i\delta}{\delta t} \to \frac{i\partial}{\partial t} + \frac{i}{2}\frac{\partial\ln a}{\partial t}\left(\mu_{ij}\frac{\partial}{\partial\mu_{ik}} + \frac{\partial}{\partial\mu_{ik}}\mu_{ij}\right)$$

[4] A nova variável μ_{ij} representa a quantidade quântica da variável μ em (1.59)

e em seguida[5]

$$\begin{aligned} w_{ij} &\to \mu_{ij} \\ -i\frac{\delta}{\delta\mu_{ij}} &\to -i\frac{\delta}{\delta\mu_{ij}} + \frac{a'}{a}w^{ij} \\ i\frac{\partial}{\partial t} &\to i\frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{\partial \ln a}{\partial t}\right)^2 w^{ab}\mu_{ab} \end{aligned}$$

onde o fator de escala a foi tratado como uma função do tempo, a trajetória bohmiana, e não um operador. Quando aplicada à equação (2.14a), gera a equação de evolução temporal para as perturbações

$$i\frac{\partial\psi(\mu_{ab},\eta)}{\partial\eta} = \left[\frac{\mu^{ab//c}\mu_{ab//c}}{2} - \frac{a''}{2a}\mu^{ab}\mu_{ab} - \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\delta\mu_{ab}\delta\mu^{ab}}\right]\psi(w,\eta) \qquad , \tag{2.28}$$

onde foi usada a relação do tempo medido pelo fluido e o tempo conforme $a^{3\omega-1}dT = d\eta$. A equação (2.28) escrita em termos dos operadores fica

$$\hat{H}_\eta = \frac{\hat{\mu}^{ab//c}\hat{\mu}_{ab//c}}{2} - \frac{a''}{2a}\hat{\mu}^{ab}\hat{\mu}_{ab} + \frac{1}{2}\hat{P}^{ab}\hat{P}_{ab} \tag{2.29}$$

onde podemos usar os comutadores para encontrar a evolução dos operadores

$$\begin{aligned} \left[\hat{\mu}_{ab}, \hat{H}_\eta\right] &= \hat{\mu}'_{ab} = \hat{P}_{ab} \\ \left[\hat{\mu}'_{ab}, \hat{H}_\eta\right] &= \hat{\mu}''_{ab} = \left[\hat{P}_{ab}, \hat{H}_\eta\right] = \hat{\mu}_{ab//c}{}^{//c} + \frac{a''}{a}\hat{\mu}_{ab} \\ &\therefore \hat{\mu}''_{ab} - \hat{\mu}_{ab//c}{}^{//c} - \frac{a''}{a}\hat{\mu}_{ab} = 0 \end{aligned} \tag{2.30}$$

igual à equação clássica para as perturbações (1.57).

Como no capítulo anterior, as perturbações serão expandidas em séries harmônicas para o espectro da perturbação. Porém, diferente do caso da equação (1.58), $\hat{\mu}$ é um operador no espaço de Hilbert.

$$\hat{\mu}_{ij}(x,\eta) = \sum_{\lambda=+,X}\int \frac{dV_k}{(2\pi)^{3/2}}\epsilon_{ij}^{(\lambda)}\left[\mu_k^{(\lambda)}(\eta)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\hat{a}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} + \mu_k^{*(\lambda)}(\eta)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\hat{a}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)\dagger}\right] \tag{2.31}$$

onde $\mu_k^{(\lambda)}$ são os modos harmônicos da expansão, e $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)\dagger}$ e $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}$ são os operadores de criação e aniquilação, respectivamente, que formam uma base no espaço de Hilbert. Eles atendem a álgebra de operadores representada pelos comutadores em uma mesma hipersuperfície espacial

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')\dagger}\right] = \delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \tag{2.32a}$$

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')}\right] = \left[\hat{a}_{\mathbf{k}}^{(\lambda\dagger)}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')\dagger}\right] = 0 \tag{2.32b}$$

[5] Ambas as transformações canônicas podem ser feitas pelo operador unitário

$$U = \exp\left[i\left(\int dV\sqrt{\Gamma}\frac{\dot{a}w_{ij}w^{ij}}{2a}\right)\right]\exp\left\{i\left[\int dV\left(\frac{w_{ij}P_v^{ij} + P_v^{ij}w_{ij}}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{12\ell_{\mathrm{Pl}}}}{a}\right)\right)\right]\right\} \qquad , \tag{2.27}$$

onde o vácuo quântico é definido pela ação do operador de aniquilação $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}$ sobre esse estado

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}|0\rangle = 0 \tag{2.33}$$

Para que a equação (2.32) seja satisfeita na expansão (2.31), atendendo à relação de comutação μ e seu momento, os modos harmônicos devem satisfazer a condição de normalização[6]

$$\mu_k^{(\lambda)*'}(\eta)\mu_k^{(\lambda)}(\eta) - \mu_k^{(\lambda)'}(\eta)\mu_k^{(\lambda)*}(\eta) = i \tag{2.34}$$

Usando a expansão na equação de Heinseinberg (2.30)

$$\mu_k^{(\lambda)''} + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)\mu_k^{(\lambda)} = 0 \tag{2.35}$$

similar à equação (1.59) para os modos clássicos.

Para regiões muito distantes do ricochete, a equação (2.35) possui solução tipo onda, $\propto e^{-ik\eta}$, respeitando a condição de normalização

$$\mu_k(\eta_0) = \frac{e^{-ik\eta_0}}{\sqrt{2k}} \tag{2.36}$$

A equação (2.36) servirá de condição inicial das perturbações tensoriais antes do ricochete.

No próximo capítulo, será aplicada a teoria de evolução das pertubações tensoriais para o caso de um Universo preenchido com matéria bariônica, radiação e um fluido mais duro. No modelo, as perturbações iniciais são geradas antes do ricochete em uma era dominada pela matéria bariônica, e que foram amplificadas durante o ricochete. A equação que rege as ondas gravitacionais terá dois regimes, quântico e clássico, que se diferenciam pelo potencial $\frac{a''}{a}$.

[6] Ver apêndice C.

3 Ondas Gravitacionais em Modelos de Ricochete

Nesse Capítulo, aplicamos a teoria ao caso de um Universo composto de poeira, radiação e uma matéria quase dura.

"[...]For Advanced LIGO to succeed, technology has been developed by LIGO scientists and engineers to measure displacements less than 1/10,000 the diameter of an atomic nucleus[...]
(https://www.advancedligo.mit.edu/tech_overview.html, junho de 2014)

Nos capítulos anteriores, desenvolvemos a teoria de perturbações tensoriais em um Universo homogêneo e isotrópico preenchido por um fluido perfeito, tanto a nível clássico, quanto a nível quântico. Neste capítulo, aplicaremos a teoria para o caso do Universo preenchido por matéria escura, radiação e um fluido mais duro, cuja velocidade de propagação das perturbações tende à velocidade da luz[1]. O objetivo deste modelo é observar a variação da intensidade de ondas gravitacionais quando existe um fluido com velocidade das perturbações próximo à luz, quando acontece o ricochete. Em resultados anteriores (BESSADA et al., 2012), mostrou-se que, para um Universo de matéria escura e radiação, as perturbações geradas num período anterior ao ricochete não são intensas o suficiente para serem observadas hoje, e que possivelmente um universo que possuísse uma matéria mais dura no momento do ricochete conseguiria amplificar as ondas gravitacionais a ponto de que elas pudessem ser medidas hoje. As ondas gravitacionais primordiais teriam origem em uma fase do Universo altamente plana e homogênea, predominante em sua fase de contração anterior ao ricochete. Nesta fase, as ondas gravitacionais seriam amplificadas e talvez observadas hoje (BESSADA et al., 2012).

Neste capítulo, utilizaremos seções espaciais planas $C = 0$, com o calibre do tempo conforme, $N = a$.

3.1 Solução Clássica

Nesse modelo, vamos trabalhar com três fluidos não interagentes: radiação, poeira de matéria escura e a matéria dura. As equações de estado, que seguem a relação $p = \lambda\rho$, são respectivamente (RYDEN, 2002)

$$p_r = \frac{\rho_r}{3} \qquad \lambda_r = \frac{1}{3}$$
$$p_p = 0 \qquad \lambda_p = 0$$
$$p_d = \omega\rho_d \qquad \lambda_d = \omega$$

A pressão e densidade totais do Universo serão compostas pela soma das componentes dos três fluidos sem que estes interajam, isto é, sem que na ação haja um termo misto de suas variáveis. Rearranjando a equação (1.43), para $N = a$

$$a\frac{d\rho}{da} = -3\left[(1+\omega)\,\rho_d + \rho_p + \frac{4}{3}\rho_r\right] \tag{3.1a}$$
$$\therefore \rho_d = \frac{\rho_{d0}}{a^{3(\omega+1)}} \tag{3.1b}$$
$$\therefore \rho_r = \frac{\rho_{r0}}{a^4} \tag{3.1c}$$
$$\therefore \rho_p = \frac{\rho_{p0}}{a^3} \tag{3.1d}$$
$$\tag{3.1e}$$

[1] $\frac{\partial p}{\partial \rho} \to 1$

onde ρ_{d0}, ρ_{r0} e ρ_{p0} são as densidades desses fluidos medidos hoje. Também foi usado que $\dot{\rho}/\dot{a} = d\rho/da$.

Obtemos a dinâmica do fator de escala a substituindo (3.1) em (1.43a).

$$(a')^2 = (\mathcal{H}(a)a)^2 = H_0^2 \left(\Omega_r + \frac{\Omega_d}{a^{3\omega-1}} + \Omega_p a \right) \tag{3.2}$$

onde as quantidades Ω são parâmetros de densidade do fluido, definidos como

$$\Omega = \frac{\rho_o \ell_{\mathrm{Pl}}}{H_0^2}$$

O Universo, dependendo do fator de escala, é dominado por um tipo de fluido em diferentes fases da sua evolução. Nessas regiões de dominância, a equação (3.2) pode ser aproximada a somente um fluido, formando um potencial aproximado da forma

$$\frac{a''}{a} = -\frac{2(3\lambda - 1)}{(1+3\lambda)^2 \eta^2} \quad , \tag{3.3}$$

onde λ é o parâmetro da equação de estado do fluido dominante.

3.2 Solução quântica

Quando nos aproximamos do ricochete, o efeito do fluido de matéria dura sobre a dinâmica domina sobre os demais. Será o fluido mais duro que dominará na era quântica do ricochete, onde vale a equação (2.26). Colocando essa relação em termos do tempo conforme pela transformação (1.49), obtemos

$$(a')^2 = \frac{1}{\alpha^2 a_b^2} \left[\left(\frac{a_b}{a} \right)^{3\omega-1} - \left(\frac{a_b}{a} \right)^2 \right] \quad , \tag{3.4}$$

onde $\alpha = \frac{3(1-\omega)T_b}{a_b^{\frac{3(1-\omega)}{2}}}$. O termo em destaque na equação provém do potencial quântico, o qual, quando o fator de escala é grande o suficiente, $a \gg a_b$, é desprezível, retornando à situação clássica.

3.3 Análise do potencial

Com as equações (3.2) e (3.4), somos capazes de calcular a evolução das ondas gravitacionais dada por (2.35) com a condição inicial (2.36) em um tempo muito anterior ao ricochete. Para tanto, devemos fazer um estudo do potencial $\frac{a''}{a}$.

O potencial total possui cinco picos, três no regime quântico e dois no clássico 1. Os picos clássicos ocorrem na passagem da era da radiação para a era da matéria mais densa, enquanto os picos quânticos se devem à passagem do regime clássico para o quântico da

matéria mais densa e um pico central. Os máximos são simétricos em relação ao ricochete, e são maiores quanto mais perto dele 5.

Suporemos que o regime quântico está dentro da era dominada pela matéria mais dura, de forma que podemos definir um regime transiente sem a interferência dos demais fluidos. Nesse período entre o regime quântico (fator de escala da ordem de a_b) e o clássico (fator de escala muito maior que a_b), a matéria mais densa domina (a contribuição da matéria quase dura deve ser igual à da radiação na equação (3.2)), ou seja, quando

$$a_b \ll a \ll \left(\frac{\Omega_\omega}{\Omega_r}\right)^{\frac{1}{3\omega-1}} a_0 \quad , \tag{3.5}$$

onde a_0 é o fator de escala hoje.

A existência desse limite implica em limites para ω: seja ξ tal que $a = 10^\xi a_b$ esteja nesse intervalo transiente. Então, ele deve atender às seguintes desigualdades

$$10^{\xi 3(1-\omega)} \gg 1 \tag{3.6a}$$

$$10^\xi \ll \left(\frac{\Omega_\omega}{\Omega_r}\right)^{\frac{1}{3\omega-1}} \frac{a_0}{a_b} \quad . \tag{3.6b}$$

Uma solução para as desigualdades em (3.6) é que ω seja limitado pela inequação

$$\frac{2}{3(\omega-1)} < \log_{10}\left(\frac{a_0}{a_b}\right) - \frac{1}{3\omega-1}\log_{10}\left(\frac{\Omega_r}{\Omega_d}\right) \quad , \tag{3.7}$$

onde foi usado que para atender a desigualdade (3.6a), bastava $10^{\xi 3(1-\omega)} = 10^2$. Da desigualdade (3.7), vemos que para existir a região intermediária, quanto maior o ω, menor deve ser o fator de escala, cujo limite para $\omega \to 1^-$ implica em $a_b \to 0$. A desigualdade (3.7) nos servirá para obtermos limites inferior e superior para ω.

Uma vez que existe o domínio intermediário, devemos igualar (3.4) e (3.2)

$$\frac{1}{\alpha^2 a_b^2}\left(\frac{a_b}{a}\right)^{3\omega-1} = H_0^2 \frac{\Omega_d}{a^{3\omega-1}} \quad ,$$

o que leva às equações

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{a_b}{a_0}\right)^{3\omega-1} \frac{1}{\mathcal{H}_0^2 \Omega_\omega}} \tag{3.8a}$$

$$T_b = \frac{2}{3(1-\omega)} \frac{1}{(a_b a_0)^{\frac{3\omega-1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}_0^2 \Omega_\omega}} \tag{3.8b}$$

O pico lateral quântico acontece nas proximidades de a_b, chegando em $a_b \exp(\frac{3}{4})$ no limite em que ω é um. Esse pico ainda é inferior ao pico central, podendo ser, no máximo, $\frac{V_{\text{Central}}}{2\exp(3)}$. O pico central atinge um máximo em $\omega = 1 - \frac{1}{\frac{3}{2}\ln\left(\frac{a_0}{a_b}\right)}$.

Conhecendo o potencial em que as ondas gravitacionais seguirão, na próxima seção desenvolveremos, para elas, uma aproximação analítica. Uma análise do potencial, fora de escala, é apresentado na figura 4. Uma representação em escala é apresentada na figura 5.

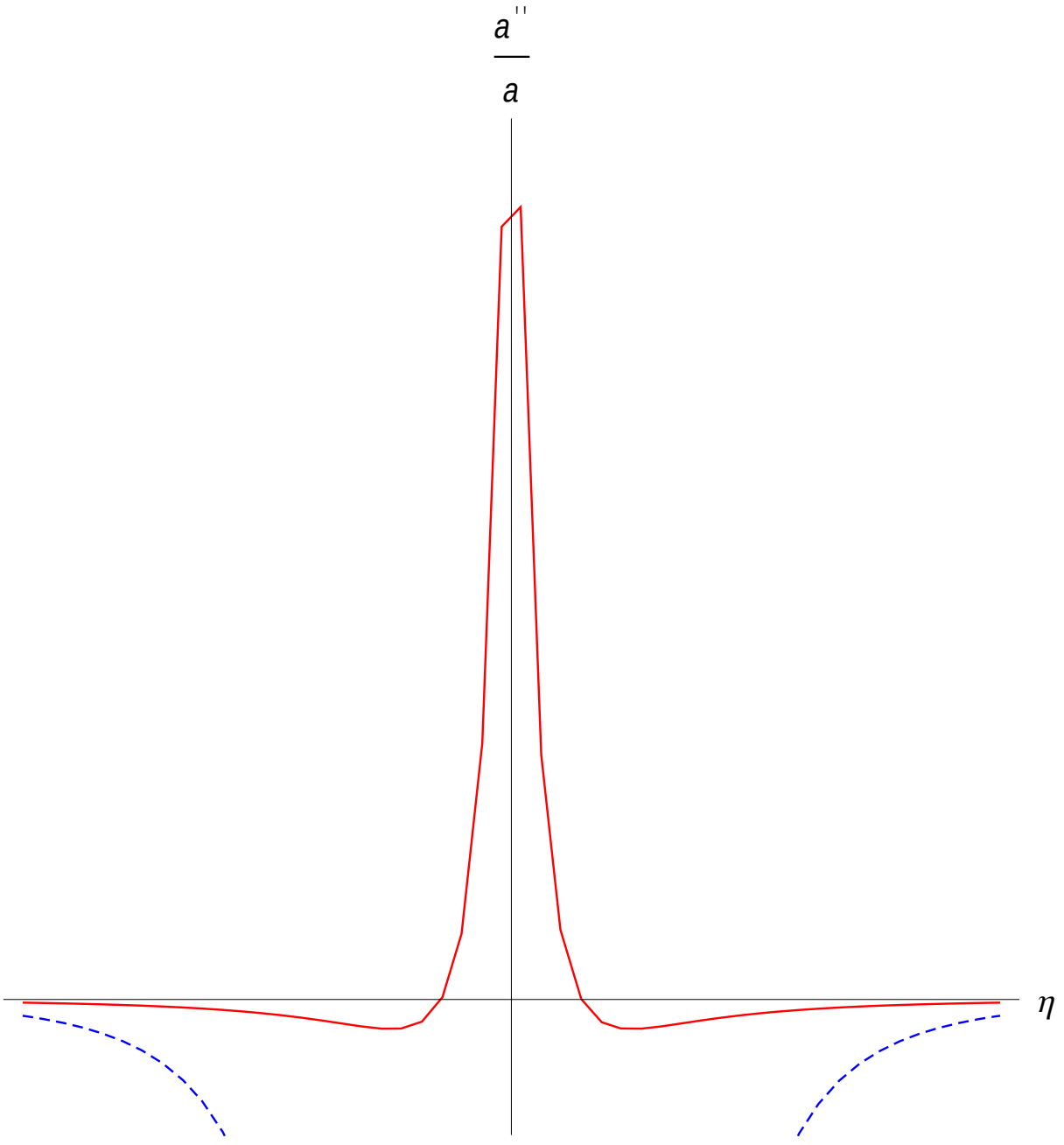
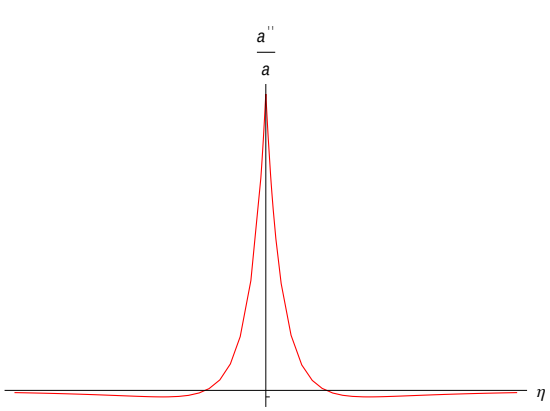


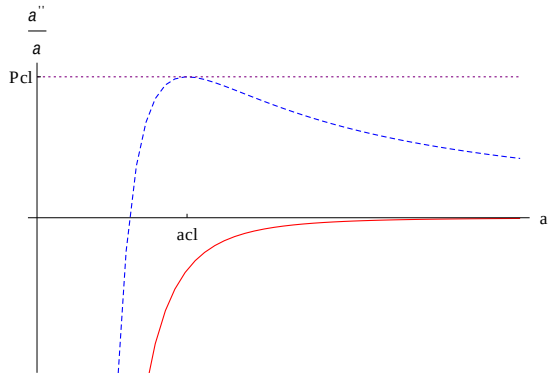
Figura 4 – Comparação dos potenciais clássico e quântico, apresentados em azul tracejado e vermelho sólido, respectivamente. O gráfico não está em escala.

Pico	Fator de escala	Valor do potencial
V_{Central}	a_b	$\frac{3(1-\omega)}{a_b^2\sqrt{\mathcal{H}_0\Omega_\omega}}\left(\frac{a_0}{a_b}\right)^{\frac{3\omega-1}{2}}$
$V_{\text{Lateral quântico}}$ (Pl)	aqu$= a_b\left[\frac{8}{(3\omega+1)(3\omega-1)}\right]^{\frac{1}{3(1-\omega)}}$	$V_{\text{Central}}\left(\frac{-2}{3\omega+1}\right)\left[\frac{(3\omega+1)(3\omega-1)}{8}\right]^{\frac{4}{3(1-\omega)}}$
$V_{\text{Lateral Clássico}}$ (Pcl)	acl$=\left\{\left[(3\omega-1)(3\omega+1)\frac{\Omega_\omega}{\Omega_m}\right]\right\}^{\frac{1}{3\omega}}a_0$	$\frac{3\omega(3\omega-1)}{2}\frac{\Omega_\omega\mathcal{H}_0^2}{a_0^2}\left(\frac{\Omega_m}{(3\omega+1)(3\omega-1)\Omega_\omega}\right)^{\frac{3\omega+1}{3\omega}}$

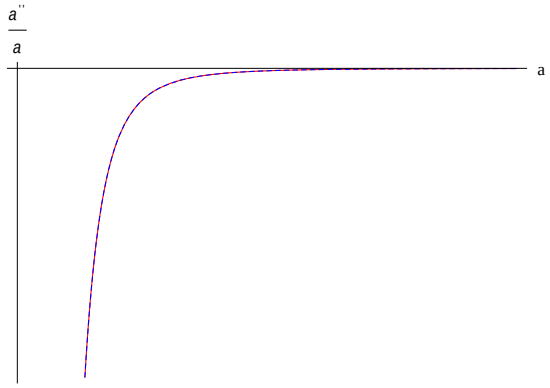
Tabela 1 – Picos do potencial. Para cada pico lateral exite um outro simétrico, em relação ao ricochete (Fig. 5), com as mesmas propriedades.



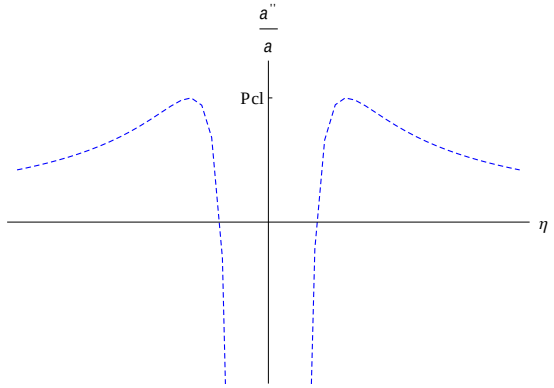
(a) Potencial próximo ao ricochete.



(b) Potencial no limite em que a parte quântica domina.



(c) Potencial na região intermediária.



(d) Potencial na escala clássica. A parte quântica está localizada muito próxima ao eixo, e não é visível no gráfico.

Figura 5 – Potencial clássico, linha pontilhada, e quântico, linha sólida, apresentados em diferentes escalas.

3.4 Resultados analíticos

As perturbações tensoriais evoluirão segundo a equação (2.35) com a condição inicial (2.36). Podemos separar essa evolução segundo a relação do comprimento de onda físico do modo k, $l_{fis} = \frac{a}{k}$, e a escala de curvatura do Universo, $l_c = \sqrt{\frac{a^3}{a''}}$. Enquanto o comprimento de onda físico for menor que a escala de curvatura, teremos que $k^2 > \frac{a''}{a}$. Nessa situação, μ_k possuirá amplitude constante, o que significa que as perturbações tensoriais serão proporcionais ao inverso do fator de escala $|\mu_k| \propto \frac{1}{a}$. Depois que os

comprimentos de onda físicos ficam maiores que a escala de curvatura, portanto, $k^2 < \frac{a''}{a}$, o potencial domina e μ_k não é mais uma onda, mas possui solução geral da forma

$$\mu_k(\eta) = \left[\frac{\mu_k(-\eta_c)}{a(-\eta_c)} + \left(\frac{\mu_k}{a}\bigg|_{\eta=-\eta_c} a(-\eta_c)\right)\int_{-\eta_c}^{\eta} \frac{d\tau}{a^2(\tau)}\right] a(\eta) \qquad , \tag{3.9}$$

onde η_c é o módulo do tempo de cruzamento quando as perturbações cruzam a escala de curvatura. Como depois de cruzar a escala de curvatura a intensidade das perturbações ficará congelada, a amplitude das ondas gravitacionais observadas hoje η_0 é a mesma de quando elas cruzaram pela última vez a escala de curvatura, ou seja, $|\mu_k(\eta)| = |\mu_k(\eta_0)|$. A seguir, mostraremos esse resultado, ao obter o espectro primordial das ondas gravitacionais provenientes de uma flutuação do vácuo anterior ao ricochete.

Dependendo do fator de escala, estaremos numa fase do Universo dominada por um tipo de fluido. Em cada era clássica, a perturbação deve atender à equação (2.35), sendo λ o parâmetro da equação de estado do fluido dominante, com o potencial que pode ser descrito por (3.3)

$$\mu_k'' + \left[k^2 + \frac{2(3\lambda-1)}{(1+3\lambda)^2\eta^2}\right]\mu_k = 0 \qquad , \tag{3.10}$$

cuja solução é da forma

$$\mu_k = \frac{C_1}{\sqrt{k}}\sqrt{k|\eta|}H_\nu^1(k|\eta|) + \frac{C_2}{\sqrt{k}}\sqrt{k|\eta|}H_\nu^2(k|\eta|) \qquad , \tag{3.11}$$

onde H_ν^1 e H_ν^2 são funções de Hankel[2], cujos coeficientes dependem do parâmetro da equação de estado λ fluido dominante

$$\nu = \frac{3(\lambda-1)}{2(3\lambda+1)} \qquad ,$$

Essas soluções são boas aproximações para as perturbações quando elas cruzam a escala de curvatura. As funções de Hankel comportam-se como funções oscilatórias com amplitude proporcional a $\frac{1}{\sqrt{k|\eta|}}$ quando $k|\eta| \gg 1$, de forma que, para atender as condições iniciais, basta que $C1$ e $C2$ não dependam de k. O cruzamento da escala de curvatura acontece em η_c, quando $k = \sqrt{\left|\frac{a''}{a}\right|}$ de forma que, por (3.3)

$$k\eta_c = \sqrt{\frac{2|3\lambda-1|}{(1+3\lambda)^2}} = f_c(\lambda) \qquad , \tag{3.12}$$

[2] A função de Hankel é uma composição linear de funções de Bessel que oscila com frequência constante quando está longe da origem, diminuindo a amplitude com o inverso da raiz da distância da origem. Ou seja,

$$H_\nu^1(k\eta) \backsimeq \frac{e^{ik\eta}}{\sqrt{k\eta}}$$
$$H_\nu^2(k\eta) \backsimeq \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{k\eta}}$$

onde $f_c(\lambda)$ é uma função que depende somente do parâmetro da equação de estado do fluido dominante.

Depois de cruzar a escala de curvatura, os termos de frequência serão maiores que o potencial $\sqrt{\left|\frac{a''}{a}\right|} \gg k$, então podemos aproximar as perturbações à função (3.9) pela aproximação da equação diferencial (3.10)

$$\begin{aligned}
\mu_k''(\eta) - \frac{a''}{a}\mu_k = 0 &= a\left(\frac{\mu_k}{a}\right)'' + 2a'\left(\frac{\mu_k}{a}\right)' + \frac{a''}{a}\mu_k - \frac{a''}{a}\mu_k \\
\Rightarrow \left\{\ln\left[\left(\frac{\mu_k}{a}\right)' a^2\right]\right\}' &= 0 \\
\Rightarrow \left(\frac{\mu_k}{a}\right)' a^2 &= C^{te} \\
\Rightarrow \mu_k(\eta) &= \left(C[1] + C[2]\int_{-\eta_c}^{\eta} \frac{dt}{a^2(t)}\right) a(\eta) \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

onde

$$C[1] = \frac{\mu_k(-\eta_c)}{a(-\eta_c)} \qquad (3.14a)$$

$$C[2] = \left(\frac{\mu_k}{a}\right)_{\eta=-\eta_c} a(-\eta_c) = \mu_k'(-\eta_c)a(-\eta_c) - \mu_k(-\eta_c)a'(-\eta_c) \qquad (3.14b)$$

Usando a solução (3.3), o fator de escala quando as pertubações cruzam a escala de curvatura é

$$a_c \propto k^{\frac{-2}{1+3\lambda}} \qquad (3.15)$$

As condições de contorno na hora do cruzamento da escala de curvatura antes do ricochete são dadas pela equação (2.36) aplicada à (3.11)

$$\mu_k(-\eta_c) = \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{k}}\sqrt{k\eta_c}H_\nu^2(k\eta_c) \qquad , \qquad (3.16)$$

onde ϕ é uma fase. Da equação (3.12), o termo $e^{i\phi}\sqrt{k\eta_c}H_\nu^2(k\eta_c)$ não depende de k, de forma que

$$\mu_k(-\eta_c) \propto \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad (3.17a)$$

$$\mu_k'(-\eta_c) \propto \sqrt{k} \qquad (3.17b)$$

Assim, a função, depois de cruzar novamente a escala de curvatura, será

$$\mu_k(\eta_c) = \frac{D[1]}{\sqrt{k}} + a_c\left(\sqrt{k}D[2]a_c + D[3]\frac{a_c^{\frac{1-3\lambda}{2}}}{\sqrt{k}}\right)\int_{-\eta_c}^{\eta_c}\frac{dt}{a^2(t)} \qquad (3.18)$$

onde as constantes D não dependem de k. A integral, na equação acima, deve ser avaliada da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\int_{-\eta_c}^{\eta_c}\frac{dt}{a^2(t)} = 2\int_{a_b}^{a_c}\frac{da}{a^2a'} &= D[4] + \frac{2}{H_0\sqrt{\Omega_\lambda}}\int^{a_c}\frac{da}{a^2a^{\frac{1-3\lambda}{2}}} = \\
&= D[4] + D[5]a_c^{\frac{3(\lambda-1)}{2}}
\end{aligned}$$

deste modo

$$\frac{\mu_k(\eta_c)}{a_c} = F[1]k^{\frac{3(1-\lambda)}{2(1+3\lambda)}} + F[2]k^{\frac{3(\lambda-1)}{2(1+3\lambda)}} \tag{3.19}$$

Com isso, é possível encontrar a dependência das ondas gravitacionais com a frequência das perturbações iniciais, o seu índice espectral. Como estamos no limite para baixas frequências, somente o modo de $F[2]$ domina na equação (3.19)

$$\left|\frac{\mu_k}{a_c}\right|^2 k^3 \propto k^{n_t} \propto k^3 k^{\frac{3(\lambda-1)}{1+3\lambda}} \tag{3.20}$$

$$\therefore n_t = \frac{12\lambda}{1+3\lambda} \tag{3.21}$$

onde λ é o coeficiente do fluido que domina quando as perturbações cruzam a escala de curvatura. Utilizando a equação (3.21) na equação (1.62), a densidade de energia das ondas gravitacionais hoje para frequências, tais que $k \gg \mathcal{H}$, é da forma

$$\Omega_{OG}(k,\eta_0) = \frac{k^5}{4\pi^2\rho_c a_0}\left|\frac{\mu_k}{a_c}\right|^2 a_c^2 \propto k^{\frac{2(9\lambda-1)}{3\lambda+1}} \quad , \tag{3.22}$$

onde λ é o parâmetro do fluido perfeito que domina quando a perturbação de frequência k cruza a escala de curvatura. O parâmetro obtido é o mesmo esperado em (PETER; PINHO; PINTO-NETO, 2006). O espectro de energia é separado na tabela 2, com base em (3.22), por frequência f, onde $f = \frac{k}{2\pi a_0}$. Separamos o domínio de cada fluido pela aproximação $f_{eq} = \frac{\mathcal{H}(a_{eq})}{a_0}$[3], que representa a frequência intermediária entre duas eras. Como o potencial é finito, existe uma frequência limite, $f_{max} = \frac{\sqrt{V_{\text{Central}}}}{2\pi a_0}$, a qual frequências superiores não entram na escala de curvatura em nenhum momento.

Fluido	Poeira	Radiação	Matéria dura ($\omega \to 1$)
Intervalo	$f_p \lesssim f_{eq}^r = 10^{-16}$Hz	10^{-16} Hz $\lesssim f_r \lesssim f_{eq}^d = 10^{-8} Hz$	10^{-8} Hz $\lesssim f_d \lesssim f_{max}$
$\frac{d\ln(\Omega_{OG})}{d\ln(k)}$	-2	2	4

Tabela 2 – Comportamento da evolução das ondas gravitacionais segundo o período em que a onda sai da escala de curvatura. A frequência de equivalência entre a radiação e a matéria dura foi obtida com a densidade máxima de matéria dura 3.24.

Para baixas frequências, a poeira domina o comportamento da densidade de energia das ondas gravitacionais, a qual é proporcional a $\propto k^{-2}$. Em seguida, para as perturbações que entram da escala de curvatura na era de radiação, a intensidade de Ω_{OG} cresce proporcional a k^2. Quando a frequência da perturbação é grande o suficiente para cruzar a escala de curvatura na era de matéria quase dura, a densidade de energia das ondas

[3] A aproximação é obtida derivando-se a equação (3.2)

$$f = \frac{1}{2\pi a_0}\sqrt{\left|\frac{a''}{a}\right|} = \frac{|\mathcal{H}|}{2\pi a_0}\sqrt{\left|\frac{d(\ln\mathcal{H})}{d(\ln a)} + 1\right|} \simeq \frac{\mathcal{H}}{a_0} \tag{3.23}$$

gravitacionais tende a um crescimento de quarta potência. Se o fator de frequência for maior que o pico central do potencial, apresentado na tabela 1, as perturbações nunca sairão da escala de curvatura, e manterão sua amplitude constante ($|\mu_k|^2 \propto \frac{1}{k}$), e $\Omega_{OG} \propto k^4$.

A densidade de energia em (3.22) depende da era em que houve o cruzamento de escala. Quanto mais denso o fluido, maior é o crescimento, de modo que se a matéria mais dura for dominante em mais regiões no Universo, maior será a densidade de energia observada hoje. O período de dominação está relacionado com a quantidade de matéria dura presente no Universo, segundo a equação (3.5). Existe, portanto, um limite superior da densidade de energia de ondas gravitacionais observáveis dado pelo valor máximo de densidade de matéria mais dura no Universo.

Um limite superior para a densidade de matéria dura pode ser alcançado impondo ao modelo que a radiação domine no período de nucleossíntese, $a_n \backsimeq 3 \times 10^{-9} a_0$, e que a igualdade radiação e matéria aconteça no fator de escala $a_r \backsimeq 4 \times 10^{-4} a_0$. No limite em que a transição entre a matéria quase dura e radiação acontece na nucleossíntese, de (3.5), temos

$$\Omega_\omega < 10^{-24} \quad , \tag{3.24}$$

que representa a densidade de energia da matéria dura hoje. Para que possamos observar as ondas gravitacionais primordiais, devemos encontrar uma densidade de energia $\Omega_{OG} > 10^{-12}$ para frequências da ordem de $f \sim 10Hz$ (BESSADA et al., 2012) para densidades de matéria dura que atendam (3.24), ou seja, para situações onde a matéria dura domine somente depois da nucleossíntese.

Para pequenas frequências, é esperado que a matéria dominante no ricochete não influencie a intensidade das perturbações primordiais, de forma que é esperado que haja um fator de escala mínimo a_b tal que $\Omega_{OG} = 10^{-54}$ na baixa frequência $f = 10^{-18}Hz$, assim como feito no artigo (BESSADA et al., 2012). Neste caso, trata-se de um ricochete profundo, com a_b muito pequeno, que nos servirá de limite superior. Portanto, a densidade de energia com e sem o fluido quase duro dominando do ricochete é

$$\Omega_{OG}^{\text{sem duro}}(f_{ob}) = 10^{-54} \left(\frac{f_{eq}^r}{10^{-18}}\right)^{-2} \left(\frac{f_{ob}}{f_{eq}^r}\right)^2$$

$$\Omega_{OG}^{\text{duro}}(f_{ob}) = 10^{-54} \left(\frac{f_{eq}^r}{10^{-18}}\right)^{-2} \left(\frac{f_{eq}^d}{f_{eq}^r}\right)^2 \left(\frac{f_{ob}}{f_{eq}^d}\right)^4$$

$$\Rightarrow \frac{\Omega_{OG}^{\text{sem duro}}(f_{ob})}{\Omega_{OG}^{\text{duro}}(f_{ob})} = \left(\frac{f_{eq}^d}{f_{ob}}\right)^2$$

A presença de matéria dura no modelo amplificou a densidade de energia por um fator de $\left(\frac{f_{eq}^d}{f_{ob}}\right)^2$. Neste caso, é possível observar as ondas gravitacionais[4], pois $\Omega_{OG}^{\text{duro}}(10Hz) \lesssim$

[4] Para o cálculo de f_{eq}^d usou-se a densidade máxima de matéria dura (3.24) para encontrar o fator de escala da equivalência matéria dura e radiação.

$10^{-7} > 10^{-12}$. De fato, os detectores Einstein, sensível a $\Omega_{OG} > 10^{-12}$, e AdvLigo, sensível a $\Omega_{OG} > 10^{-9}$, identificariam o sinal das ondas gravitacionais primordiais (BESSADA et al., 2012).

Considerações Finais

Vimos que, devido a efeitos quânticos, um Universo homogêneo e isotrópico pode evitar a singularidade do fator de escala $a(\eta)$, gerando um ricochete. Usamos a interpretação de de Broglie-Bohm para calcular o efeito quântico do ricochete e obtemos uma trajetória para o fator de escala, que serviu de solução de fundo para o cálculo das perturbações tensoriais.

Ao aplicarmos a teoria para o caso do Universo preenchido pelos fluidos, vimos que quanto mais densa e abundante a matéria que domina no ricochete, maior é a amplitude da densidade de energia das ondas gravitacionais por logaritmo de frequência, não excluindo a possibilidade de detecção direta de ondas gravitacionais primordiais. Todavia, a amplificação não é suficiente para explicar os resultados obtidos pelo experimento BICEP2 (ADE et al., 2014), que necessitaria de amplitudes maiores para frequências na faixa da radiação cósmica de fundo.

O próximo passo do trabalho é gerar numericamente o espectro de ondas gravitacionais e comparar com outros cenários, como os inflacionário (MUKHANOV, 2005).

Referências

ADE, P. et al. BICEP2 I: Detection Of B-mode Polarization at Degree Angular Scales. 2014. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 61.

ANDERSON, A. Canonical Transformations in Quantum Mechanics. *Annals of Physics*, v. 232, n. 2, p. 292–331, jun. 1994. ISSN 00034916. Citado na página 41.

BESSADA, D. et al. Stochastic background of relic gravitons in a bouncing quantum cosmological model. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2012, n. 11, p. 054–054, nov. 2012. ISSN 1475-7516. Citado 7 vezes nas páginas 7, 9, 15, 35, 50, 58 e 59.

BICEP2 Collaboration et al. BICEP2 I: Detection Of B-mode Polarization at Degree Angular Scales. p. 19, mar. 2014. Citado na página 14.

CARROLL, S. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. [S.l.]: Addison-Wesley, 2003. ISBN 0805387323. Citado na página 13.

COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOE, F. *Quantum Mechanics, Vol. 1*. [S.l.]: Wiley, 1991. ISBN 047116433X. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 41.

DRAKE, S. *Galileo at Work: His Scientific Biography (Dover Phoenix Editions)*. [S.l.]: Dover Publications, 2003. ISBN 0486495426. Citado na página 13.

EDDINGTON, A. S. The Propagation of Gravitational Waves. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 102, n. 716, p. 268–282, dez. 1922. ISSN 1364-5021. Citado na página 14.

EINSTEIN, A. *Sitzber. deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math. Physik u. Tech.*, p. 688–696, 1916. Citado na página 14.

EINSTEIN, A. Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, v. 354, n. 7, p. 769–822, 1916. Citado na página 13.

EINSTEIN, A. *Sitzber. deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math. Physik u. Tech.*, p. 688–696, 1918. Citado na página 14.

EINSTEIN, H. M. A. The principle of relativity: Original papers by a. einstein and h. minkowski. *University of Calcutta*, p. 89–163, 1920. Citado na página 13.

GIBBONS, G.; HAWKING, S. Theory of the Detection of Short Bursts of Gravitational Radiation. *Physical Review D*, v. 4, n. 8, p. 2191–2197, out. 1971. ISSN 0556-2821. Citado na página 14.

GIOVANNINI, M. Stochastic backgrounds of relic gravitons: a theoretical appraisal. *PMC Physics A*, v. 4, n. 1, p. 1, 2010. ISSN 1754-0410. Citado na página 32.

GöDEL, K. An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equations of Gravitation. *Reviews of Modern Physics*, v. 21, n. 3, p. 447–450, jul. 1949. ISSN 0034-6861. Citado na página 18.

HALLIWELL, J.; HAWKING, S. Origin of structure in the Universe. *Physical Review D*, v. 31, n. 8, p. 1777–1791, abr. 1985. ISSN 0556-2821. Citado na página 32.

HOYLE, C. et al. Submillimeter tests of the gravitational inverse-square law. *Physical Review D*, v. 70, n. 4, p. 042004, ago. 2004. ISSN 1550-7998. Citado na página 13.

Kogut, A. et al. Dipole Anisotropy in the COBE Differential Microwave Radiometers First-Year Sky Maps. , v. 419, p. 1, dez. 1993. Citado na página 26.

KRAEMER, M. Can one observe quantum-gravitational effects in the cosmic microwave background? p. 3, mar. 2013. Citado na página 38.

LEMOS, N. *Mecanica Analitica*. 2. ed. [S.l.]: Livraria da Fisica, 2007. ISBN 8588325241. Citado na página 30.

LEMOS, N. A. Radiation-dominated quantum Friedmann models. *Journal of Mathematical Physics*, v. 37, n. 3, p. 1449, 1996. ISSN 00222488. Citado na página 43.

LEVINE, J. L. Early Gravity-Wave Detection Experiments, 1960-1975. *Physics in Perspective (PIP)*, v. 6, n. 1, p. 42–75, abr. 2004. ISSN 1422-6944. Citado na página 14.

MAGGIORE, M. Gravitational wave experiments and early universe cosmology. *Physics Reports*, v. 331, n. 6, p. 283–367, jul. 2000. ISSN 03701573. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 35.

MUKHANOV, V. *Physical Foundations of Cosmology*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005. ISBN 0521563984. Citado 4 vezes nas páginas 15, 29, 32 e 61.

NOVELLO, M.; BERGLIAFFA, S. Bouncing cosmologies. *Physics Reports*, v. 463, n. 4, p. 127–213, jul. 2008. ISSN 03701573. Citado na página 15.

NOVELLO NELSON PINTO NETO, S. E. P. B. M. *Programa Mínimo de Cosmologia*. [S.l.]: Jauá Editora, 2010. Citado na página 13.

PETER, P.; PINHO, E.; PINTO-NETO, N. Tensor perturbations in quantum cosmological backgrounds. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2005, n. 07, p. 014–014, jul. 2005. ISSN 1475-7516. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 41.

PETER, P.; PINHO, E.; PINTO-NETO, N. Gravitational wave background in perfect fluid quantum cosmologies. *Physical Review D*, v. 73, n. 10, p. 104017, maio 2006. ISSN 1550-7998. Citado na página 57.

PINTO-NETO, N. *Teorias e Interpretações da Mecânica Quântica*. [S.l.]: Livraria da Física, 2010. Citado na página 44.

RAGAZZONI, R.; TURATTO, M.; GAESSLER, W. The Lack of Observational Evidence for the Quantum Structure of Spacetime at Planck Scales. *The Astrophysical Journal*, v. 587, n. 1, p. L1–L4, abr. 2003. ISSN 0004637X. Citado na página 13.

RYDEN, B. *Introduction to Cosmology*. [S.l.]: Addison-Wesley, 2002. ISBN 0805389121. Citado 3 vezes nas páginas 13, 38 e 50.

SCHUTZ, B. Perfect Fluids in General Relativity: Velocity Potentials and a Variational Principle. *Physical Review D*, v. 2, n. 12, p. 2762–2773, dez. 1970. ISSN 0556-2821. Citado na página 28.

SCHUTZ, B. Hamiltonian Theory of a Relativistic Perfect Fluid. *Physical Review D*, v. 4, n. 12, p. 3559–3566, dez. 1971. ISSN 0556-2821. Citado na página 30.

SCHUTZ, B. F. *A First Course in General Relativity*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1985. ISBN 0521277035. Citado na página 27.

SELIGER, R. L.; WHITHAM, G. B. Variational Principles in Continuum Mechanics. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 305, n. 1480, p. 1–25, maio 1968. ISSN 1364-5021. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.

SMOOT, G. F. et al. Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps. *The Astrophysical Journal*, v. 396, p. L1, set. 1992. ISSN 0004-637X. Citado na página 31.

TAUB, A. General Relativistic Variational Principle for Perfect Fluids. *Physical Review*, v. 94, n. 6, p. 1468–1470, jun. 1954. ISSN 0031-899X. Citado na página 28.

TAYLOR, E. F.; WHEELER, J. A. *Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity*. [S.l.]: Addison Wesley Longman, 2000. ISBN 020138423X. Citado na página 14.

ULLRICH, P. *Exact and Perturbed Friedmann-Lemaitre Cosmologies*. [S.l.]: University of Waterloo, 2007. Citado na página 26.

VALENTINI, A. Signal-locality, uncertainty, and the subquantum H-theorem. I. *Physics Letters A*, v. 156, n. 1-2, p. 5–11, jun. 1991. ISSN 03759601. Citado na página 44.

VALENTINI, A. Signal-locality, uncertainty, and the subquantum H-theorem. II. *Physics Letters A*, v. 158, n. 1-2, p. 1–8, ago. 1991. ISSN 03759601. Citado na página 44.

WALD, R. M. *General Relativity*. [S.l.]: University Of Chicago Press, 1984. ISBN 0226870332. Citado na página 19.

WEBER, J. Detection and Generation of Gravitational Waves. *Physical Review*, v. 117, n. 1, p. 306–313, jan. 1960. ISSN 0031-899X. Citado na página 14.

WEBER, J. Detection and Generation of Gravitational Waves. *Physical Review*, v. 117, n. 1, p. 306–313, jan. 1960. ISSN 0031-899X. Citado na página 14.

WEINBERG, S. *Cosmology*. [S.l.]: Oxford University Press, 2008. ISBN 0198526822. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 31.

WEISBERG, J. M.; TAYLOR, J. H.; FOWLER, L. A. Gravitational Waves from an Orbiting Pulsar. *Scientific American*, v. 245, n. 4, p. 74–82, out. 1981. ISSN 0036-8733. Citado na página 14.

ZHANG, F. *The Schur Complement and Its Applications (Numerical Methods and Algorithms)*. [S.l.]: Springer, 2005. ISBN 0387242716. Citado na página 23.

Apêndices

APÊNDICE A – A ação de Einstein-Hilbert no formalismo 3+1

Para o desenvolvimento do formalismo hamiltoniano da relatividade geral, usado para quantizá-la, é necessário expressar a ação em espaço tridimensional mais tempo global. Isso é feito ao se separar a variedade quadridimensional em folhas tridimensionais a tempo constante. Esse apêndice se dedica a expressar a parte gravitacional da ação da relatividade geral, equação (2), em quantidades relativas às folhas, à curvatura intrínseca (1.3), à curvatura extrínseca (1.4), à normal às hiperssuperfícies (1.8), ao vetor de *shift* (1.9) e ao lapso N.

Observando a definição da tricurvatura (1.3), é possível expandí-la em termos das derivadas covariantes de forma a relacionar a curvatura intrínseca das folhas com as quantidades do espaço em que elas estão mergulhadas

$$
\begin{aligned}
D_{[\mu}D_{\nu]}\gamma^{\sigma}{}_{\alpha}v^{\alpha} &= \gamma_{[\mu}{}^{\xi_1}\gamma_{\nu]}{}^{\xi_2}\gamma_{\xi_3}{}^{\sigma}\left[\nabla_{\xi_1}\gamma^{\lambda_1}{}_{\xi_2}\gamma^{\xi_3}{}_{\lambda_2}\left(\nabla_{\lambda_1}\gamma^{\lambda_2}{}_{\alpha}v^{\alpha}\right)\right] = R^{\sigma}{}_{\alpha\mu\nu}v^{\alpha} \\
&= \gamma_{[\mu}{}^{\xi_1}\gamma_{\nu]}{}^{\xi_2}\gamma_{\xi_3}{}^{\sigma}\Big[\gamma^{\lambda_1}{}_{\xi_2}\gamma^{\xi_3}{}_{\lambda_2}\left(\nabla_{\xi_1}\nabla_{\lambda_1}\gamma^{\lambda_2}{}_{\alpha}v^{\alpha}\right) + \\
&+ \left(\nabla_{\xi_1}\gamma^{\lambda_1}{}_{\xi_2}\right)\gamma^{\xi_3}{}_{\lambda_2}\left(\nabla_{\lambda_1}\gamma^{\lambda_2}{}_{\alpha}v^{\alpha}\right) + \gamma^{\lambda_1}{}_{\xi_2}\left(\nabla_{\xi_1}\gamma^{\xi_3}{}_{\lambda_2}\right)\left(\nabla_{\lambda_1}\gamma^{\lambda_2}{}_{\alpha}v^{\alpha}\right)\Big] = \\
&= \gamma_{\mu}{}^{\xi_1}\gamma_{\nu}{}^{\lambda_1}\gamma_{\lambda_2}{}^{\sigma}\left(\nabla_{[\xi_1}\nabla_{\lambda_1]}\gamma^{\lambda_2}{}_{\alpha}v^{\alpha}\right) + \\
&+ \gamma_{[\mu}{}^{\xi_1}\gamma_{\nu]}{}^{\xi_2}\gamma_{\xi_3}{}^{\sigma}\left(\nabla_{\lambda_1}\gamma^{\lambda_2}{}_{\alpha}v^{\alpha}\right)\left[\left(\nabla_{\xi_1}n_{\xi_2}\right)n^{\lambda_1}\gamma^{\xi_3}{}_{\lambda_2} + \gamma^{\lambda_1}{}_{\xi_2}n_{\lambda_2}\left(\nabla_{\xi_1}n^{\xi_3}\right)\right] = \\
&= \gamma_{\mu}{}^{\xi_1}\gamma_{\nu}{}^{\lambda_1}\gamma_{\lambda_2}{}^{\sigma}\gamma^{\rho}{}_{\alpha}\,{}^{4}R^{\lambda_2}{}_{\rho\xi_1\lambda_1}v^{\alpha} + \overbrace{\left[\gamma_{[\mu}{}^{\xi_1}\gamma_{\nu]}{}^{\xi_2}\left(\nabla_{\xi_1}n_{\xi_2}\right)\right]}^{K_{[\mu\nu]}=0}\gamma_{\xi_3}{}^{\sigma}\left(\nabla_{\lambda_1}\gamma^{\lambda_2}{}_{\alpha}v^{\alpha}\right)n^{\lambda_1}\gamma^{\xi_3}{}_{\lambda_2} + \\
&+ \gamma_{[\mu}{}^{\xi_1}\gamma_{\nu]}{}^{\xi_2}\gamma_{\xi_3}{}^{\sigma}\gamma^{\lambda_1}{}_{\xi_2}\overbrace{\left[n_{\lambda_2}\left(\nabla_{\lambda_1}\gamma^{\lambda_2}{}_{\alpha}v^{\alpha}\right)\right]}^{-\gamma^{\lambda_2}{}_{\alpha}v^{\alpha}\nabla_{\lambda_1}n_{\lambda_2}=\gamma^{\lambda}{}_{\alpha}v^{\alpha}K_{\lambda_1\lambda_2}}\overbrace{\left(\nabla_{\xi_1}n^{\xi_3}\right)}^{-K_{\xi_1}{}^{\xi_3}} = \\
&= \gamma_{\mu}{}^{\xi_1}\gamma_{\nu}{}^{\lambda_1}\gamma_{\lambda_2}{}^{\sigma}\gamma^{\rho}{}_{\alpha}\,{}^{4}R^{\lambda_2}{}_{\rho\xi_1\lambda_1}v^{\alpha} - K_{[\mu}{}^{\sigma}K_{\nu]\alpha}v^{\alpha} \\
&\therefore \gamma_{\mu}{}^{\xi_1}\gamma_{\nu}{}^{\lambda_1}\gamma_{\lambda_2}{}^{\sigma}\gamma^{\rho}{}_{\alpha}\,{}^{4}R^{\lambda_2}{}_{\rho\xi_1\lambda_1} = R^{\sigma}{}_{\alpha\mu\nu} - K_{[\mu}{}^{\sigma}K_{\nu]\alpha}
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

Essa equação (A.1) é conhecida como a relação de Gauss, que nos será útil para descrever a ação da relatividade geral em termos de quantidades da hipersuperfícies espaciais. Para tanto, devemos contrair a equação (A.1) com $\delta^{\mu}_{\sigma}\gamma^{\alpha\nu}$, obtendo

$$
\begin{aligned}
\gamma^{\xi_1}{}_{\lambda_2}\gamma^{\lambda_1\rho}\,{}^{4}R^{\lambda_2}{}_{\rho\xi_1\lambda_1} &= R - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} + K^2 \\
&= \left(\delta^{\xi_1}_{\lambda_2} + n^{\xi_1}n_{\lambda_2}\right)\left(g^{\lambda_1\rho} + n^{\lambda_1}n^{\rho}\right)\,{}^{4}R^{\lambda_2}{}_{\rho\xi_1\lambda_1} \\
&= {}^{4}R + 2\,{}^{4}R_{\rho\lambda_1}n^{\lambda_1}n^{\rho} + \overbrace{{}^{4}R^{\lambda_2}{}_{\rho\xi_1\lambda_1}n_{\lambda_2}n^{\rho}n^{\xi_2}n^{\lambda_1}}^{0} \\
\therefore {}^{4}R &= R - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} + K^2 - 2\,{}^{4}R_{\rho\lambda_1}n^{\lambda_1}n^{\rho}
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

A equação (A.2), chamada de relação escalar de Gauss, possui um último termos que nos impede descrever o escalar de curvatura ${}^4R$ em termos de quantidades das folhas. Todavia, ele está relacionado com a variação do vetor normal, que pode ser descrito por quantidades conhecidas

$$\begin{aligned}
{}^4R_{\mu\nu}n^\mu n^\mu &= \left({}^4R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}n^\mu\right)n^\nu = \left(\nabla_{[\alpha}\nabla_{\nu]}n^\alpha\right)n^\nu \\
&= -\nabla_{[\alpha}\left[K_{\nu]}{}^\alpha + \left(D^\alpha \ln N\right)n_{\nu]}\right]n^\nu = \\
&= n^\nu\nabla_\nu K - n^\nu\nabla_\alpha k_\nu{}^\alpha + \nabla_\alpha\left(D^\alpha \ln N\right) \\
&= \mathcal{L}_{\mathbf{n}}K + K^\alpha{}_\nu\nabla_\alpha n^\nu + \left(\gamma^\beta{}_\alpha - n^\beta n_\alpha\right)\nabla_\beta\left(D^\alpha \ln N\right) \\
&= \mathcal{L}_{\mathbf{n}}K - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} + D_\alpha D^\alpha\left(\ln N\right) - n^\beta n_\alpha\nabla_\beta\left(D^\alpha \ln N\right) \\
&= \mathcal{L}_{\mathbf{n}}K - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} + \frac{D_\alpha D^\alpha N}{N}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Aplicando (A.3) na equação (A.2), obtemos a relação entre a curvatura a quatro dimensões em termo das quantidades da folha

$${}^4R = R + K^2 + K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} - \frac{2}{N}\left(\mathcal{L}_{\mathbf{m}}K + D^iD_iN\right) \tag{A.4}$$

A ação da relatividade geral deve ser avaliada com variáveis definidas nas hipersuperfícies espaciais de forma a definirmos uma hamiltoniana. Usando (2) e (A.4), podemos escrever a ação em termos das quantidades das folhas

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{6\ell_{\text{Pl}}}\int\sqrt{-g}{}^4R d^4x = -\frac{1}{6\ell_{\text{Pl}}}\int_{t_0}^{t_f}\int_\Sigma\left[N\left(R + k^2 + k_{\mu\nu}K^{\mu\nu}\right) - 2\mathcal{L}_{\mathbf{m}}K - 2D_iD^iN\right]\sqrt{\gamma}dVdt \quad , \tag{A.5}$$

onde o volume a ser integrado corresponde às folhas que se encontram entre o tempo t_0 e t_f. Para o caso estudado, elas têm volume finito e não possuem bordas, são compactas. Os últimos termos da equação (A.5) possuem derivadas segundas que podem ser descartadas em uma ação equivalente, pois são divergentes espaciais (nulos, pois não existem bordas) e divergentes totais (cuja variação é nula). De fato

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathbf{m}}K = m^\mu\nabla_\mu K = Nm^\mu\nabla_\mu k = N\left[\nabla_\mu\left(kn^\mu\right) - k\overbrace{\nabla_\mu n^\mu}^{-K}\right] \\
= \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\underbrace{\partial\left(\sqrt{-g}kn^\mu\right)}_{\text{divergente total}} + NK^2
\end{aligned} \tag{A.6a}$$

$$D_iD^iN = D_I\left(D^iN\right) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\overbrace{\partial_i\left(\sqrt{\gamma}D^iN\right)}^{\text{divergente espacial}} \tag{A.6b}$$

Descartando as derivadas totais de (A.6b) e (A.6a) em $\mathcal{A}$

$$\delta\int_{t_0}^{t_f}\int_\Sigma\partial\left(\sqrt{-g}Kn^\mu\right)dVdt = \delta\int_\Sigma\sqrt{-g}Kn^0dV\Big|_{t_0}^{t_f} = 0$$

$$\int_\Sigma\partial_i\left(\sqrt{\gamma}D^iN\right)dV = \oint_{\partial\Sigma=\varnothing}\sqrt{\gamma}D^iNdS_i = 0$$

com

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{6\ell_{\rm Pl}} \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Sigma} N \left[R + K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} - K^2 \right] \sqrt{\gamma} dV dt \tag{A.7}$$

APÊNDICE B – Hamiltoniana perturbada

Neste apêndice, será encontrada a hamiltoniana gravitacional das perturbações tensoriais de segunda ordem. A notação deste apêndice é a mesma da seção 1.3. Procuramos expressar hamiltoniana (1.22) em termos das quantidades do minisuperespaço quantizado, isto é, nas variáveis a, w_{ij} e seus momentos canonicamente conjugados, P_a e P_w^{ij}

$$P_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}}$$
$$P_w^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{w}_{ij}}$$

onde as relações com as variáveis da equação (1.22) são

$$\gamma_{ij} = a^2 \left(\zeta_{ij} + w_{ij}\right)$$
$$\beta^i = 0$$

Primeiramente, vamos expressar a quantidade K_{ij} em função do momento Π_{ij} para então relacioná-lo com as variáveis do modelo de Friedman perturbado. Em seguida, substituímos o resultado na equação do momento (1.22).

A parte da Hamiltoniana $\mathcal{H}_0$ que contém os momentos pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
K_{ij} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(\frac{\gamma_{ab}\gamma_{ij}}{2} - \gamma_{ia}\gamma_{jb}\right)\Pi^{ab} = \\
&= -N\sqrt{\gamma}K_{ij}K_{ab}\left(\gamma^{ij}\gamma^{ab} - \gamma^{ia}\gamma^{jb}\right) = \\
&= -\frac{N}{\sqrt{\gamma}}\Pi^{kl}\Pi^{cd}\left(\frac{\gamma_{kl}\gamma_{ij}}{2} - \gamma_{ik}\gamma_{jl}\right)\left(\frac{\gamma_{ab}\gamma_{cd}}{2} - \gamma_{ca}\gamma_{db}\right)\left(\gamma^{ij}\gamma^{ab} - \gamma^{ia}\gamma^{jb}\right) = \\
&= -\frac{N}{\sqrt{\gamma}}\Pi^{kl}\Pi^{cd}\left(\frac{\gamma_{kl}\gamma_{ij}}{2} - \gamma_{ik}\gamma_{jl}\right)\delta^i_c\delta^j_d = \\
&= -\frac{N}{\sqrt{\gamma}}\Pi^{kl}\Pi^{cd}\left(\frac{\gamma_{kl}\gamma_{cd}}{2} - \gamma_{ck}\gamma_{dl}\right)
\end{aligned}$$

De (1.21), a relação acima do momento e o tensor K pode ser expressa como

$$\Pi^{ij} = \sqrt{\gamma}K_{kl}\left(\gamma^{kl}\gamma^{ij} - \gamma^{ki}\gamma^{lj}\right)$$

Calculando os momentos para o caso perturbado

$$
\begin{aligned}
K_{ij} &= \frac{1}{2N}\left(D_{(i}\beta_{j)} - \dot{\gamma}_{ij}\right) = \frac{-1}{2N}\dot{\gamma}_{ij} \\
\beta_i &= 0 \\
\dot{\gamma}_{ij} &= 2\dot{a}\frac{\gamma_{ij}}{a} + a^2\dot{w}_{ij} \\
\bar{\mathcal{L}} &= -N\sqrt{\gamma}K_{ij}K_{ab}\left(\gamma^{ij}\gamma^{ab} - \gamma^{ia}\gamma^{jb}\right) \\
P_a &= \frac{\partial\bar{\mathcal{L}}}{\partial\dot{a}} = -2\sqrt{\gamma}NK_{ij}\frac{\partial K_{ab}}{\partial\dot{a}}\left(\gamma^{ij}\gamma^{ab} - \gamma^{ia}\gamma^{jb}\right) = 2\frac{\gamma_{ab}}{a}\Pi^{ab} = \\
&= 2K_{ij}\frac{\gamma_{ab}}{a}\sqrt{\gamma}\left(\gamma^{ij}\gamma^{ab} - \gamma^{ia}\gamma^{jb}\right) = 4K_{ij}\sqrt{\gamma}\frac{\gamma^{ij}}{a} = \\
&= -\frac{2}{aN}\sqrt{\gamma}\dot{\gamma}_{ij}\gamma^{ij} = -\frac{2}{aN}\sqrt{\gamma}\left(6\mathcal{H} - \dot{w}_{ij}w^{ij}\right) = -\frac{2\sqrt{\zeta}a^2}{N}\left(6\mathcal{H} - \frac{3\mathcal{H}w^{ij}w_{ij}}{2} - \dot{w}_{ij}w^{ij}\right) \\
&\therefore \gamma_{ab}\Pi^{ab} = \frac{aP_a}{2}
\end{aligned}
$$

onde foi usado que $\frac{\partial\dot{w}_{ab}}{\partial\dot{w}_{kl}} = \delta^{kl}_{ab} - \frac{\zeta^{kl}\zeta_{ab}}{3}$, de forma que se anula ao ser multiplicado por algum ζ^{ab} ou ζ_{kl}.

$$
\begin{aligned}
K_{ij} &= \frac{1}{2N}\left(D_{(i}\beta_{j)} - \dot{\gamma}_{ij}\right) = \frac{-1}{2N}\dot{\gamma}_{ij} \\
\beta_i &= 0 \\
\dot{\gamma}_{ij} &= 2\dot{a}\frac{\gamma_{ij}}{a} + a^2\dot{w}_{ij} \\
\bar{\mathcal{L}} &= -N\sqrt{\gamma}K_{ij}K_{ab}\left(\gamma^{ij}\gamma^{ab} - \gamma^{ia}\gamma^{jb}\right) \\
P^{kl}_w &= \frac{\partial\bar{\mathcal{L}}}{\partial\dot{w}_{kl}} = -2\sqrt{\gamma}NK_{ij}\frac{\partial K_{ab}}{\partial\dot{w}_{kl}}\left(\gamma^{ij}\gamma^{ab} - \gamma^{ia}\gamma^{jb}\right) = a^2\frac{\partial\dot{w}_{ab}}{\partial\dot{w}_{kl}}\Pi^{ab} = \\
&= \sqrt{\gamma}K_{ij}a^2\frac{\partial\dot{w}_{ab}}{\partial\dot{w}_{kl}}\left(\gamma^{ij}\gamma^{ab} - \gamma^{ia}\gamma^{jb}\right) = -\sqrt{\gamma}K_{ij}\frac{\partial\dot{w}_{ab}}{\partial\dot{w}_{kl}}\left(\gamma^{ij}\frac{w^{ab}}{a^2} + \gamma^{ia}\gamma^{jb}\right)a^2 = \\
&= a^2\frac{\sqrt{\zeta}a^3}{2N}\frac{\partial\dot{w}_{ab}}{\partial\dot{w}_{kl}}\left(6\mathcal{H}\frac{w^{ab}}{a^2} + 2\mathcal{H}\gamma^{ab} + \frac{\dot{w}^{ab}}{a^2}\right) = a^2\frac{\sqrt{\zeta}a^3}{2N}\frac{\partial\dot{w}_{ab}}{\partial\dot{w}_{kl}}\left(6\mathcal{H}\frac{w^{ab}}{a^2} - 2\mathcal{H}w\frac{w^{ab}}{a^2} + \frac{\dot{w}^{ab}}{a^2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{\zeta}a^3}{N}\left(2\mathcal{H}w^{kl} + \frac{\dot{w}^{kl}}{2}\right) \\
&\therefore \frac{\partial\dot{w}_{ab}}{\partial\dot{w}_{kl}}\Pi^{ab} = \frac{P^{kl}_w}{a^2}
\end{aligned}
$$

Dos resultados acima mencionados, para primeira ordem de P^{kl}_w, encontramos que o traço de w_{ab} não varia com o tempo; P_a possui correções de segunda ordem nas perturbações tensoriais; e o momento canonicamente conjugado às perturbações, P^{ab}_w é da ordem de w_{ij}, e perpendicular à ζ_{ij}. Obtendo Π^{ij} em função da métrica maximalmente simétrica, da

perturbação e do fator de escala

$$\begin{aligned}
\Pi^{ij} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}}\frac{\partial \dot{a}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{w}_{kl}}\frac{\partial \dot{w}_{kl}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \\
\dot{\gamma}_{ij}\zeta^{ij} = 6a\dot{a} &\Rightarrow \frac{\partial \dot{a}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} = \frac{\zeta^{ij}}{6a} \\
\Rightarrow \frac{\partial \dot{\gamma}_{ab}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} &= 2\frac{\partial \dot{a}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}}\frac{\gamma_{ab}}{a} + a^2\frac{\partial \dot{w}_{ab}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} = \zeta^{ij}\frac{\gamma_{ab}}{3a^2} + a^2\frac{\partial \dot{w}_{ab}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \\
\therefore \frac{\partial \dot{w}_{ab}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} &= \frac{1}{a^2}\frac{\partial \dot{\gamma}_{ab}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} - \frac{\zeta^{ij}}{3a^2}\left(\zeta_{ab} + w_{ab}\right) \\
\Pi^{ij} &= \underbrace{P_a\frac{\zeta^{ij}a}{6a}}_{\text{Ordem 0}} + \underbrace{\frac{P_w^{ij}}{a^2}}_{\text{Ordem 1}} - \underbrace{\frac{P_w^{ab}w_{ab}\zeta^{ij}}{3a^2}}_{\text{Ordem 2}}
\end{aligned}$$

Conseguimos o momento Π em função da solução de Friedmann perturbada. Em seguida, aplicaremos esse resultado à hamiltoniana

$$\frac{\sqrt{\gamma}}{-N}\left[-N\sqrt{\gamma}K_{ij}K_{ab}\left(\gamma^{ij}\gamma^{ab} - \gamma^{ia}\gamma^{jb}\right)\right] = \Pi^{kl}\Pi^{cd}\left(\frac{\gamma_{kl}\gamma_{cd}}{2} - \gamma_{ck}\gamma_{dl}\right) = \frac{\left(\Pi^{kl}\gamma_{kl}\right)^2}{2} - \Pi^{kl}\Pi^{cd}\gamma_{ck}\gamma_{dl}$$

Podemos encontrar o termo acima em função das variáveis perturbadas, analisando cada ordem de perturbação dos seus termos individuais através da aplicação $\delta^{(n)}(f) = \frac{\delta^n f}{\delta\gamma_{a_1b_1}\cdots\delta\gamma_{a_nb_n}}a^{2n}(t)w_{a_1b_1}\cdots w_{a_nb_n}$, que representa a n-ésima ordem de perturbação da função f

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\Pi^{kl}\gamma_{kl}\right)^2}{2} &= \frac{a^2P_a^2}{8} \\
\delta^{(1)}\left(\Pi^{kl}\Pi^{cd}\gamma_{ck}\gamma_{dl}\right) &= 2\delta^{(1)}\left(\Pi^{kl}\right)\Pi^{cd}\gamma_{ck}\gamma_{dl} + \Pi^{kl}\Pi^{cd}\delta^{(1)}\left(\gamma_{ck}\gamma_{dl}\right) = 0 \\
\delta^{(2)}\left(\Pi^{kl}\Pi^{cd}\gamma_{ck}\gamma_{dl}\right) &= 2\delta^{(2)}\left(\Pi^{kl}\right)\Pi^{cd}\gamma_{ck}\gamma_{dl} + 2\delta^{(1)}\left(\Pi^{kl}\right)\delta^{(1)}\left(\Pi^{cd}\right)\gamma_{ck}\gamma_{dl} + \\
&\quad + 4\delta^{(1)}\left(\Pi^{kl}\right)\Pi^{cd}\delta^{(1)}\left(\gamma_{ck}\gamma_{dl}\right) + \Pi^{kl}\Pi^{cd}\delta^{(2)}\left(\gamma_{ck}\gamma_{dl}\right) = \\
&= -\frac{2P_w^{ab}w_{ab}a^4}{3a^2} + \frac{3a^2P_a}{6} + 2P_w^{ij}P_{wij} + \frac{8P_w^{ij}w_{ij}P_aa^4}{36a^3} + \frac{2P_a^2w_{ab}w^{ab}}{36a^2} = \\
&= \frac{2P_w^{ij}w_{ij}P_aa}{3} + 2P_w^{ij}P_{wij} + \frac{2P_a^2a^2w_{ab}w^{ab}}{36}\delta^{(0)}\left(\Pi^{kl}\Pi^{cd}\gamma_{ck}\gamma_{dl}\right) \\
&= \frac{P_a^2a^33}{36a^2} = \frac{P_a^2a^2}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi^{ij}\Pi_{ij} &= \delta^{(0)}\left(\Pi^{ij}\Pi_{ij}\right) + \frac{1}{2}\delta^{(2)}\left(\Pi^{ij}\Pi_{ij}\right) = \\
&= \frac{P_a^2a^2}{12} + \frac{P_w^{ij}w_{ij}P_aa}{3} + P_w^{ij}P_{wij} + \frac{P_a^2}{24}\frac{2w_{ab}w^{ab}}{3}
\end{aligned}$$

Perturbando o fator $\sqrt{\gamma}$

$$-N\sqrt{\gamma}K_{ij}K_{ab}\left(\gamma^{ij}\gamma^{ab}-\gamma^{ia}\gamma^{jb}\right)=-\frac{N}{\sqrt{\gamma}}\left[\frac{\left(\Pi^{kl}\gamma_{kl}\right)^2}{2}-\Pi^{kl}\Pi^{cd}\gamma_{ck}\gamma_{dl}\right]=$$
$$=-\frac{N}{\sqrt{\zeta}a^3}\left[\frac{P_a^2a^2}{24}\left(1-\frac{5w_{ab}w^{ab}}{12}\right)-\frac{P_w^{ij}w_{ij}P_aa}{3}-P_w^{ij}P_{wij}\right]$$

em que foi usado que as quantidades Π e w estão definidas sobre espaços métricos diferentes: $\Pi^a{}_b=\gamma_{bc}\Pi^{ac}$, enquanto $w^a{}_b=\zeta_{bc}w^{ac}$.

$$\delta^{(1)}\left[\frac{\sqrt{\gamma}}{-N}\left(-N\sqrt{\gamma}K_{ij}K_{ab}\left(\gamma^{ij}\gamma^{ab}-\gamma^{ia}\gamma^{jb}\right)\right)\right]=$$
$$=2\delta^{(1)}\left(\Pi^{kl}\right)\Pi^{cd}\left(\frac{\gamma_{kl}\gamma_{cd}}{2}-\gamma_{ck}\gamma_{dl}\right)+\Pi^{kl}\Pi^{cd}\delta^{(1)}\left(\frac{\gamma_{kl}\gamma_{cd}}{2}-\gamma_{ck}\gamma_{dl}\right)=0$$

em que a quantidade em primeira ordem é nula, pois é composta de traços da perturbação e de seu momento canonicamente conjugado.

$$\delta^{(2)}\left[\frac{\sqrt{\gamma}}{-N}\left(-N\sqrt{\gamma}K_{ij}K_{ab}\left(\gamma^{ij}\gamma^{ab}-\gamma^{ia}\gamma^{jb}\right)\right)\right]=$$
$$=2\delta^{(2)}\left(\Pi^{kl}\right)\Pi^{cd}\left(\frac{\gamma_{kl}\gamma_{cd}}{2}-\gamma_{ck}\gamma_{dl}\right)+2\delta^{(1)}\left(\Pi^{kl}\right)\delta^{(1)}\left(\Pi^{cd}\right)\left(\frac{\gamma_{kl}\gamma_{cd}}{2}-\gamma_{ck}\gamma_{dl}\right)+$$
$$+4\delta^{(1)}\left(\Pi^{kl}\right)\Pi^{cd}\delta^{(1)}\left(\frac{\gamma_{kl}\gamma_{cd}}{2}-\gamma_{ck}\gamma_{dl}\right)+\overbrace{\Pi^{kl}\Pi^{cd}\delta^{(2)}\left(\frac{\gamma_{kl}\gamma_{cd}}{2}-\gamma_{ck}\gamma_{dl}\right)}^{0}=$$
$$=2\left(-P_w^{ab}\frac{w_{ab}}{3a^2}\right)\left(\frac{P_a}{6a}\right)\frac{3a^4}{2}-2P_{wij}P_w^{ij}-8\left(\frac{P_w^{ij}}{a^2}\right)\left(\frac{P_a}{6a}\right)w_{kl}a^4$$
$$=-3\left(P_w^{ab}\frac{w_{ab}}{a^2}\right)\left(\frac{P_a}{2a}\right)a^4-2P_{wij}P_w^{ij}$$

E mais com

$$\left[\frac{\sqrt{\gamma}}{-N}\left(-N\sqrt{\gamma}K_{ij}K_{ab}\left(\gamma^{ij}\gamma^{ab}-\gamma^{ia}\gamma^{jb}\right)\right)\right]=\delta^{(0)}\left[\frac{\sqrt{\gamma}}{-N}\left(-N\sqrt{\gamma}K_{ij}K_{ab}\left(\gamma^{ij}\gamma^{ab}-\gamma^{ia}\gamma^{jb}\right)\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\delta^{(2)}\left[\frac{\sqrt{\gamma}}{-N}\left(-N\sqrt{\gamma}K_{ij}K_{ab}\left(\gamma^{ij}\gamma^{ab}-\gamma^{ia}\gamma^{jb}\right)\right)\right]=$$
$$=\frac{P_a^2}{24a^2}a^4-3\left(P_w^{ab}\frac{w_{ab}}{a^2}\right)\left(\frac{P_a}{4a}\right)a^4-P_{wij}P_w^{ij}$$
$$\therefore -N\sqrt{\gamma}K_{ij}K_{ab}\left(\gamma^{ij}\gamma^{ab}-\gamma^{ia}\gamma^{jb}\right)=-\frac{N}{\sqrt{\zeta}}\left[\frac{P_a^2}{24a}\left(1+\frac{w^{ab}w_{ab}}{4}\right)-3\left(P_w^{ab}\frac{w_{ab}}{a^2}\right)\left(\frac{P_a}{4}\right)-\frac{P_{wij}P_w^{ij}}{a^3}\right] \tag{B.1}$$

Obtemos a perturbação dos termos que possuem componentes de momentos. Agora perturbaremos o escalar de Ricci. Para facilitar os cálculos durante essa perturbação,

faremos a=1. Ao final, reobteremos a perturbação para o caso de Friedmann substituindo $R \to \frac{R}{a^2}$ e $\sqrt{\zeta} \to \sqrt{\zeta} a^3$

$$
\begin{aligned}
R^a_{bmv} &= \Gamma^a_{b[v,m]} + \Gamma^a_{e[m}\Gamma^e_{v]b} \\
R_{bv} &= \Gamma^a_{b[v,a]} + \Gamma^a_{e[a}\Gamma^e_{v]b} \\
{}^0R_{abmv} &= C\left(\zeta_{am}\zeta_{bv} - \zeta_{av}\zeta_{bm}\right) \\
{}^0R_{bv} &= 2C\zeta_{bv} \\
R_{bv} &= 0R_{bv} + \delta^{(1)}R_{bv} + \frac{\delta^{(2)}R_{bv}}{2} \\
\delta^{(1)}\Gamma^a_{bc} &= \frac{1}{2}\left(w^a_{b//c} + w^a_{c//b} - w^{//a}_{bc}\right) \\
\delta^{(1)}R_{bv} &= \left(\delta^{(1)}\Gamma^a_{b[v}\right)_{,a]} + \left(\delta^{(1)}\Gamma^e_{b[v}\right)\Gamma^a_{a]e} - \left(\delta^{(1)}\Gamma^a_{e[v}\right)\Gamma^e_{a]b} - \left(\delta^{(1)}\Gamma^a_{be}\right)\Gamma^e_{[av]} \qquad \text{onde} \qquad \Gamma^e_{[av]} = 0 \\
&= \left(\delta^{(1)}\Gamma^a_{b[v}\right)_{//a]} \\
\delta^{(2)}R_{bv} &= \left(\delta^{(2)}\Gamma^a_{b[v}\right)_{//a]} + 2\left(\delta^{(1)}\Gamma^e_{b[v}\right)\left(\delta^{(1)}\Gamma^a_{a]e}\right) \\
\delta^{(2)}R_{bv} &= \left(\delta^{(2)}\Gamma^a_{b[v}\right)_{//a]} + 2\left(\delta^{(1)}\Gamma^e_{b[v}\right)\left(\delta^{(1)}\Gamma^a_{a]e}\right) \\
R_{bv} &= 2C\zeta_{bv} + \left(\delta^{(1)}\Gamma^a_{b[v}\right)_{//a]} + \frac{1}{2}\left(\delta^{(2)}\Gamma^a_{b[v}\right)_{//a]} + \left(\delta^{(1)}\Gamma^e_{b[v}\right)\left(\delta^{(1)}\Gamma^a_{a]e}\right) \\
\gamma^{bv} &= \zeta^{bv} - w^{bv} + w^{bc}w^v_c
\end{aligned}
$$

onde foi usado que $\delta^{(1)}\Gamma^a_{bc}$ é um tensor, apesar de Γ^a_{bc} não ser.

$$
\begin{aligned}
&R = \\
&= 6C + 2Cw^{ab}w_{ab} - \left(\delta^{(1)}\Gamma^a_{b[v}\right)_{//a]}w^{bv} + \left(\delta^{(1)}\Gamma^e_{b[v}\right)\left(\delta^{(1)}\Gamma^a_{a]e}\right)\zeta^{bv} + \text{Divergências totais} \\
&= 6C + 2Cw^{ab}w_{ab} + \delta^{(1)}\Gamma^a_{bv}w^{bv}_{//a} - \left(\delta^{(1)}\Gamma^e_{ba}\right)\left(\delta^{(1)}\Gamma^a_{ve}\right)\zeta^{bv} + \text{Divergências totais}\ \left(\delta^{(1)}\Gamma^a_{ae} = 0\right) \\
&= 6C + 2Cw^{ab}w_{ab} + \left(\delta^{(1)}\Gamma^a_{bv}\right)\left(w^{bv}_{//a} - \delta^{(1)}\Gamma^v_{ea}\zeta^{be}\right) + \text{Divergências totais} \\
&= 6C + 2Cw^{ab}w_{ab} + \left(\delta^{(1)}\Gamma^a_{bv}\right)\left(w^{bv}_{//a} - \delta^{(1)}\Gamma^v_{ea}\zeta^{be}\right) + \text{Divergências totais} \\
&= 6C + 2Cw^{ab}w_{ab} + \frac{1}{2}\left(\delta^{(1)}\Gamma^a_{bv}\right)\left(2w^{bv}_{//a} - w^{vb}_{//a} - w^{v//b}_{a} + w^{b//v}_{a}\right) + \text{Divergências totais} \\
&= 6C + 2Cw^{ab}w_{ab} + \frac{1}{2}\left(\delta^{(1)}\Gamma^a_{bv}\right)w^{bv}_{//a} + \text{Divergências totais} \\
&= 6C + 2Cw^{ab}w_{ab} - \frac{1}{4}w^{ab//c}w_{ab//c} + \frac{1}{2}w^{ab//c}w_{ac//b} + \text{Divergências totais}
\end{aligned}
$$

Para as derivadas

$$\begin{aligned} w^{ab//c}w_{ac//b} &= \left(w^{ab//c}w_{ac}\right)_{//b} - w^{ab}_{//c//b}w^c_a = \\ &= \left(w^{ab//c}w_{ac}\right)_{//b} - w^c_a\left(R^a_{ebc}w^{eb} + R^b_{ebc}w^{ae}\right) = \\ &= \left(w^{ab//c}w_{ac}\right)_{//b} + w^c_a\left[\zeta^{ad}C\left(\zeta_{dc}\zeta_{eb} - \zeta_{db}\zeta_{ec}\right)w^{eb} - 2C\zeta_{ec}w^{ae}\right] = \\ &= \left(w^{ab//c}w_{ac}\right)_{//b} - 3Cw^c_a\zeta_{ec}w^{ae} = \left(w^{ab//c}w_{ac}\right)_{//b} - 3Cw_{ae}w^{ae} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \left(w^{ab}V_b\right)_{//[dc]} &= R^a_{ecd}w^{eb}V_b = \left(w^{ab}_{//[c}V_b + w^{ab}V_{b//[c}\right)_{d]} = w^{ab}_{//[cd]}V_b + w^{ab}_{//[c}V_{b//d]} + w^{ab}_{//[d}V_{b//c]} + w^a_bV^b_{//[cd]} \\ &= w^{ab}_{//[cd]}V_b + w^a_bR^b_{ecd}V^e = w^{ab}_{//[cd]}V_b - w^{ae}R^b_{ecd}V_b \\ &\therefore w^{ab}_{//[dc]} = w^{ae}R^b_{ecd} + R^a_{ecd}w^{eb} \end{aligned}$$

válida para qualquer vetor V_b. Portanto,

$$R = 6C + 2Cw^{ab}w_{ab} - \frac{1}{4}w^{ab//c}w_{ab//c} - \frac{3Cw^{ab}w_{ab}}{2} + \text{Divergências totais} \tag{B.2}$$

Então, retomando o fator a

$$R\sqrt{\gamma} = \sqrt{\zeta}a\left(6C - Cw^{ab}w_{ab} - \frac{1}{4}w^{ab//c}w_{ab//c} + \text{Divergências totais}\right) \tag{B.3}$$

em que

$$\sqrt{\gamma} = \sqrt{\zeta}\left(1 - \frac{w^{ab}w_{ab}}{4}\right)$$

Substituindo os termos do escalar de curvatura (B.3) e da curvatura intrínseca (B.1) na Hamiltoniana das seções espaciais(1.22), desconsiderando as divergências totais, a hamiltoniana das perturbações tensoriais é

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{6\ell_{\text{Pl}}}\int_{\Sigma_t} N\left[R + K_{ij}K_{ab}\left(\gamma^{ij}\gamma^{ab} - \gamma^{ia}\gamma^{jb}\right)\right]\sqrt{\gamma}dV = \\ \int_{\Sigma_t} N\left\{\left(6C + Cw^{ab}w_{ab} - \frac{w^{ab//c}w_{ab//c}}{4}\right)a\frac{\sqrt{\zeta}}{6\ell_{\text{Pl}}} + \right. \\ \left. + \frac{6\ell_{\text{Pl}}}{\sqrt{\zeta}}\left[\frac{P_a^2}{24a}\left(1 - \frac{5w_{ab}w^{ab}}{12}\right) - \frac{P^{ij}_w w_{ij}P_a}{3a^2} - \frac{P^{ij}_w P_{(w)ij}}{a^3}\right]\right\}dV \end{aligned}$$

gerando a equação (1.53).

APÊNDICE C – Condição de normalização na expanção de Fourier dos operadores de perturbação

No capítulo 2, foi desenvolvida a teoria das perturbações tensoriais quânticas $\hat{\mu}_{ab}$. Elas foram separadas em coeficientes de Fourier na equação (2.31), os quais dependiam dos operadores de criação e aniquilação $\hat{a}_k^{(\lambda)\dagger}$ e $\hat{a}_k^{\lambda}$, e dos coeficientes dependentes do tempo μ_k. Este apêndice tem como objetivo encontrar a relação (2.31) impondo a álgebra da equação (2.32) sobre os operadores de criação e aniquilação na relação de comutação de $\hat{\mu}_{ab}$ e seu momento canonicamente conjugado $\hat{\mu}'_{ab}$

$$\hat{\mu}'_{ij}(x,\eta) = \sum_{\lambda=+,X} \int \frac{dV_k}{(2\pi)^{3/2}} \epsilon_{ij}^{(\lambda)} \left[\mu_k'^{(\lambda)}(\eta) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} + \mu_k'^{*(\lambda)}(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)\dagger} \right] \tag{C.1}$$

Ao expandir a relação de comutação das variáveis conjugadas em coeficientes de Fourier

$$\begin{aligned}
[\hat{\mu}_{ij}(\eta,x), \hat{\mu}'_{ab}(\eta,\bar{x})] &= i\frac{1}{2}\left(\delta_i^a\delta_j^b + \delta_j^a\delta_i^b\right)\delta\left(x-\bar{x}\right) = \qquad (C.2)\\
&= \sum_{\lambda,\lambda'=+,X} \int\int \frac{dV_k dV_{k'}}{(2\pi)^3} \epsilon_{ij}^{(\lambda)} \epsilon^{(\lambda')ab} \left[\mu_k'^{(\lambda)}(\eta) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} + \right.\\
&\left. + \mu_k'^{*(\lambda)}(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)\dagger}, \mu_k'^{(\lambda)}(\eta) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} + \mu_k'^{*(\lambda)}(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)\dagger} \right] =\\
&= \sum_{\lambda,\lambda'=+,X} \int\int \frac{dV_k dV_{k'}}{(2\pi)^3} \epsilon_{ij}^{(\lambda)} \epsilon^{(\lambda')ab} \left[\mu_k \mu_{k'}'^{*} e^{-ik(x-x')} + \right.\\
&\left. - \mu_k' \mu_{k'}^{*} e^{ik(x-x')} \right] \delta^{\lambda\lambda'} \delta(k-k') =\\
&= \frac{1}{2}\left(\delta_i^a\delta_j^b + \delta_j^a\delta_i^b\right) \int \frac{dV_k}{(2\pi)^3} \left[\mu_k \mu_k'^{*} e^{-ik(x-x')} - \mu_k' \mu_k^{*} e^{ik(x-x')} \right] =\\
&= \frac{1}{2}\left(\delta_i^a\delta_j^b + \delta_j^a\delta_i^b\right) \delta(x-x') \left[\mu_k \mu_k'^{*} - \mu_k' \mu_k^{*}\right] \qquad (C.3)
\end{aligned}$$

Ao identificar (C.3) com (C.2), chegamos ao resultado esperado

$$\mu_k \mu_k'^{*} - \mu_k' \mu_k^{*} = i \tag{C.4}$$