Tese de Mestrado

Um Modelo de Eletromagnetismo Não-Linear com Quadruplete de Bósons Vetoriais

Washington Inácio de Souza Soares

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, Março de 2018

Agradecimentos

Gostaria de agradecer

- inicialmente a DEUS,
- a todos os meus familiares pelo carinho e apoio. Em especial, às minhas tias Somnia Glória e Celma Salete, ao meu irmão Ramiro José e ao meu padrinho Germano Inácio;
- ao Orientador, Prof. José Abdalla Helayël-Neto, pela confiança, postura humana e também pela disposição de nos ministrar tantos cursos;
- ao grande mestre, Prof. Renato Melchiades Doria, que me mostrou o caminho da Luz e sobre este caminho me guio até hoje;
- aos irmãos de minha vida: João Lúcio, Geórgia Truffa, Frederico Truffa, Loïc Olichon, Pedro Serpa, Caio César;
- Ao grande Mestre da Computação Algébrica, Edgardo Cheb-Terrab, que sem sua inestimável ajuda, muitos cálculos dessa tese ainda estariam sendo feitos à mão.
- aos demais colaboradores: Chauca, Jadna, Saulo;
- aos colegas do CBPF e a todo o pessoal da APG-CBPF;
- ao CBPF - através da COEDU e da COSMO, pela infraestrutura fornecida - e aos seus funcionários;
- à Quarks, em sua percepção mística da Natureza;
- ao CNPq, pelo inestimável apoio financeiro.

Resumo

Novas fronteiras eletromagnéticas estão sendo abertas. Recentemente, o LHC mediu a interação direta fóton-fóton [1]. Este resultado desafia um novo entendimento do efeito Breit-Wheeler [2],[3] e do espalhamento de Delbrück [4]. Indica que a QED pode ser substituída por um modelo eletromagnético que descreva estes espalhamentos a nível-árvore. Nesta temática, de forma alternativa à unificação eletrofraca $SU(2) \times U(1)$ [5] e a extensões não-lineares como Euler-Heisenberg [6] e Born-Infeld [7], propõe-se uma extensão não-linear Abeliana denominada Eletromagnetismo de Quatro Campos [8]. Introduz duas diferenças em relação ao Modelo Padrão. Primeiramente, a origem da massa está na própria energia do campo, e não na quebra espontânea de simetria realizada por um campo escalar. Por segundo, produz fótons auto-interagentes a nível-árvore.

A Dissertação expõe uma nova perspectiva para a teoria eletromagnética. Preservando os dois postulados de Maxwell - invariância da luz [9] e conservação da carga elétrica [10] - investiga sobre novas possibilidades, baseada na teoria geral da carga elétrica (conservação, interação, condução, transmissão). Estuda o transporte de carga elétrica $\triangle Q = 0, \pm 1$. Resulta, assim, um eletromagnetismo associado ao conjunto de cargas $\{+, 0, -\}$, intermediado por quatro bósons vetoriais $\{A_\mu, U_\mu, V_\mu^\pm\}$. A sua correspondente teoria de gauge é constituída através da simetria $U(1) \times SO(2)$. Um modelo renormalizável e unitário a nível-árvore [11].

Uma nova física eletromagnética é passível de ser investigada. As equações de Maxwell e a força de Lorentz são estendidas. Selecionamos, primeiramente, três derivações que vão além da formulação Maxwelliana: um EM que transcende à carga elétrica, um novo tipo

de transmissão de campos e um novo comportamento do fóton. Formula-se um modelo a ser investigado com mais profundidade. A sua maior particularidade está em ser um eletromagnetismo originado do fóton, e não pela exploração da carga elétrica.

O fóton primordial é obtido. Emerge baseado na trocas de cargas $\{+, 0, -\}$, mediada por um quadruplete de campos. Gerador de seu próprio campo eletromagnético, organizador do conjunto de campos, auto-interagente sem a presença da carga elétrica, torna-se promotor de um Big Bang Fotônico. A partir desta origem fotônica, partículas elementares e processos físicos podem ser gerados. Uma nova fenomenologia eletromagnética é, assim, aberta. Quatro regimes eletromagnéticos são propostos: EM sistêmico, fotônica, spintrônica e uma formulação eletrofraca.

Abstract

New electromagnetic edges may be found. LHC has recently measured the direct photon-photon interaction [1]. This challenges a new understanding of the Breit-Wheeler effect [2],[3] and the Delbrück scattering [4]. It may indicate that QED might be extended so as to incorporate this process already at tree-level. In this context, alternatively to the electroweak unification $SU(2) \times U(1)$ [5] and to non-linear electromagnetic extensions such as Euler-Heisenberg [6] and Born-Infeld [7], one may set up a nonlinear Abelian extension dubbed Four-Boson Electromagnetism [8]. It highlights two differences with respect to the the Standard Model. First, the mass origin relies on the field energy and not on the spontaneous breaking symmetry induced by a scalar field. Second, it describes tree-level self-interacting photons.

This Dissertation sets out to discuss a new perspective to electromagnetism. Preserving Maxwell's two postulates - light invariance [9] and electric charge conservation [10] - it inspects new possibillities based on the general theory of electric charge (conservation, interaction, conduction, transmission). The electromagnetic scenario presented here is associated with the set of $\{+, 0, -\}$ charges, intermediated by four vector bosons $\{A_\mu, U_\mu, V_\mu^\pm\}$. Its corresponding gauge theory is based on a $U(1) \times SO(2)$-symmetry, is renormalizable and unitary at tree-level [11].

A new electromagnetic model is ready to be investigated. Maxwell's equations and the Lorentz force are duly extended. We first select three ways besides Maxwellian approach: an electromagnetic component in addition to the electric charge, a new type of field

transmission and a new photonic behavior. Its major feature is the possibility that the photon, rather than electric charge, be the source of the electromagnetic interaction.

The primordial photon is re-obtained. It emerges from the process of $\{+, 0, -\}$ charge exchange mediated by four fields. Source of its own electromagnetic field, organizer of the set of fields, self-interacting in the absence of electric charges, it may induce a sort of photon-based Big Bang. Elementary particles and physical processes can be understood from the latter. A new eletromagnetic border is set up. Four electromagnetic regimes are proposed: a systemic one, photonics, spintronics, and a new eletroweak scenario.

Estabelecimento da Questão de Pesquisa

A Física de Interações Fundamentais de nossa época é regulada pelo Modelo-Padrão da Física de Partículas. As suas bases são a Teoria de Yang-Mills e o processo de quebra espontânea de simetria. Entretanto, os efeitos da unificação eletrofraca sobre a Eletrodinâmica Clássica e sobre a QED são muito fracos, considerados os limites de precisão dos cálculos teóricos e das medidas experimentais. Quando se levam em conta a Eletrodinâmica Muônica, os efeitos podem se tornar um pouco mais sensíveis. O fóton Maxwelliano e o fóton que emerge da Teoria Eletrofraca de Salam-Glashow-Weinberg resultam ser a mesma partícula; o cenário eletrofraco apenas promove uma interação indireta (via processos virtuais) com o bóson Z^0 e uma interação direta com o setor carregado, $W^{\pm}$.

Esta Dissertação propõe a busca de um eletromagnetismo estendido, um regime não-Maxwelliano alternativo. Preservando seus princípios básicos - invariância da luz e conservação da carga elétrica - abre seu caminho através da chamada teoria geral da carga elétrica e da simetria das diferenças. Na primeira, o aspecto físico é assegurado pela conservação, interação, condução, e transmissão da carga elétrica. Na segunda, por uma pluriformidade admitida pela própria simetria. Este trabalho concentra-se no processo de troca de carga. A sua leitura é a de que o transporte da carga elétrica constrói um sistema de três cargas $(+, 0, -)$ e quatro bósons vetoriais $(A_\mu, U_\mu, V_\mu^{\pm})$, a dinâmica destes sendo ditada por um modelo de gauge Abeliano e não-linear.

Um Eletromagnetismo de Quatro Campos é proposto. Encontra-se uma prerrogativa para se chegar além de Maxwell através do transporte de carga. Preservando as suas duas simetrias básicas, estende-se o eletromagnetismo para quatro novos regimes: sistêmico, fotônico, spintrônico e eletrofraco. Considerando que o modelo é renormalizável e unitário, uma nova fenomenologia eletromagnética está aberta e pode ser explorada.

O Eletromagnetismo de Quatro Campos é um modelo a ser estudado teoricamente e passível de ser testado experimentalmente nos próximos três anos. Entre eles, o espalhamento fóton-fóton, uma questão teórica aberta desde 1933. O LHC, o Colisor de Fótons

na Alemanha (Vacuum Hohlraum) e o LASER super-intenso de Shangai (SULF) estarão desenvolvendo testes experimentais sobre a proposta de fótons em auto-interação direta. Estamos diante de uma situação muito próxima do contexto em que se estabeleceu o efeito Compton em 1923. Principalmente, a respeito da interação $\gamma - \gamma$ independentemente da carga elétrica.

Em meio a um vasto espectro, atualmente (Abril de 2018) com 45 modelos eletromagnéticos não-Maxwellianos presentes na literatura, motivados por distintos fatores, que vão da Física de Partículas, passando pela Física da Matéria Condensada e chegando à Astrofísica, na presente Dissertação o nosso esforço maior consiste em propor uma Eletrodinâmica onde emergem 4 bósons vetoriais intermediários - dois neutros e dois eletricamente carregados - a partir de princípios de invariância básicos e da extensão máxima de uma simetria Abeliana.

Um Big Bang Fotônico é proposto a partir de um fóton primordial. A luz de passiva no EM de Maxwell passa a ser originária. A substituição do elétron pelo fóton como o principal condutor do eletromagnetismo é a mudança a acontecer. Uma nova perspectiva de engenharia e telecomunicação fotônica. Uma nova revolução industrial está em curso através da inovação fotônica.

Antes de passarmos ao corpo dessa Dissertação, é conveniente esclarecer que a nossa formulação não consiste na proposição de um simples modelo matemático. Temos uma proposta de natureza eminentemente física: a evidência de efeitos não-lineares no Eletromagnetismo é interpretada, neste trabalho, como a sugestão de que os fótons possam auto-interagir. E, sabendo que fótons medeiam a interação entre cargas e momentos magnéticos, adotamos o ponto-de-vista de que deva haver um par de fótons massivos e carregados, γ^+ e γ^-. Esta é a idéia que aqui desenvolvemos.

Sumário

1 Introdução **1**

1.1 Transporte de cargas 1

1.2 Lagrangiana Abeliana Não-Linear 8

2 Regime Não-Maxwelliano Sistêmico **17**

2.1 Equações Relativísticas Sistêmicas 17

2.1.1 Campo A_μ (fóton) 23

2.1.2 Campo U_μ (fóton massivo) 25

2.1.3 Campo V_μ^+ (fóton massivo carregado positivamente) 28

2.1.4 Campo V_μ^- (fóton massivo carregado negativamente) 30

2.1.5 Equação diretiva do fóton 34

2.2 Equações de Maxwell Globais na Forma Vetorial 40

2.2.1 Campo do fóton A_μ 42

2.2.2 Campo do fóton massivo-U_μ 43

2.2.3 Fóton carregado positivamente-V_μ^+ 43

2.2.4 Campo do fóton carregado negativamente-V_μ^- 44

2.2.5 Equações de Bianchi coletivas na Forma Vetorial 45

2.2.6 Equação do Fóton Diretivo na Forma Vetorial 46

2.3 Tensor Energia Momento 47

2.3.1 Energia 47

2.3.2 Vetor de Poynting 53

3 Fotônica **60**

3.1 Introdução 60

3.1.1 Propagadores 68

3.1.2 Análise de Power Counting 71

3.1.3 Gráficos primitivamente divergentes 75

4 Spintrônica de Spin-1 **78**

4.1 Introdução 78

4.2 Spin-$\frac{1}{2}$ 79

4.3 Spintrônica de Spin-1 83

4.3.1 Termos de Spin 85

4.4 Lagrangeana de Spin-1 e Spin-0 86

4.4.1 $\mathcal{L}_K^{\text{spin}\,A}$ 86

4.4.2 $\mathcal{L}_K^{\text{spin}\,S}$ 87

4.4.3 $\mathcal{L}_{GF}^{\text{spin}}$ 88

4.4.4 $\mathcal{L}_m^{\text{spin}}$ 89

4.4.5 $\mathcal{L}_3^{\text{spin}\,A}$ 90

4.4.6 $\mathcal{L}_3^{\text{spin}\,S}$ 91

4.4.7 $\mathcal{L}_4^{\text{spin}\,A}$ 94

4.4.8 $\mathcal{L}_4^{\text{spin}\,S}$ 95

4.4.9 Protótipo da Equação de Movimento 100

5 Cenário Eletrofraco **102**

5.1 $\mathrm{U_{em}}(1)$ bósons vetoriais 102

5.1.1 Lagrangeano de Bósons Vetoriais do Modelo Padrão 103

5.2 $\mathrm{U_{em}}(1)$ leptônico 107

6 Conclusões Críticas e Perspectivas **109**

6.1 Puxando o rabo do gato 109

6.2 Eletromagnetismo da Luz 114

A Lagrangiana N-Campos **122**

B Campos Coletivos **126**

C Força de Lorentz **129**

D Coeficientes da Lagrangeana **131**

E Regras de Feynman **137**

E.1 Três Campos Iguais 137

E.2 Dois Campos Iguais 138

E.3 Três Campos Diferentes 139

E.4 Quatro Campos Iguais 140

E.5 Três Campos Iguais e Um Diferente 141

E.6 Dois Campos Iguais 142

E.7 Dois Campos Iguais e Dois Diferentes 143

E.8 Quatro Campos Diferentes 144

Referências Bibliográficas **145**

Capítulo 1

Introdução

1.1 Transporte de cargas

O Eletromagnetismo aparece como uma teoria para a carga elétrica como a gravidade se relaciona com a massa. Desde a Antiguidade, através do âmbar e ímãs, a eletricidade e o magnetismo vêm sendo compreendidos a níveis cada vez mais complexos.

O verdadeiro desenvolvimento do Eletromagnetismo aconteceu a partir da revolução científica do Século XVI. Em 1600, William Gilbert publicou o livro 'De Magnete', a respeito de eletricidade e magnetismo, mostrando como gerar eletricidade com atrito e magnetismo com ímãs. Seguiu-se a criação de máquinas geradoras de carga elétrica por Otto von Guericke, em 1672. Já o Século XVIII foi marcado por avanços a respeito da identificação da carga elétrica. Em 1733, Charles du Fay define em 'vitreous' e 'resinous', a presença de duas formas de eletricidade, positiva e negativa, as quais se atraíam e se repeliam. Em 1745, o alemão Ewald Georg von Kleist inventou um capacitor simples que armazenava carga elétrica; na mesma época, o holandês Pieter van Musschenbroek criou a garrafa de Leyden. Em 1747, Benjamin Franklin provou que raios atmosféricos eram correntes elétricas e introduziu o termo carga elétrica. Em 1780, Galvani percebeu a bio-eletricidade em seres vivos. Em 1785, Coulomb determina a força entre duas cargas como dependente do inverso do quadrado da distância. Em 1799, Volta estabeleceu a corrente elétrica em laboratório através da pilha. Surgia a compreensão de fluxo eletromagnético

a partir da carga elétrica. O fluxo de eletricidade que brota da pilha é análogo à água que flui em um córrego.

– Qual a física da carga elétrica? - se perguntava.

Ao Século XIX, coube entender sobre este movimento de cargas positivas e negativas. As leis de Gauss (1813), Ørsted (1819), Biot-Savart (1820), Ampère (1827), Ohm (1827), Faraday (1831) levaram ao estabelecimento do conceito de campos eletromagnéticos. Mais tarde, entre 1860-65, Maxwell sistematizou que o fluxo eletromagnético deveria ser descrito através de campos eletromagnéticos [12]. Maxwell apresentou suas equações na Royal Society no dia 8 de dezembro de 1864. Previu teoricamente a onda eletromagnética, $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$, a qual foi detectada em 1888 por Hertz [13]. As suas equações revelaram dois princípios experimentais: a invariância da velocidade da luz e a conservação da carga elétrica. Um novo tempo era chegado. A noção de campo se iniciava, a relatividade antecipava a sua presença antes do lançamento da Teoria da Relatividade Especial, e eletricidade, magnetismo e ótica eram unificados.

– A física da carga elétrica é a física dos campos eletromagnéticos - Maxwell respondia.

Ao Século XX, coube compreender mais detalhadamente sobre a carga elétrica. Primeiramente, descobriu-se a corrente elétrica como um fluxo de elétrons. A seguir, medido por Millikan em 1913 [14], o valor da carga elétrica fundamental, $e = 1,6.10^{-19}C$, tornou-se candidato a uma constante universal do fenômeno eletromagnético. A confirmação veio quando o elétron (1897) e o próton (1919) mostraram que, apesar de serem partículas muito distintas, compartilham o mesmo valor de carga elétrica. O eletromagnetismo revelava-se sendo uma interação portadora de uma constante universal. Em 1931, este valor universal de carga elétrica foi o ponto de partida para a previsão teórica da antimatéria, feita por Dirac [15] e detectada em 1932 por Anderson [16].

– Quem são os possíveis portadores da carga elétrica? Seriam apenas os elétrons? - perguntou o Século XX.

O próximo passo consistiria em desenvolver um eletromagnetismo além de sua repercussão no mundo macroscópico. Novos aspectos eletromagnéticos apareceriam nos anos 1920-40. O desenvolvimento da Física de Partículas Elementares trazia novos aspectos ao entendimento microscópico da carga elétrica. Novas características seriam observadas. Partículas de spin-$\frac{1}{2}$, spin-0, spin-1 aparecem como novos portadores de carga elétrica. Num eletromagnetismo além de Maxwell, estas partículas carregadas foram estudadas através das equações de Klein Gordon [17], Dirac [18] e da decomposição de Gordon [19]. Nos anos 1940, o programa de renormalização da QED foi realizado [20]. Em anos consecutivos, desde Schwinger 1940 [21] a Lee-Yang, Salam e outros, nos anos 1960 [22]-[31], até Schroer recentemente [32], as interações de spin-1, entre o fóton e bósons vetoriais carregados, foram estudadas através de novos modelos. Nos anos '60, este contexto funcionou como base para a unificação eletrofraca [5] através do mecanismo de Higgs [33]. A Teoria Unificada Eletrofraca foi a primeira construção física que mostrou como o fóton interage de forma consistente com bósons vetoriais carregados, sendo, para isto, necessária a presença de um outro bóson vetorial neutro, o bóson Z^0, e a introdução de um processo de geração de massa para os bósons carregados.

A Teoria Eletrofraca representa, atualmente, o modelo base de extensão do Eletromagnetismo. Mostra a existência de acoplamentos não-mínimos Abelianos (mas, mínimos do ponto de vista de Yang-Mills) e a modulação da carga elétrica através de parametrizações do tipo $e = g \sin\theta$. Entretanto, ressaltam-se três visíveis resultados experimentais ausentes na atual formulação eletromagnética. Inicialmente, os efeitos Bohm-Aharanov [34] e Aharanov-Casher [35] estão mostrando que campos potenciais não são subsidiários. O segundo, diz respeito a um eletromagnetismo não-linear observado na matéria condensada [36], plasma [37] e na cosmologia [38]. Terceiro, não se desenvolveu uma origem a partir dos primeiros princípios a respeito dos vetores de polarização e magnetização [39].

Neste cenário, provavelmente exista algo mais primitivo além de Maxwell, QED, e Eletrofraca a ser investigado. Uma difícil tarefa, dado que a QED é uma teoria de precisão de até 12 ordens experimentais, $\mu_e = 0.00115965218137$ [40]. No entanto, apesar deste

acordo tão forte entre teoria e experimento, a uma nova era começa ao se descobrir que o elétron tem momento de dipolo elétrico, observados em uma escala de comprimento na faixa dos 10^{-29} cm [41]. A perspectiva desta Dissertação é a de que, embora sua lei de conservação seja universal, a carga elétrica não necessita ser uma constante universal a regular os processos eletromagnéticos. Talvez, se possa modular a carga elétrica e incorporar ao eletromagnetismo outras constantes de acoplamento além da constante de estrutura fina [42]. A interação fraca abre novos canais onde a carga elétrica não mais se apresenta como uma grandeza genuinamente fundamental, mas compreendida a partir de constantes primordiais (a constante de acoplamento de gauge associada ao isospin fraco e o ângulo de Weinberg). O novo esperado está na possibilidade de um eletromagnetismo neutro de partículas neutras. O fóton não precisa estar estritamente associado à carga elétrica.

– Como encontrar uma física da carga elétrica além da QED?

Neste desafio, a despeito do enorme sucesso do atual modelo eletromagnético, um passo adiante deve ser dado. Descobrir novos setores eletromagnéticos, mas preservando as simetrias de Maxwell. Como realizar esta tarefa? Um guia para descobrir novas regiões eletromagnéticas é seguir o fluxo eletromagnético. Entender sua rota de migração. A nossa Dissertação trabalha o transporte de carga. Enquanto o Século XIX entendeu o eletromagnetismo macroscopicamente apenas em termos de cargas e ímãs, o Século XX adicionou novos ingredientes em processos envolvendo a carga elétrica. Incorporou transmissões microscópicas de carga através de partículas elementares. Além do $\Delta Q = 0$ da QED, um novo regime aparece, $|\Delta Q| = 1$, o qual foi associado por Fermi na sua proposição da interação nuclear fraca [43]. O nosso presente trabalho inverte, contudo, este ponto de vista. Em vez de ser adotada como uma nova interação (a interação fraca), propomos que esta transferência de carga esteja indicando uma nova fronteira além do regime Maxwelliano. Uma nova escala do eletromagnetismo a ser conhecida.

– Interação ou escala?

Nesta perspectiva, em vez de uma nova interação, a Dissertação procura uma nova escala para o eletromagnetismo em intensidade e alcance. Efeitos físicos dependem das quantidades de energia envolvidas nos processos. As leis de Newton não são válidas para o periélio de Mercúrio (proximidade do Sol) ou para os buracos negros, mas, nem por isto, a gravitação é outra. Simplesmente, estamos tratando a mesma interação em escalas muito distintas uma da outra. No caso do eletromagnetismo, a reação $K^- + p \longrightarrow K^- + p$ (interação EM), a partir de 3 GeV, torna-se $K^- + p \longrightarrow \Omega + K + p$ (interação forte), a qual nos leva a interpretar sobre uma nova região inerente ao eletromagnetismo. Quando as simetrias originais são preservadas, falar de escalas é mais apropriado do que falar de interações.

A Dissertação prossegue nas linhas da física geral da carga elétrica. Entende o seu comportamento através das seguintes etapas: conservação, interação, condução, transmissão. Enquanto Maxwell concentrou-se na conservação da carga através da corrente de deslocamento, a interação e a condução corresponderam a todo um desenvolvimento do eletromagnetismo até o Século XX; curiosamente, a Física não atribuiu uma visão eletromagnética para os processos $|\Delta Q| = 1$. Associou-os à interação fraca e prosseguiu. Não considerou o processo da transmissão como um efeito geral para partículas com diferentes spins e sabores.

– A Física se esqueceu de uma física mais geral para a carga elétrica? - cabe a pergunta aqui.

Existe uma física geral das cargas elétricas a ser compreendida. Apresentando e utilizando dados de mais de 300 partículas fundamentais e, sobretudo, compostas, o livro do Particle Data Group (PDG) descreve processos envolvendo conservação, interação, condução e transmissão da carga elétrica. Mostra a presença de um transporte de carga elétrica além de Maxwell e da QED. Há uma ampliação do fluxo eletromagnético devido à troca de cargas, a dizer que, seguindo o comportamento da carga elétrica, o Eletromagnetismo não deveria estar limitado a uma interação mediada somente pelo fóton. Outros

portadores de spin-1 deveriam entrar no painel eletromagnético. Reações experimentadas por partículas compostas de quarks como $\rho(u,d), \omega(u,d), \phi(s,\bar{s}), J/\psi(c,\bar{c}), Y(b,\bar{b})$, originam trocas de cargas como o diagrama abaixo:

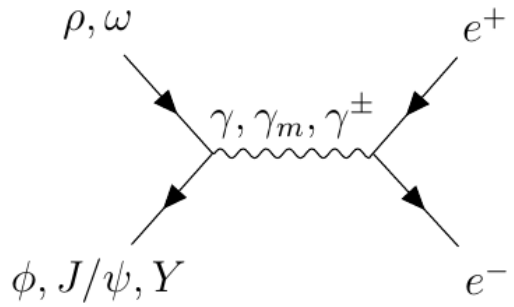


Figura 1.1: Troca de cargas por Quatro tipos de Fótons

Neste cenário, a presente Dissertação encontra sua resposta à indagação a respeito da física da carga elétrica. Seguindo o fluxo da carga- conservação, interação, condução, transmissão - entende que o além-da-QED está em entender a transmissão da carga elétrica através de um Eletromagnetismo de Quatro Campos [8]. Existe um eletromagnetismo cuja consistência física ainda está a ser explorada. Entendemos que a troca $|\Delta Q| = 0, 1$ introduz uma percepção sistêmica da carga elétrica. Uma nova configuração do fenômeno eletromagnético é desenvolvida, baseada no transporte do conjunto de cargas $\{+, 0, -\}$ transformando-se mutuamente (mudança de sabor) da troca de quatro bósons de gauge.

Estruturalmente, a carga é ampliada da visão reducionista à anti-reducionista. Primeiramente, ao promover a presença de três cargas $\{+, 0, -\}$ que se auto-criam entre si; por segundo, ao introduzir quatro bósons interdependentes responsáveis pela intermediação destas três cargas. Nesta compreensão, o eletromagnetismo é estendido da intermediação do fóton para um conjunto de campos $A_{\mu I}$. Da visão do Século XIX de cargas positivas e negativas, emerge a percepção de um EM construído por três cargas interligadas através de 4 bósons vetoriais.

O transporte da carga elétrica introduz um comportamento da carga elétrica não contemplado na descrição Maxwelliana. Isto estimula o surgimento de um Eletromagnetismo

de Quatro Bósons, onde quatro bósons de gauge são necessários à transmissão da carga elétrica. Nesta perspectiva, o fenômeno eletromagnético é redefinido por uma associação de campos $A_{\mu I} = \{A_\mu, U_\mu, V_\mu^\pm\}$. Juntos constituem a física da carga elétrica a ser estudada, onde A_μ significa o campo usual do fóton, U_μ um fóton massivo, e $V_\mu^\pm$ campos de fótons carregados. No caso genérico, campos quaisquer responsáveis pela troca de carga; no caso da quebra da paridade, poderão ser identificados com os mediadores Z_μ e $W_\mu^\pm$.

Estes quatro campos entrelaçados produzem uma nova dinâmica eletromagnética a ser entendida [46]. Há uma nova energia eletromagnética originada da física do transporte de carga. Um novo caminho eletromagnético é aberto a partir da representação do Grupo de Lorentz $A_{\mu I} \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, podendo-se derivar setores eletromagnéticos de spin-1 e spin-0 [47]. Introduz-se a simetria de gauge Abeliana $U(1) \times SO(2)$, a qual mantém a conservação da carga elétrica através do Teorema de Noether. A visão Maxwelliana restrita a $F_{\mu\nu}$ é estendida e novos tensores de intensidade de campo com dinâmicas interdependentes são produzidos [48]. Seis características emergem. A natureza física dos campos potenciais se torna explícita; é obtida uma origem para os vetores de polarização e magnetização a partir da simetria de gauge [49]; é proposta uma não-linearidade Abeliana para a teoria eletromagnética; introduz-se massa sem o processo envolvendo o campo de Higgs [50]; aparece uma diversidade de constantes de acoplamento além da constante de estrutura fina [51]; novos regimes eletromagnéticos são obtidos como a fotônica, spintrônican e o cenário eletrofraco.

Podemos salientar que esta perspectiva eletromagnética baseada na troca de cargas já poderia ter sido proposta em 1938. Durante a famosa Conferência de Varsóvia - New Theories in Physics - seria mais razoável para Oscar Klein explorar a troca de carga ao invés de propor uma espécie de Teoria de Tudo [44]. Naquele tempo, o mundo das partículas era composto por apenas 9 delas $(e^-, p, \gamma, n, e^+, \nu, \pi^+, \pi^0, \pi^-)$. Baseado na então-conhecida teoria quântica de campos, cuja formulação de criação e aniquilação de partículas permite a possibilidade de propor um modelo de campos com partículas se transformando entre si [45], seria razoável propor a Eletrodinâmica a partir da tríade

de cargas mutantes $\{+, 0, -\}$. Uma linha de pesquisa baseada na troca de carga seria também viável, talvez tão viável quanto desenvolver um esquema de unificação para as forças eletromagnética, fraca, forte e gravitacional.

A proposta da Dissertação está em investigar uma nova hipótese eletromagnética. A primeira fase acontecida foi a do âmbar e ímãs, a segunda da carga elétrica, a próxima será do Eletromagnetismo da Luz. A sua presença se faz por um fóton originário. Resumindo, observarmos que, ao longo do Século XVIII, o eletromagnetismo foi marcado com a criação da corrente elétrica; no Século XIX, através de campos eletromagnéticos; no Século XX, com a carga elétrica conduzida microscopicamente por diferentes spins e sabores. Neste processo, o Século XXI já desenvolveu 45 modelos alternativos [52]. O modelo discutido nesta Dissertação baseia-se nos seguintes três elementos: troca de cargas, Grupo de Lorentz com família de campos e simetria das diferenças. A partir destes elementos, iremos desenvolver uma Lagrangeana Abeliana Não-Linear. O seu desafio estará em propor conceitos e equações capazes de apoiar a hipótese da luz na origem do fenômeno eletromagnético.

1.2 Lagrangiana Abeliana Não-Linear

Um modelo de campos deve iniciar pela apresentação de seu funcional de ação clássica. Três são os fundamentos da proposta do Eletromagnetismo de Quatro Campos. A troca de cargas $\triangle Q = 0, \pm 1$, a interpretação do Grupo de Lorentz introduzindo famílias de campos e a simetria das diferenças. A partir destas interpretações construímos a formulação a seguir.

Desta forma, a percepção da troca de carga nos leva a estudar o modelo de Eletrodinâmica baseado em quatro bósons de gauge. A questão está na escolha do grupo de simetria. Existem duas possibilidades. A primeira, seguir a doutrina da simetria ditada por Yang-Mills, a qual associa o número de campos ao número de geradores do grupo; sendo assim, tomando $SU(2) \times U(1)$ teríamos os quatro campos desejados. Numa segunda, a possibilidade está em seguir a chamada simetria das diferenças; a sua concepção

é a de que diferentes campos podem estar associados a um mesmo parâmetro de gauge [53].

O caminho escolhido aqui consiste em estudar a troca de carga através de quatro mensageiros $A_{\mu I} = \{A_\mu, U_\mu, V_\mu^\pm\}$; este é o ponto de vista da simetria das diferenças: combinar a diversidade de quanta com a relatividade através de um grupo de simetria comum. Então, considerando a carga elétrica como conjunto de três cargas $\big(+, 0, -\big)$, intercambiando-se entre si, interpreta-se seus campos mensageiros como interligados através da seguinte simetria de gauge Abeliana $U(1) \times SO(2)$ [8]:

$$\begin{aligned} A_\mu^{'} &= A_\mu + k_1 \partial_\mu \alpha, \\ U_\mu^{'} &= U_\mu + k_2 \partial_\mu \alpha, \\ V_\mu^{+\,'} &= e^{iq\alpha}\, V_\mu^{+} + k_+ \partial_\mu \alpha, \\ V_\mu^{-\,'} &= e^{-iq\alpha}\, V_\mu^{-} + k_- \partial_\mu \alpha. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Eq(1.1) produz uma Lagrangeana Abeliana não-linear baseada na invariância da luz e na conservação da carga elétrica:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_K + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_I \tag{1.2}$$

onde o termo cinético,

$$\mathcal{L}_K = \mathcal{L}_K^A + \mathcal{L}_K^S \tag{1.3}$$

é dado por

$$\mathcal{L}_K^A = a_1 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + a_2 U_{\mu\nu} U^{\mu\nu} + 2a_3 V_{\mu\nu}^{+} V^{\mu\nu -}, \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_K^S = {} & b_{(11)} S_{\mu\nu}^{1} S^{\mu\nu 1} + b_{(22)} S_{\mu\nu}^{2} S^{\mu\nu 2} \\ & + 2b_{(33)} S_{\mu\nu}^{+} S^{\mu\nu -} + c_{(11)} S_\mu^{\mu 1} S_\nu^{\nu 1} + c_{(22)} S_\mu^{\mu 2} S_\nu^{\nu 2} \\ & + 2c_{(12)} S_\mu^{\mu 1} S_\nu^{\nu 2} + 2c_{(33)} S_\mu^{\mu +} S_\nu^{\nu -}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

com a seguintes definições para os tensores intensidade de campo granulares

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \qquad U_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu, \qquad V^{\pm}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu V^{\pm}_\nu - \partial_\nu V^{\pm}_\mu,$$
$$S^1_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu, \qquad S^2_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu U_\nu + \partial_\nu U_\mu, \qquad S^{\pm}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu V^{\pm}_\nu + \partial_\nu V^{\pm}_\mu. \quad (1.6)$$

Os apêndices A-C relatam a respeito desses novos campos e a invariância de gauge da eq.(1.2).

O termo de gauge-fixing associado a esta transformação Abeliana de conjunto de campos é expressa, no gauge de Lorentz, tal como abaixo

$$\mathcal{L}_{GF} = \frac{1}{4}\xi_{(11)} S^{\mu 1}_{\mu} S^{\nu 1}_{\nu} + \frac{1}{4}\xi_{(22)} S^{\mu 2}_{\mu} S^{\nu 2}_{\nu} + \frac{1}{2}\xi_{(12)} S^{\mu 1}_{\mu} S^{\nu 2}_{\nu} + \frac{1}{2}\xi_{(33)} S^{\mu +}_{\mu} S^{\nu -}_{\nu}. \quad (1.7)$$

O termo de gauge-fixing denota uma equação relacionando os quatro campos potenciais. A dizer que não estão inteiramente independentes entre si. Contudo, diferentemente do caso usual, não impõe que um determinado grau de liberdade seja necessariamente suprimido.

O termo de massa lê-se como segue abaixo

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2}\mu_U^2 U_\mu U^\mu - \mu_V^2 V^+_\mu V^{\mu -} \quad (1.8)$$

Eq. (1.8) não requer a quebra espontânea da simetria. A inclusão de massa é devida à simetria das diferenças e sua noção de pluriformidade. Observe que, embora cada termo não seja individualmente invariante de gauge sob a transformação da eq.(1.1), a invariância de gauge do termo $\mathcal{L}_m$ é obtida como um todo. A expressão $m_{ij} X^i_\mu X^{j\,\mu}$, escrita no Apêndice A, explicita esta relação.

A Lagrangeana de interação Abeliana é decomposta em um termo trilinear e um outro quadrilinear:

$$\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 \quad (1.9)$$

Estudando a Lagrangeana trilinear em seus correspondentes setores antissimétrico, simétrico e semi-topológico, temos

$$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_3^A + \mathcal{L}_3^S + \mathcal{L}_3^{st} \tag{1.10}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_3^A = {} & 4b_1 F_{\mu\nu}\ {}^{[12]}z^{[\mu\nu]} + 4b_2 U_{\mu\nu}\ {}^{[12]}z^{[\mu\nu]} + 4b_1 F_{\mu\nu}\ {}^{[+-]}z^{[\mu\nu]} + 4b_2 U_{\mu\nu}\ {}^{[+-]}z^{[\mu\nu]} + 4\beta_1 F_{\mu\nu}\ {}^{(+-)}z^{[\mu\nu]} + \\ & + 4\beta_2 U_{\mu\nu}\ {}^{(+-)}z^{[\mu\nu]} + 4b_3 V_{\mu\nu}^{+}\ {}^{[-1]}z^{[\mu\nu]} + 4b_3 V_{\mu\nu}^{+}\ {}^{[-2]}z^{[\mu\nu]} + 4b_3 V_{\mu\nu}^{-}\ {}^{[+1]}z^{[\mu\nu]} + 4b_3 V_{\mu\nu}^{-}\ {}^{[+2]}z^{[\mu\nu]},\end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_3^S = {} & 2\beta_1 S_{\mu\nu}^{1}\ {}^{(11)}z^{\mu\nu} + 4\beta_1 S_{\mu\nu}^{1}\ {}^{(12)}z^{\mu\nu} + 2\beta_1 S_{\mu\nu}^{1}\ {}^{(22)}z^{\mu\nu} + 4\beta_1 S_{\mu\nu}^{1}\ {}^{+-3}z^{\mu\nu} + \\ & + 2\beta_2 S_{\mu\nu}^{2}\ {}^{(11)}z^{\mu\nu} + 4\beta_2 S_{\mu\nu}^{2}\ {}^{(12)}z^{\mu\nu} + 2\beta_2 S_{\mu\nu}^{2}\ {}^{(22)}z^{\mu\nu} + 4\beta_2 S_{\mu\nu}^{2}\ {}^{+-3}z^{\mu\nu} + \\ & + 4\beta_3 S_{\mu\nu}^{+}\ {}^{(-1)}z^{\mu\nu} + 4\beta_3 S_{\mu\nu}^{+}\ {}^{(-2)}z^{\mu\nu} + 4\beta_3 S_{\mu\nu}^{-}\ {}^{(+1)}z^{\mu\nu} + 4\beta_3 S_{\mu\nu}^{-}\ {}^{(+2)}z^{\mu\nu} + \\ & + 2\rho_1 S_{\mu}^{\mu 1}\ {}^{(11)}z_{\nu}^{\ \nu} + 4\rho_1 S_{\mu}^{\mu 1}\ {}^{(12)}z_{\nu}^{\ \nu} + 2\rho_1 S_{\mu}^{\mu 1}\ {}^{(22)}z_{\nu}^{\ \nu} + 4\rho_1 S_{\mu}^{\mu 1}\ {}^{+-3}z_{\nu}^{\ \nu} + \\ & + 2\big(\beta_1 + 4\rho_1\big) S_{\mu}^{\mu 1}\ {}^{(11)}\omega_{\nu}^{\ \nu} + 4\big(\beta_1 + 4\rho_1\big) S_{\mu}^{\mu 1}\ {}^{(12)}\omega_{\nu}^{\ \nu} + 2\big(\beta_1 + 4\rho_1\big) S_{\mu}^{\mu 1}\ {}^{(22)}\omega_{\nu}^{\ \nu} + \\ & + 4\big(\beta_1 + 4\rho_1\big) S_{\mu}^{\mu 1}\ {}^{+-3}\omega_{\nu}^{\ \nu} + 2\rho_2 S_{\mu}^{\mu 2}\ {}^{(11)}z_{\nu}^{\ \nu} + 4\rho_2 S_{\mu}^{\mu 2}\ {}^{(12)}z_{\nu}^{\ \nu} + 2\rho_2 S_{\mu}^{\mu 2}\ {}^{(22)}z_{\nu}^{\ \nu} + \\ & + 4\rho_2 S_{\mu}^{\mu 2}\ {}^{+-3}z_{\nu}^{\ \nu} + + 2\big(\beta_2 + 4\rho_2\big) S_{\mu}^{\mu 2}\ {}^{(11)}\omega_{\nu}^{\ \nu} + 4\big(\beta_2 + 4\rho_2\big) S_{\mu}^{\mu 2}\ {}^{(12)}\omega_{\nu}^{\ \nu} + \\ & + 2\big(\beta_2 + 4\rho_2\big) S_{\mu}^{\mu 2}\ {}^{(22)}\omega_{\nu}^{\ \nu} + 4\big(\beta_2 + 4\rho_2\big) S_{\mu}^{\mu 2}\ {}^{+-3}\omega_{\nu}^{\ \nu} + 4\big(\beta_3 + 4\rho_3\big) S_{\mu}^{\mu +}\ {}^{(-1)}\omega_{\nu}^{\ \nu} + \\ & + 4\big(\beta_3 + 4\rho_3\big) S_{\mu}^{\mu +}\ {}^{(-2)}\omega_{\nu}^{\ \nu} + + 4\rho_3 S_{\mu}^{\mu +}\ {}^{(-1)}z_{\nu}^{\ \nu} + 4\rho_3 S_{\mu}^{\mu +}\ {}^{(-2)}z_{\nu}^{\ \nu} + 4\rho_3 S_{\mu}^{\mu -}\ {}^{(+2)}z_{\nu}^{\ \nu} + \\ & + 4\big(\beta_3 + 4\rho_3\big) S_{\mu}^{\mu -}\ {}^{(+1)}\omega_{\nu}^{\ \nu} + 4\big(\beta_3 + 4\rho_3\big) S_{\mu}^{\mu -}\ {}^{(+2)}\omega_{\nu}^{\ \nu} + 4\rho_3 S_{\mu}^{\mu -}\ {}^{(+1)}z_{\nu}^{\ \nu}\end{aligned} \tag{1.12}$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_3^{st} = {} & \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Big\{2(\alpha_0 A_\mu + \alpha_1 U_\mu)[i(V_\nu^{+} V_{\rho\sigma}^{-} - V_\nu^{-} V_{\rho\sigma}^{+})] + (\alpha_0 A_{\rho\sigma} + \alpha_1 U_{\rho\sigma})[i({}^{[+-]}z_{\mu\nu} + {}^{[-+]}z_{\mu\nu})] \\ & + 4\ {}^{[12]}z_{\mu\nu}\ (\alpha_0 A_{\rho\sigma} + \alpha_1 U_{\rho\sigma})\Big\}.\end{aligned} \tag{1.13}$$

Similarmente, o termo quadrilinear é dado por

$$\mathcal{L}_4 = \mathcal{L}_4^A + \mathcal{L}_4^S + \mathcal{L}_4^{st} \tag{1.14}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_4^A = {} & 2\,{}^{[12]}_{[\mu\nu]}z\,{}^{[12]}_{[\mu\nu]}z + 2\,{}^{[12]}_{[\mu\nu]}z\,{}^{[21]}_{[\mu\nu]}z + 4\,{}^{[13+]}_{[\mu\nu]}z\,{}^{[13-]}_{[\mu\nu]}z + \\
& + 4\,{}^{[23+]}_{[\mu\nu]}z\,{}^{[23-]}_{[\mu\nu]}z + 8\,{}^{[13+]}_{[\mu\nu]}z\,{}^{[23-]}_{[\mu\nu]}z + 8\,{}^{[12]}_{[\mu\nu]}z\,{}^{[+-]}_{[\mu\nu]}z + \\
& - 8\,{}^{(12)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(12)}_{[\mu\nu]}\omega - 16\,{}^{(12)}_{[\mu\nu]}\omega\,{}^{(12)}_{[\mu\nu]}\omega + 4\,{}^{(13+)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(13-)}_{[\mu\nu]}z + \\
& + 4\,{}^{(23+)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(23-)}_{[\mu\nu]}z + 8\,{}^{(13+)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(23-)}_{[\mu\nu]}z - 16\,{}^{(+-)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(+-)}_{[\mu\nu]}\omega + \\
& - 32\,{}^{(+-)}_{[\mu\nu]}\omega\,{}^{(+-)}_{[\mu\nu]}\omega - 4i\,{}^{(13+)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(24-)}_{[\mu\nu]}\omega + 4i\,{}^{(13-)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(24+)}_{[\mu\nu]}\omega + \\
& - 4i\,{}^{(23+)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(14-)}_{[\mu\nu]}\omega + 4i\,{}^{(23-)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(14+)}_{[\mu\nu]}\omega - 16i\,{}^{(13+)}_{[\mu\nu]}\omega\,{}^{(24-)}_{[\mu\nu]}\omega + \\
& + 16i\,{}^{(13-)}_{[\mu\nu]}\omega\,{}^{(24+)}_{[\mu\nu]}\omega - 2i\,{}^{(14+)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(23-)}_{[\mu\nu]}z + 2i\,{}^{(14-)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(23+)}_{[\mu\nu]}z + \\
& + 16i\,{}^{(14+)}_{[\mu\nu]}\omega\,{}^{(23-)}_{[\mu\nu]}\omega - 16i\,{}^{(14-)}_{[\mu\nu]}\omega\,{}^{(23+)}_{[\mu\nu]}\omega + 2i\,{}^{(13+)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(24-)}_{[\mu\nu]}z + \\
& - 2i\,{}^{(13-)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(24+)}_{[\mu\nu]}z + 4i\,{}^{(14+)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(23-)}_{[\mu\nu]}\omega - 4i\,{}^{(14-)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(23+)}_{[\mu\nu]}\omega + \\
& + 4i\,{}^{(24+)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(13-)}_{[\mu\nu]}\omega - 4i\,{}^{(24-)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(13+)}_{[\mu\nu]}\omega \quad ,
\end{aligned} \tag{1.15}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_4^S = {} & 2\,{}^{[12]}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{[12](\mu\nu)} + 2\,{}^{[12]}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{[21](\mu\nu)} + 4\,{}^{[13+]}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{[13-](\mu\nu)} + \\
& + 4\,{}^{[23+]}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{[23-](\mu\nu)} + 8\,{}^{[13+]}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{[23-](\mu\nu)} + 4\,{}^{[+-]}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{[+-](\mu\nu)} + \\
& + {}^{(11)}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{(11)(\mu\nu)} + {}^{(22)}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{(22)(\mu\nu)} + 2\,{}^{(11)}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{(11)(\mu\nu)}\omega + 2\,{}^{(22)}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{(22)(\mu\nu)}\omega + \\
& + 4\,{}^{(11)}_{\ (\mu\nu)}\omega\,{}^{(11)(\mu\nu)}\omega + 4\,{}^{(22)}_{\ (\mu\nu)}\omega\,{}^{(22)(\mu\nu)}\omega + 4\,{}^{(11)}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{(12)(\mu\nu)} + 4\,{}^{(12)}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{(22)(\mu\nu)} + \\
& + 8\,{}^{(12)}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{(11)(\mu\nu)}\omega + 8\,{}^{(12)}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{(22)(\mu\nu)}\omega + 16\,{}^{(11)}_{\ (\mu\nu)}\omega\,{}^{(12)(\mu\nu)}\omega + 16\,{}^{(12)}_{\ (\mu\nu)}\omega\,{}^{(22)(\mu\nu)}\omega + \\
& + 2\,{}^{(11)}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{(22)(\mu\nu)} + 4\Big({}^{(11)}_{\ (\mu\nu)}z + {}^{(22)}_{\ (\mu\nu)}z\Big)\,{}^{+-3(\mu\nu)}z + 4\,{}^{(12)}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{(12)(\mu\nu)} + \\
& + 8\,{}^{(12)}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{(12)(\mu\nu)}\omega + 16\,{}^{(12)}_{\ (\mu\nu)}\omega\,{}^{(12)(\mu\nu)}\omega + 4\,{}^{(13+)}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{(13-)(\mu\nu)} + \\
& + 4\,{}^{(23+)}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{(23-)(\mu\nu)} + 8\,{}^{(13+)}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{(23-)(\mu\nu)} + 8\,{}^{(12)}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{+-3(\mu\nu)} + \\
& + 4\,{}^{+-3}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{+-4(\mu\nu)} + 4i\,{}^{(13+)}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{(24-)(\mu\nu)}\omega - 4i\,{}^{(13-)}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{(24+)(\mu\nu)}\omega + \\
& + 4i\,{}^{(23+)}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{(14-)(\mu\nu)}\omega - 4i\,{}^{(23-)}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{(14+)(\mu\nu)}\omega + 16i\,{}^{(13+)}_{\ (\mu\nu)}\omega\,{}^{(24-)(\mu\nu)}\omega + \\
& - 16i\,{}^{(13-)}_{\ (\mu\nu)}\omega\,{}^{(24+)(\mu\nu)}\omega + 2i\,{}^{(14+)}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{(23-)(\mu\nu)} - 2i\,{}^{(14-)}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{(23+)(\mu\nu)} + \\
& - 16i\,{}^{(14+)}_{\ (\mu\nu)}\omega\,{}^{(23-)(\mu\nu)}\omega + 16i\,{}^{(14-)}_{\ (\mu\nu)}\omega\,{}^{(23+)(\mu\nu)}\omega - 2i\,{}^{(13+)}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{(24-)(\mu\nu)} + \\
& + 2i\,{}^{(13-)}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{(24+)(\mu\nu)} - 4i\,{}^{(14+)}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{(23-)(\mu\nu)}\omega + 4i\,{}^{(14-)}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{(23+)(\mu\nu)}\omega + \\
& - 4i\,{}^{(24+)}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{(13-)(\mu\nu)}\omega + 4i\,{}^{(24-)}_{\ (\mu\nu)}z\,{}^{(13+)(\mu\nu)}\omega + \\
& - 4\,{}^{[13+]}_{\ \mu}z\,{}^{[13-]}_{\ \nu}z - 4\,{}^{[23+]}_{\ \mu}z\,{}^{[23-]}_{\ \nu}z - 4\,{}^{[+-]}_{\ \mu}z\,{}^{[+-]}_{\ \nu}z + -4\,{}^{[13+]}_{\ \mu}z\,{}^{[23-]}_{\ \nu}z + \\
& + 4\,{}^{[13-]}_{\ \mu}z\,{}^{[23+]}_{\ \nu}z + 4i\,{}^{[13-]}_{\ \mu}z\,{}^{[24+]}_{\ \nu}z - 4i\,{}^{[13+]}_{\ \mu}z\,{}^{[24-]}_{\ \nu}z + 4\,{}^{(11)}_{\ \mu}z\,{}^{(22)}_{\ \nu}\omega + \\
& + 8\,{}^{(11)}_{\ \mu}\omega\,{}^{(22)}_{\ \nu}\omega + 4\,{}^{(13+)}_{\ \mu}z\,{}^{(13-)}_{\ \nu}z + 4\,{}^{(23+)}_{\ \mu}z\,{}^{(23-)}_{\ \nu}z + \\
& + 16\,{}^{(13+)}_{\ \mu}z\,{}^{(13-)}_{\ \nu}\omega + 16\,{}^{(23+)}_{\ \mu}z\,{}^{(23-)}_{\ \nu}\omega + 32\,{}^{(13+)}_{\ \mu}\omega\,{}^{(13-)}_{\ \nu}\omega + \\
& + 32\,{}^{(23+)}_{\ \mu}\omega\,{}^{(23-)}_{\ \nu}\omega + 4\,{}^{(13+)}_{\ \mu}z\,{}^{(23-)}_{\ \nu}z - 4\,{}^{(13-)}_{\ \mu}z\,{}^{(23+)}_{\ \nu}z + \\
& + 16\,{}^{(13+)}_{\ \mu}z\,{}^{(13-)}_{\ \nu}\omega - 16\,{}^{(13-)}_{\ \mu}z\,{}^{(13+)}_{\ \nu}\omega + 32\,{}^{(13+)}_{\ \mu}\omega\,{}^{(23-)}_{\ \nu}\omega + \\
& - 32\,{}^{(13-)}_{\ \mu}\omega\,{}^{(23+)}_{\ \nu}\omega - 4\,{}^{(+-)}_{\ \mu}z\,{}^{(+-)}_{\ \nu}z + 8\,{}^{+-3}_{\ \mu}z\,{}^{+-4}_{\ \nu}\omega + 16\,{}^{+-3}_{\ \mu}\omega\,{}^{+-4}_{\ \nu}\omega + \\
& + 8\Big\{{}^{(11)}_{\ \mu}z + {}^{(22)}_{\ \mu}z + 2\,{}^{(11)}_{\ \mu}\omega + 2\,{}^{(22)}_{\ \mu}\omega + 2\,{}^{(12)}_{\ \mu}z + 4\,{}^{(12)}_{\ \mu}\omega\Big\}\,{}^{+-3}_{\ \nu}\omega
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

e

$$\mathcal{L}_4^{st} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Big\{4\,{}^{[12]}_{z}{}_{\mu\nu}\,{}^{[12]}_{z}{}_{\rho\sigma} + 4\,{}^{[12]}_{z}{}_{\mu\nu}\,({}^{[+-]}_{z}{}_{\rho\sigma} + {}^{[-+]}_{z}{}_{\rho\sigma}) + ({}^{[+-]}_{z}{}_{\mu\nu} + {}^{[-+]}_{z}{}_{\mu\nu})({}^{[+-]}_{z}{}_{\rho\sigma} + {}^{[-+]}_{z}{}_{\rho\sigma})\Big\}. \tag{1.17}$$

Sobre a origem do termo semi-topológico do tipo $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$, o leitor pode se referir ao trabalho [54].

Resumindo, as eqs. (1.2)-(1.17) demonstram a diversidade proposta pela simetria das diferenças e ampliam o fenômeno eletromagnético. Mostram um passo adiante para observar o eletromagnetismo não-linear [57]. A implementação da não-linearidade iniciou-se em 1934 através dos trabalhos de Euler-Heisenberg, Born-Infeld e outros modelos efetivos, como aquele encontrado no trabalho [55] e também na referência [56]. Entretanto sua estrutura de construção permaneceu como a de Maxwell, apenas incluindo potências mais altas nos tensores intensidade de campo. A eq.(1.2) estabelece um modelo eletromagnético não-linear com quatro campos bosônicos $\{A_\mu, U_\mu, V_\mu^\pm\}$ a nível básico. Introduz novas características à teoria de campo a serem exploradas. Primeiramente, uma não-linearidade Abeliana diferente de Yang-Mills; a seguir uma dinâmica com campos granulares e coletivos apresentando uma física em que a natureza possui uma construção simultânea de quanta e coletividade, acompanhadas por suas respectivas transformações de Lorentz [58]; por terceiro, o significado de circunstância, através de coeficientes livres como $a_1, b_{(11)}$, etc.., a tomar qualquer valor sem violar a invariância de gauge. Estes coeficientes livres constróem o chamado volume das circunstâncias do modelo, dado por $\frac{1}{4}\big[3N^4 - 8N^3 + 13N^2 - 12N + 3\big]$, onde N é o número de campos transformando-se sob o mesmo grupo $U(1)$ [59]. O seu significado é que se pode interferir na Natureza.

A Lagrangeana em estudo reobtém e generaliza propostas anteriores. Façamos uma breve comparação com os esforços publicados nos anos '60 de forma a estender a QED com bósons vetoriais massivos. Em 1962, Lee e Yang introduziram a propagação de bósons vetoriais longitudinais, e o termo $F_{\mu\nu}W^\mu W^{\nu\,*}$ para obter a expressão correta do momento de dipolo magnético para bósons vetoriais carregados; em 1963, Salam introduziu o termo

$\lambda(W_\mu W^{\mu *})^2$ para assegurar a renormalizabilidade por contagem de potências. Comparando com a (1.2), podemos notar que estes termos são reproduzidos. Além disso, a eq.(1.2) introduz o setor de spin-0 e generaliza as interações trilinear e quadrilinear entre os bósons $A_\mu, Z_\mu, W_\mu^\pm$. Por exemplo, introduz a interação direta entre o fóton e o bóson Z^0, o que é visto como vértice anômalo da Teoria de Salam-Glashow-Weinberg. Ao mesmo tempo, surge uma diversidade de constantes de acoplamento além da carga elétrica.

Na sua perspectiva de uma Eletrodinâmica além da carga elétrica, o Eletromagnetismo de Quatro Campos desenvolve uma possibilidade de se modular a carga elétrica. A modulação do valor da carga elétrica é conhecida na Teoria Eletrofraca e no grupo de renormalização. Quanto ao eletromagnetismo neutro, a literatura divide-se nas versões com e sem a carga elétrica. No primeiro caso, temos o efeito Bohm-Ahranov e Ahranov-Casher, ambos envolvendo o momento magnético anômalo do elétron com campos magnético e elétrico externos, respectivamente. O segundo caso tem exemplo na interação da luz com o campo magnético, como detectado por Faraday em 1848 [60] e o efeito Kerr [61]. Também, há uma literatura ainda pouco afirmada sobre o magnetismo do fóton e dos neutrinos[62]. A eq. (1.2) introduz uma nova contribuição ao eletromagnetismo neutro: é o momento magnético anômalo a propor uma interação sem a participação da carga elétrica. A notar, a Lagrangeana eq.(1.2), em vez de procurar a quebra espontânea da simetria, sistematiza seus quatro campos através da simetria das diferenças. A sua proposta está em combinar a diversidade de campos com a Relatividade Restrita.

No Capítulo 1, apresentamos um breve histórico da evolução do eletromagnetismo, pontuando a possibilidade de estudar a troca de cargas com quatro bósons mensageiros e três cargas, apresentando a Lagrangeana para o modelo. Em seguida, o Capítulo 2 apresentará as equações relativísticas sistêmicas do modelo, bem como o tensor Energia-Momento. O material do Capítulo 3 consiste em estudar a Fotônica, tendo em vista o espalhamento fóton-fóton a tree-level. O Capítulo 4 apresenta uma contribuição para a Spintrônica de spin-1, fazendo um breve histórico do desenvolvimento da Spintrônica de spin-$\frac{1}{2}$ e apresentando uma equação acoplando o spin com os campos EM. O assunto

do Capítulo 5 é uma primeira comparação com a Lagrangeana de Bósons Vetoriais do Modelo Padrão e uma possibilidade para uma contribuição de quatro campos para o setor fermiônico. Finalmente, deixamos as nossas Conclusões, Críticas e Perspectivas. Seguem-se os Apêndices, nos quais são esclarecidos detalhes técnicos referentes aos Capítulos da Dissertação.

Capítulo 2

Regime Não-Maxwelliano Sistêmico

2.1 Equações Relativísticas Sistêmicas

A simetria introduzida pelo absoluto da luz conduziu a compreensões físicas como as equações de Maxwell, Teoria da Relatividade, representações do Grupo de Lorentz. Devemos avançar, desenvolver um regime não-Maxwelliano. Para isto, levar em conta não apenas Maxwell e a Relatividade, mas explorar mais a fundo a álgebra do Grupo de Lorentz. A simetria global $\Lambda^{\mu}_{\nu} = (e^{\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}})^{\mu}_{\nu}$ vai além das transformações de Lorentz e define uma álgebra de Lie. Comanda a física das representações do número quântico de spin, as equações relativísticas (Klein-Gordon, Maxwell, Proca, Weyl, Dirac, Rarita-Schwinger, Pauli-Fierz), a simetria de gauge (cancelamento de spins espúrios da LG) e o teorema CPT. Entretanto, com os objetivos desta Dissertação, algo mais deve ocorrer. As fronteiras de Maxwell devem ser estendidas.

Trabalhando-se na invariância da luz, obtém-se uma quarta situação onde, a cada representação irredutível do Grupo de Lorentz, está associada uma família de campos. Isto introduz a presença de agrupamento de campos ou espécies de Lorentz [64]. Uma física sistêmica de quanta diversos é encontrada a partir de famílias de campos [65]. Uma origem onde essas famílias estão incubando uma dinâmica relativística sistêmica: a dinâmica de conjuntos de campos compartilhando a mesma representação de spin e baseada em um grupo de campos sob uma mesma representação de Lorentz, conectando-se entre si sob

um mesmo parâmetro de gauge e através da simetria das diferenças, distinguindo os seus números quânticos (spin, massa, cargas, C,P,T, CPT).

No caso em estudo, toma-se a representação $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ através de uma mesma simetria Abeliana de gauge. As correspondentes equações clássicas para conjunto de campos de spin-1 e spin-0 serão derivadas nesta seção. Preservando os dois postulados eletromagnéticos que são a conservação da carga elétrica e a invariância da luz, eq.(1.1) estende o conjunto mínimo de Maxwell. Baseada em uma simetria Abeliana expandida $U(1)X\mathrm{SO}(2)$ uma nova performance eletromagnética é esperada a ser derivada trazendo novas características para carga elétrica, campos eletromagnéticos e o fóton. Novos regimes eletromagnéticos não-Maxwellianos serão desenvolvidas.

A simetria Abeliana de conjunto de campos, eq.(1.1) desenvolve um sistema de equações diferenciais hiperbólicas a sistematizarem um corpo teórico sistêmico. Classicamente, existem 15 equações covariantes primitivas. Elas são as 4 equações de movimento de Euler-Lagrange associadas a cada campo, 3 equações de Noether, 4 identidades granulares de Bianchi onde cada uma é associada a um dado campo $A_{\mu\, I}$, 1 identidade de Bianchi coletiva antissimétrica, 2 identidades de Bianchi simétricas, 1 identidade cinética. Juntas, constroem a evolução no espaço-tempo desse conjunto de campos.

A nova dinâmica a ser entendida envolve a noção de conjunto. Não existe mais a dinâmica isolada de um campo ou de uma partícula nele inserida. O que vai para o futuro é o todo. As partes envolvidas (campos, partículas) possuem sua evolução dentro dessa unidade conjuntural. Não existe equação diferencial isolada. As suas variáveis estão entrelaçadas. As suas relações estão na forma de rede. Há uma dinâmica de rede a ser entendida.

O novo tratamento físico está em descortinar sobre essa dinâmica de conjunto. Dois fatores devem ser entendidos. Por primeiro, estarem associados ao conjunto as noções de diretriz e circunstância. Portanto, dado o conjunto $A_{\mu\, I} \equiv \{A_\mu, U_\mu, V_\mu^{\pm}\}$ deveremos analisar sobre as noções de diretriz e circunstância que o movem. Comparando com a teoria da relatividade onde, a partir da invariância da luz as entidades físicas são relativizadas;

agora, a partir da invariância da luz escolhemos o fóton como a partícula diretiva e os demais campos são vistos fisicamente como suas circunstâncias. A dizer que o absoluto da luz contingencia o relativo e a circunstância.

Por segundo, separar dois grupos de spin-1 e spin-0. Devemos estudar uma dinâmica que isole os setores de spin. Para isto, devemos evitar os tensores simétricos, pois são combinações de termos transversais e longitudinais nas equações de movimento. A identidade cinética $\partial_\nu S^{\nu\mu\, I} = \partial_\nu F^{\nu\mu\, I} + \eta^{\mu\nu}\partial_\nu S^{\alpha\, I}_{\alpha}$ e as identidades coletivas simétricas de Bianchi $2\partial_\nu z^{\nu)}_{(\mu} = -\partial_\mu z^{\nu)}_{(\nu} + \gamma_{(I\,J)} A^I_\mu S^{\nu J}_\nu + 2\gamma_{(I\,J)} A^I_\nu S^{\nu J}_\mu$ são combinadas com as equações originais primitivas. Como resultado, separam as dinâmicas transversais e longitudinais.

A equação de movimento genérica a cada campo possui a seguinte expressão geral:

$$\partial_\nu \left(F^{\nu\mu} + z^{[\nu\mu]} \right) + \partial^\mu \left(S^{\alpha}_{\alpha} + z^{\alpha}_{\alpha} \right) + M^\mu + l^\mu + c^\mu = j^\mu \tag{2.1}$$

Três elementos constituem a eq.(2.1). As suas novas variáveis eletromagnéticas são a não-linearidade e a dinâmica. Introduz quatro elementos básicos: explícita a fisicidade dos campos potenciais, a presença de campos granulares e coletivos, campos agindo como suas próprias fontes e a dinâmica de conjunto. Primeiramente, relembremos que Maxwell fora baseado em campos eletromagnéticos relegando os campos potenciais como subsidiários. Entretanto, tanto a Mecânica Quântica como a Eletrodinâmica introduzem a presença de campos potenciais. Neste escopo, introduz novos tipos invariantes de gauge que são as denominadas field balls, $\gamma_{[I\,J]}\Phi^J$ e $\gamma_{[I\,J]}\vec{A}^J$ [59]. Segundo, enquanto os vetores de polarização e magnetização são introduzidos à mão, eq.(2.1) os interpreta através dos campos coletivos $z^{\mu\nu}$ cuja origem está na simetria de gauge, eq.(1.1). Portanto, enquanto a teoria de Maxwell descreve heuristicamente a polarização e magnetização, o Eletromagnetismo de Quatro Campos introduz a partir de primeiros princípios. Terceiro, constitui equações de movimento interligadas, cuja não-linearidade torna seus campos serem suas próprias fontes. Os termos de massa, London, conglomerados e termos de corrente não-linear são

geradores de campos eletromagnéticos. Finalmente, enquanto Maxwell define a carga elétrica como origem dos campos EM, a equação acima considera as fontes de campos vindas de leis de conservação oriundas da auto-interação e interligação.

Por fim, a eq.(2.1) introduz uma dinâmica sistêmica de campos a ser analisada. Três estruturas aparecem em sua rede formada por 4 campos interligados. Primeiro, a evolução espaço-temporal mostra setores transversais e longitudinais. De $\mathcal{L}_K^A$ e $\mathcal{L}_3^A$, temos que os tensores $F_{[\mu\nu]}$ e $z_{[\mu\nu]}$ desenvolvem uma dinâmica de spin-1, propagando campos granulares e coletivos, respectivamente; similarmente, uma dinâmica de spin-0 com as variáveis S_α^α e z_α^α a partir de $\mathcal{L}_K^S$ e $\mathcal{L}_3^S$. Segundo, o dualismo individual-coletivo se apresenta através da dinâmica. A sua evolução no espaço-tempo correlacionando os aspectos granulares e coletivos. Um novo princípio de complementaridade surge além de onda-partícula [66]. Resulta na existência de uma física sistêmica, onde a natureza funciona de forma individual e coletiva simultaneamente. Não mais existe o quanta individual tantas vezes medidos em nossos experimentos, ao seu lado existe uma presença coletiva, também a ser medida. Terceiro, é constituída pela noção de conjunto. As suas partes (campos, quanta) estão envolvidas em um todo. A partir da noção de conjunto surgem os princípios de diretriz e circunstância.

A eq.(2.1) é o protótipo das equações a serem vistas neste Eletromagnetismo de Quatro Campos. Após a discussão sobre suas variáveis e dinâmica, devemos analisar sobre sua física envolvida. Existem os setores de spin-1 e spin-0 a serem entendidos, assim como as contribuições oriundas dos termos de massa, London, correntes. Analisando os termos de fonte, primeiramente aparece o termo de massa, M^μ. Um eletromagnetismo de Proca com a diferença que aqui as massas são introduzidas sem quebrar a simetria de gauge. Algo diferente de Maxwell-Higgs [67], Podolsky-Lee-Wick [68], Kalb-Rammond [69], Higgs mechanism [33].

O termo de London, l^μ, corresponde à composição de campos escalares L

$$l_I^\mu = gLA_I^\mu \quad , L \equiv A_{\nu J}A_J^\nu \tag{2.2}$$

O termo conglomerado, c^{μ}, significa a representação matricial do tensor de campos M_{JK} associado à polarização e magnetização:

$$c_I^{\mu} = g_{JK} M_{JK} A_I^{\mu} \quad , M_{JK} \equiv A_{\nu J} A_K^{\nu} \tag{2.3}$$

O termo de corrente, j^{μ} correspondente a derivada toma a forma

$$j_I^{\mu} = f_J X_J^{\mu\nu} A_{\nu I} \tag{2.4}$$

onde $X_I^{\mu\nu}$ é qualquer tensor intensidade de campo como $F^{\mu\nu}$, $S^{\mu\nu}$, S_{α}^{α} e assim por diante, com f_J como a constante de acoplamento correspondente. Para o caso particular onde é expressa como

$$j_I^{\mu} = f_J \partial_{\nu} (A_I^{\nu} A_J^{\mu} - A_J^{\nu} A_I^{\mu}) \tag{2.5}$$

a corrente pode ser reescrita em termos do operador de spin

$$j_J^{\mu} = i \partial_{\nu} (A_I^{\alpha} (\Sigma^{\nu\mu})_{\alpha\beta} A_I^{\beta}) \tag{2.6}$$

onde $(\Sigma_{\alpha\beta})_{\nu}^{\mu} = -i(\delta_{\alpha}^{\mu} \eta_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\nu} \delta_{\rho}^{\mu})$

A correspondente equação de continuidade é:

$$\Box \Big(S_{\alpha}^{\alpha} + z_{\alpha}^{\alpha} \Big) = \partial . \Big(j - M - l - c \Big) \tag{2.7}$$

Eq.(2.7) denota cargas conservadas. Outras fontes para o fenômeno eletromagnético são encontradas. A carga elétrica não é mais apenas a única origem ao fenômeno eletromagnético. A leitura da eq.(2.7) mostra que cada bóson de gauge inserido no conjunto de campos desenvolve sua própria carga de forma dinâmica. Indica a existência de diferentes fontes além da carga elétrica. Entre elas, o fóton ser a sua própria fonte.

O próximo passo ao estudo é separar a dinâmica desses bósons de gauge mensageiros. O grupo de Lorentz introduz não apenas o espaço-tempo mas também o spin. Dada a

representação $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, obtém-se a espectroscopia de spin com quatro partículas de spin-1 mais quatro partículas de spin-0. Devemos separar sua física. Decompor estes diferentes setores. Classificar a dinâmica de spin correspondente. Dado o conjunto de campos $\{A_{\mu I}\} \equiv \{A_\mu, U_\mu, V_\mu^\pm\}$, existem duas famílias com spin-1 e spin-0 cuja dinâmica ser identificada separadamente.

As duas dinâmicas de spin são separadas multiplicando eq.((2.1)) pelos operadores transversal e longitudinal. Para isto, deve-se tomar os operadores transversal e longitudinal $A^T_{\mu I} = \theta_{\mu\nu}A^\nu_I$ e $A^L_{\mu I} = \omega_{\mu\nu}A^\nu_I$ onde $\theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \dfrac{\partial_\mu\partial_\nu}{\Box}$ e $\omega_{\mu\nu} = \dfrac{\partial_\mu\partial_\nu}{\Box}$. Resulta uma dinâmica $A^T_{\mu I}$ associada aos tensores intensidade de campo antissimétricos e simétricos enquanto a dinâmica $A^L_{\mu I}$ é apenas dependente nos tensores intensidade de campo simétricos. Fornece a seguinte dinâmica de spin-1:

$$\partial_\nu\left(F^{\nu\mu} + z^{[\nu\mu]}\right) + m^2X^\mu_T + l^\mu_T + c^\mu_T = j^\mu_T \tag{2.8}$$

Para dinâmica de spin-0:

$$\partial^\mu\left(S^\alpha_\alpha + z^\alpha_\alpha\right) + m^2X^\mu_L + l^\mu_L + c^\mu_L = j^\mu_L \tag{2.9}$$

onde $j^\mu_T \equiv \Theta^\mu_\nu j^\nu$ e $j^\mu_L \equiv \omega^\mu_\nu j^\nu$ e assim por diante.

Considerando que as eqs.(2.8) e (2.9) preservam a covariância, sua separação da eq.(2.1) mostra consistência com a simetria $U(1)XSO(2)$ original. Apesar desses operadores conterem uma natureza não-local a fisicidade não é perdida. Não há quebra de simetria. A covariância valida a separação da equação nos setores transversal e longitudinal.

Considerando a presença da covariância na separação dos setores de spin-1 e spin-0 podemos identificar suas leis de conservação como leis físicas. A equação de continuidade para spin-1 é

$$\partial.\left(m^2 X_T^\mu + l_T^\mu + c_T^\mu - j_T^\mu\right) = 0 \tag{2.10}$$

e a equação de onda de spin-0 é

$$\Box\left(S_\alpha^\alpha + z_\alpha^\alpha\right) = \partial.\left(m^2 X_L^\mu + l_L^\mu + c_T^\mu - j_L^\mu\right) \tag{2.11}$$

Após este estudo genérico a respeito da equação relativística sistêmica a conduzir o modelo, devemos agora explicitar equações de movimento correspondentes a cada campo.

2.1.1 Campo A_μ (fóton)

Spin-1

$$\partial_\nu\left(F_A^{\nu\mu} + z_A^{[\nu\mu]}\right) + l_{A\,T}^\mu + c_{A\,T}^\mu = j_{A\,T}^\mu \tag{2.12}$$

Spin-0

$$\partial^\mu\left(S_{\alpha\,A}^\alpha + z_{\alpha\,A}^\alpha\right) + l_{A\,L}^\mu + c_{A\,L}^\mu = j_{A\,L}^\mu \tag{2.13}$$

onde o setor antissimétrico é dado por:

$$F_A^{\nu\mu} = \bar{a}_1 F^{\nu\mu} \text{ (granular)}, \tag{2.14}$$

$$z_A^{[\nu\mu]} = \bar{a}_2\left(\overset{[12]}{z}{}^{[\nu\mu]} + \overset{[+-]}{z}{}^{[\nu\mu]}\right) + \bar{a}_3\ \overset{(+-)}{z}{}^{[\nu\mu]} \text{ (coletivo)} \tag{2.15}$$

$$\tag{2.16}$$

e o termo longitudinal é

$$S^{\alpha}_{\alpha\, A} = \Big(\bar{a}_4 S^{\alpha 1}_{\alpha} + \bar{a}_5 S^{\alpha 2}_{\alpha}\Big) \text{ (granular)} \tag{2.17}$$

$$z^{\alpha}_{\alpha\, A} = \bar{a}_6\Big(\overset{(11)}{z}{}^{\alpha}_{\alpha} + \overset{(22)}{z}{}^{\alpha}_{\alpha} + 2\,\overset{(12)}{z}{}^{\alpha}_{\alpha} + 2\,\overset{(+-3)}{z}{}^{\alpha}_{\alpha}\Big) +$$

$$+\bar{a}_7\Big(\overset{(11)}{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha} + \overset{(22)}{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha} + 2\,\overset{(12)}{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha} + 2\,\overset{+-3}{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha}\Big) \text{ (coletivo)} \tag{2.18}$$

$$\tag{2.19}$$

O chamado termo de London é representado por l^{μ}_{A}.

$$l^{\mu}_{A} = -A_{\nu}\Big\{ f^{A}_{2}\,\overset{(11)}{z}{}^{(\nu\mu)} + f^{A}_{3}\,\overset{(12)}{z}{}^{(\nu\mu)} + f^{A}_{2}\,\overset{(22)}{z}{}^{(\nu\mu)} + f^{A}_{4}\,\overset{(11)}{\omega}{}^{(\nu\mu)} + f^{A}_{5}\,\overset{(12)}{\omega}{}^{(\nu\mu)} +$$
$$g^{\nu\mu}\Big(f^{A}_{4}\,\overset{(22)}{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha}\Big)\Big\} - U_{\nu}\Big\{ f^{U}_{3}\,\overset{[12]}{z}{}^{[\nu\mu]} + f^{U}_{4}\,\overset{(12)}{\omega}{}^{[\nu\mu]} + f^{U}_{6}\,\overset{(11)}{z}{}^{(\nu\mu)} + f^{U}_{7}\,\overset{(12)}{z}{}^{(\nu\mu)} +$$
$$+f^{U}_{8}\,\overset{(22)}{z}{}^{(\nu\mu)} + f^{U}_{9}\,\overset{(11)}{\omega}{}^{(\nu\mu)} + f^{U}_{4}\,\overset{(12)}{\omega}{}^{(\nu\mu)} + f^{U}_{10}\,\overset{(22)}{\omega}{}^{(\nu\mu)}\Big\} \tag{2.20}$$

e o termo conglomerado c^{μ}_{A} é

$$c^{\mu}_{A} = -A_{\nu}\Big\{ f^{A}_{3}\,\overset{+-3}{z}{}^{(\nu\mu)} + g^{\nu\mu}\Big(f^{A}_{4}\,\overset{+-3}{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha}\Big)\Big\} - U_{\nu}\Big\{ f^{U}_{3}\,\overset{[+-]}{z}{}^{[\nu\mu]} + f^{U}_{7}\,\overset{+-3}{z}{}^{(\nu\mu)} + g^{\nu\mu}\Big(f^{U}_{13}\,\overset{+-3}{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha}\Big)\Big\} +$$
$$-V^{+}_{\nu}\Big\{ f^{+}_{2}\,\overset{[13-]}{z}{}^{[\mu\nu]} + f^{+}_{3}\,\overset{[23-]}{z}{}^{[\nu\mu]} + f^{+}_{5}\,\overset{[23-]}{z}{}^{(\nu\mu)} + f^{+}_{6}\,\overset{[24-]}{z}{}^{\nu\mu} + f^{+}_{7}\,\overset{(13-)}{z}{}^{\mu\nu} +$$
$$+f^{+}_{8}\,\overset{(23-)}{z}{}^{[\nu\mu]} + f^{+}_{9}\,\overset{(23-)}{z}{}^{(\nu\mu)} + f^{+}_{10}\,\overset{(24-)}{z}{}^{(\nu\mu)} + f^{+}_{11}\,\overset{(23-)}{\omega}{}^{\nu\mu} + f^{+}_{12}\,\overset{(24-)}{\omega}{}^{\nu\mu} +$$
$$+g^{\nu\mu}\Big(f^{+}_{14}\,\overset{[13-]}{z}{}^{\alpha}_{\alpha} + f^{+}_{14}\,\overset{[23-]}{z}{}^{\alpha}_{\alpha} + f^{+}_{7}\,\overset{(13-)}{z}{}^{\alpha}_{\alpha} + f^{+}_{7}\,\overset{(23-)}{z}{}^{\alpha}_{\alpha} + f^{+}_{15}\,\overset{(13-)}{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha} + f^{+}_{15}\,\overset{(23-)}{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha}\Big)\Big\} +$$
$$-V^{-}_{\nu}\Big\{ f^{+*}_{2}\,\overset{[13+]}{z}{}^{[\mu\nu]} + f^{+*}_{3}\,\overset{[23+]}{z}{}^{[\nu\mu]} + f^{+*}_{5}\,\overset{[23+]}{z}{}^{(\nu\mu)} + f^{+*}_{6}\,\overset{[24+]}{z}{}^{\nu\mu} + f^{+*}_{7}\,\overset{(13+)}{z}{}^{\mu\nu} +$$
$$+f^{+*}_{8}\,\overset{(23+)}{z}{}^{[\nu\mu]} + f^{+*}_{9}\,\overset{(23+)}{z}{}^{(\nu\mu)} + f^{+*}_{10}\,\overset{(24+)}{z}{}^{(\nu\mu)} + f^{+*}_{11}\,\overset{(23+)}{\omega}{}^{\nu\mu} + f^{+*}_{12}\,\overset{(24+)}{\omega}{}^{\nu\mu} +$$
$$+g^{\nu\mu}\Big(f^{+*}_{14}\,\overset{[13+]}{z}{}^{\alpha}_{\alpha} + f^{+*}_{14}\,\overset{[23+]}{z}{}^{\alpha}_{\alpha} + f^{+*}_{7}\,\overset{(13+)}{z}{}^{\alpha}_{\alpha} + f^{+*}_{7}\,\overset{(23+)}{z}{}^{\alpha}_{\alpha} + f^{+*}_{15}\,\overset{(13+)}{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha} + f^{+*}_{15}\,\overset{(23+)}{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha}\Big)\Big\} \tag{2.21}$$

A corrente não-linear é

$$j^{\mu}_{A} = A_{\nu}\Big\{ f^{A}_{1} S^{\nu\mu 2} + g^{\nu\mu}\Big(f^{A}_{6} S^{\alpha 1}_{\alpha} + f^{A}_{7} S^{\alpha 2}_{\alpha}\Big)\Big\} +$$
$$+U_{\nu}\Big\{ f^{U}_{1} F^{\nu\mu} + f^{U}_{2} U^{\nu\mu} + f^{U}_{5} S^{\nu\mu 2} + g^{\nu\mu}\Big(f^{U}_{11} S^{\alpha 1}_{\alpha}\Big)\Big\} +$$
$$+V^{+}_{\nu}\Big\{ f^{+}_{1} V^{\nu\mu -} + f^{+}_{4} S^{\nu\mu -} + g^{\nu\mu}\Big(f^{+}_{13} S^{\alpha -}_{\alpha}\Big)\Big\} +$$
$$+V^{-}_{\nu}\Big\{ f^{+*}_{1} V^{\nu\mu +} + f^{+*}_{4} S^{\nu\mu +} + g^{\nu\mu}\Big(f^{+*}_{13} S^{\alpha +}_{\alpha}\Big)\Big\} \tag{2.22}$$

onde os parâmetros $\bar{a}_1, ...f_{15}^{+*}$ estão definidos no Apêndice B do paper[47].

A equação de continuidade correspondente é

$$\Box\Big(S^{\alpha}_{\alpha A} + z^{\alpha}_{\alpha A}\Big) = \partial.\Big(j_A + l_A + c_A\Big) \tag{2.23}$$

As correspondentes expressões das ondas eletromagnéticas ficam:

Spin-1 :

$$\Box\Big(F^{A}_{\nu\mu} + z^{A}_{[\nu\mu]}\Big) = \partial_\mu d^A_\nu - \partial_\nu d^A_\mu + \partial^\alpha f^A_{\alpha\mu\nu}$$

onde

$$d^A_\mu = l^{AT}_\mu + c^A_\mu + j^{AT}_\mu \quad \text{e} \quad f^A_{\alpha\mu\nu} = \bar{a}_2\Big(f^{[12]}_{\alpha\mu\nu} + f^{[+-]}_{\alpha\mu\nu}\Big) + \bar{a}_3 f^{(+-)}_{\alpha\mu\nu} \tag{2.24}$$

Spin-0

$$\Box\Big(S^{\alpha}_{\alpha A} + z^{\alpha}_{\alpha A}\Big) = \partial.\Big(j_A - l_A - c_A\Big) \tag{2.25}$$

2.1.2 Campo U_μ (fóton massivo)

Spin-1:

$$\partial_\nu\left(F^{\nu\mu}_U + z^{[\nu\mu]}_U\right) + M^\mu_{U\,T} + c^\mu_{U\,T} + l^\mu_{U\,T} = j^\mu_{U\,T} \tag{2.26}$$

Spin-0:

$$\partial^\mu\Big(S^{\alpha}_{\alpha U} + z^{\alpha}_{\alpha U}\Big) + M^\mu_{U\,L} + c^\mu_{U\,L} + l^\mu_{U\,L} = j^\mu_{U\,L} \tag{2.27}$$

Setor T:

$$F_U^{\nu\mu} = \bar{b}_1 U^{\nu\mu}(\text{granular}), \tag{2.28}$$

$$z_U^{[\nu\mu]} = \bar{b}_2\Big({}^{[12]}_{}z^{[\nu\mu]} + {}^{[+-]}_{}z^{[\nu\mu]}\Big) + \bar{b}_3\ {}^{(+-)}_{}z^{[\nu\mu]}\ (\text{coletivo}) \tag{2.29}$$

Setor L:

$$S_U^{\nu\mu} = \bar{b}_4 S_\alpha^{\alpha 1} + \bar{b}_5 S_\alpha^{\alpha 2}\ (\text{granular}) \tag{2.30}$$

$$z_{\alpha U}^{\alpha} = \bar{b}_6\Big({}^{(11)}_{\alpha}z^{\alpha}_{\alpha} + {}^{(22)}_{\alpha}z^{\alpha}_{\alpha} + 2\ {}^{(12)}_{\alpha}z^{\alpha}_{\alpha} + 2\ {}^{(+-3)}_{\alpha}z^{\alpha}_{\alpha}\Big) +$$
$$+\bar{b}_7\Big({}^{(11)}_{\alpha}\omega^{\alpha}_{\alpha} + {}^{(22)}_{\alpha}\omega^{\alpha}_{\alpha} + 2\ {}^{(12)}_{\alpha}\omega^{\alpha}_{\alpha} + 2\ {}^{+-3}_{\alpha}\omega^{\alpha}_{\alpha}\Big)\ (\text{coletivo}) \tag{2.31}$$

Setor massa:

$$M_U^{\mu} = m_U^2 U^{\mu} \tag{2.32}$$

Setor-London:

$$l_U^{\mu} = -A_\nu\Big\{ g_3^A\ {}^{[12]}z^{[\nu\mu]} + g_4^A\ {}^{(12)}\omega^{[\nu\mu]} + g_6^A\ {}^{(11)}z^{(\nu\mu)} + g_7^A\ {}^{(12)}z^{(\nu\mu)} + g_8^A\ {}^{(22)}z^{(\nu\mu)} +$$
$$+g_9^A\ {}^{(11)}\omega^{(\nu\mu)} + g_4^A\ {}^{(12)}\omega^{(\nu\mu)} + g_{10}^A\ {}^{(22)}\omega^{(\nu\mu)}\Big\} - U_\nu\Big\{ g_2^U\ {}^{(11)}z^{(\nu\mu)} + 2g_2^U\ {}^{(12)}z^{(\nu\mu)} +$$
$$+g_2^U\ {}^{(22)}z^{(\nu\mu)} + g_3^U\ {}^{(12)}\omega^{(\nu\mu)} + 2g_3^U\ {}^{(22)}\omega^{(\nu\mu)} + g^{\nu\mu}\Big(g_3^U\ {}^{11}\omega^{\alpha}_{\alpha}\Big)\Big\} \tag{2.33}$$

Setor-conglomerado:

$$c_U^{\mu} = -A_\nu\Big\{ g_3^A\ {}^{[+-]}z^{[\nu\mu]} + g_7^A\ {}^{+-3}z^{(\nu\mu)} + g^{\nu\mu}\Big(g_4^A\ {}^{(+-3)}_{\alpha}\omega^{\alpha}_{\alpha}\Big)\Big\} - U_\nu\Big\{ 2g_2^U\ {}^{+-3}z^{(\nu\mu)} + 2g_3^U\ {}^{+-3}_{\alpha}\omega^{\alpha}_{\alpha}\Big\} +$$
$$+V_\nu^+\Big\{ g_2^+\ {}^{[13-]}z^{\mu\nu} + g_3^+\ {}^{[14-]}z^{\nu\mu} + g_4^+\ {}^{[23-]}z^{\mu\nu} + g_6^+\ {}^{(13-)}z^{(\nu\mu)} + g_7^+\ {}^{(14-)}z^{(\nu\mu)} + g_8^+\ {}^{(23-)}z^{\mu\nu} +$$
$$+g_9^+\ {}^{(13-)}\omega^{\nu\mu} + g_{10}^+\ {}^{(14-)}\omega^{(\nu\mu)} + g^{\nu\mu}\Big(- g_4^+\ {}^{[13-]}_{\alpha}z^{\alpha}_{\alpha} - g_4^+\ {}^{[23-]}_{\alpha}z^{\alpha}_{\alpha} + g_8^+\ {}^{(13-)}_{\alpha}z^{\alpha}_{\alpha} + g_8^+\ {}^{(23-)}_{\alpha}z^{\alpha}_{\alpha} +$$
$$+g_8^+\ {}^{(13-)}_{\alpha}\omega^{\alpha}_{\alpha} + g_{13}^+\ {}^{(23-)}_{\alpha}\omega^{\alpha}_{\alpha}\Big)\Big\} + V_\nu^-\Big\{ g_2^{+*}\ {}^{[13+]}z^{\mu\nu} + g_3^{+*}\ {}^{[14+]}z^{\nu\mu} + g_4^{+*}\ {}^{[23+]}z^{\mu\nu} +$$
$$+g_6^{+*}\ {}^{(13+)}z^{(\nu\mu)} + g_7^{+*}\ {}^{(14+)}z^{(\nu\mu)} + g_8^{+*}\ {}^{(23+)}z^{\mu\nu} + g_9^{+*}\ {}^{(13+)}\omega^{\nu\mu} + g_{10}^{+*}\ {}^{(14+)}\omega^{(\nu\mu)} +$$
$$+g^{\nu\mu}\Big(- g_4^{+*}\ {}^{[13+]}_{\alpha}z^{\alpha}_{\alpha} - g_4^{+*}\ {}^{[23+]}_{\alpha}z^{\alpha}_{\alpha} + g_8^{+*}\ {}^{(13+)}_{\alpha}z^{\alpha}_{\alpha} + g_8^{+*}\ {}^{(23+)}_{\alpha}z^{\alpha}_{\alpha} + g_8^{+*}\ {}^{(13+)}_{\alpha}\omega^{\alpha}_{\alpha} + g_{13}^{+*}\ {}^{(23+)}_{\alpha}\omega^{\alpha}_{\alpha}\Big)\Big\} \tag{2.34}$$

Setor corrente:

$$j^{\mu}_{U} = A_{\nu}\Big\{g^{A}_{1}F^{\nu\mu} + g^{A}_{2}U^{\nu\mu} + g^{A}_{5}S^{\nu\mu 1} + g^{\nu\mu}\Big(g^{A}_{11}S^{\alpha 1}_{\alpha} + g^{A}_{12}S^{\alpha 2}_{\alpha} + \Big)\Big\} +$$
$$+U_{\nu}\Big\{g^{U}_{1}S^{\nu\mu 1} + g^{\nu\mu}\Big(g^{U}_{4}S^{\alpha 1}_{\alpha} + g^{U}_{5}S^{\alpha 2}_{\alpha}\Big)\Big\} + V^{+}_{\nu}\Big\{g^{+}_{1}V^{\nu\mu -} + g^{+}_{5}S^{\nu\mu -} + g^{\nu\mu}\Big(g^{+}_{11}S^{\alpha -}_{\alpha}\Big)\Big\} +$$
$$+V^{-}_{\nu}\Big\{g^{+*}_{1}V^{\nu\mu +} + g^{+*}_{5}S^{\nu\mu +} + g^{\nu\mu}\Big(g^{+*}_{11}S^{\alpha +}_{\alpha}\Big)\Big\} \tag{2.35}$$

$$\tag{2.36}$$

A equação de continuidade correspondente é

$$\Box\Big(S^{\alpha}_{\alpha U} + z^{\alpha}_{\alpha U}\Big) = \partial.\Big(j_{U} + l_{U} + c_{U} + M_{U}\Big) \tag{2.37}$$

onde os parâmetros $\bar{b}_1, ...$ estão definidos no Apêndice B do paper[47].

As correspondentes expressões das ondas eletromagnéticas ficam:

Spin-1 :

$$\Box\Big(F^{U}_{\nu\mu} + z^{U}_{[\nu\mu]}\Big) = \partial_{\mu}d^{U}_{\nu} - \partial_{\nu}d^{U}_{\mu} + \partial_{\mu}M^{U}_{\nu} - \partial_{\nu}M^{U}_{\mu} + \partial^{\alpha}f^{U}_{\alpha\mu\nu}$$

onde

$$d^{U}_{\mu} = l^{U\,T}_{\mu} + c^{U}_{\mu} + j^{U\,T}_{\mu} \quad \text{e} \quad f^{U}_{\alpha\mu\nu} = \bar{b}_{2}\Big(f^{[12]}_{\alpha\mu\nu} + f^{[+-]}_{\alpha\mu\nu}\Big) + \bar{b}_{3}f^{(+-)}_{\alpha\mu\nu} \tag{2.38}$$

Spin-0 :

$$\Box\Big(S^{\alpha}_{\alpha U} + z^{\alpha}_{\alpha U}\Big) = \partial.\Big(j_{U} - l_{U} - c_{U}\Big) \tag{2.39}$$

2.1.3 Campo V_μ^+ (fóton massivo carregado positivamente)

Spin-1:

$$\partial_\nu\left(F_+^{\nu\mu}+z_+^{[\nu\mu]}\right)+M_{+\,T}^{\mu}+l_{+\,T}^{\mu}+c_{+\,T}^{\mu}=j_{V^+\,T}^{\mu} \tag{2.40}$$

Spin-0:

$$\partial^\mu\left(S_{\alpha+}^{\alpha}+z_{\alpha+}^{\alpha}\right)+M_{+\,L}^{\mu}+l_{+\,L}^{\mu}+c_{+\,L}^{\mu}=j_{V^+\,L}^{\mu} \tag{2.41}$$

Setor T:

$$F_+^{\nu\mu}=\bar{c}_1V^{\nu\mu\,-}\text{ (granular)} \tag{2.42}$$

$$z_+^{[\nu\mu]}=\bar{c}_2\Big(\overset{[-1]}{z}{}^{[\nu\mu]}+\overset{[-2]}{z}{}^{[\nu\mu]}\Big)\text{ (coletivo)} \tag{2.43}$$

Setor-L:

$$S_{\alpha+}^{\alpha}=\bar{c}_3S_{\alpha}^{\alpha-},\text{ (granular)} \tag{2.44}$$

$$z_{\alpha+}^{\alpha}=\bar{c}_4\Big(\overset{(-1)}{z}{}_{\alpha}^{\alpha}+\overset{(-2)}{z}{}_{\alpha}^{\alpha}\Big)+\bar{c}_5\Big(\overset{(-1)}{\omega}{}_{\alpha}^{\alpha}+\overset{(-2)}{\omega}{}_{\alpha}^{\alpha}\Big)\text{ (coletivo)} \tag{2.45}$$

Setor massa:

$$M_+^\mu=\mu_V^2V^{\mu-} \tag{2.46}$$

Setor-London:

$$l_+^\mu=V^{+\mu}\Big\{h_{11}^-\Big(\overset{(11)}{z}{}_{\alpha}^{\alpha}+\overset{(22)}{z}{}_{\alpha}^{\alpha}+2\,\overset{(11)}{\omega}{}_{\alpha}^{\alpha}+2\,\overset{(22)}{\omega}{}_{\alpha}^{\alpha}\Big)\Big\} \tag{2.47}$$

Setor-conglomerado:

$$
\begin{aligned}
c_{+}^{\mu} &= A_{\nu}\Big\{h_{2}^{A}\ {}^{[13-]}z^{\nu\mu} + h_{3}^{A}\ {}^{[23-]}z^{[\nu\mu]} + h_{4}^{A}\ {}^{(23-)}z^{[\nu\mu]} + h_{5}^{A}\ {}^{[24-]}z^{[\nu\mu]} + h_{7}^{A}\ {}^{[23-]}z^{(\nu\mu)} + \\
&+h_{8}^{A}\ {}^{(13-)}z^{(\nu\mu)} + h_{4}^{*A}\ {}^{(23-)}z^{(\nu\mu)} + h_{9}^{A}\ {}^{(24-)}z^{\mu\nu} + h_{10}^{A}\ {}^{(23-)}\omega^{\mu\nu} + h_{11}^{A}\ {}^{(24-)}\omega^{\mu\nu} + \\
&+g^{\nu\mu}\Big(-h_{2}^{A}\ {}^{[13-]}z_{\ \alpha}^{\alpha} - h_{2}^{A}\ {}^{[23-]}z_{\ \alpha}^{\alpha} + h_{8}^{A}\ {}^{(23-)}z_{\ \alpha}^{\alpha} + h_{13}^{A}\ {}^{(13-)}\omega_{\ \alpha}^{\alpha} + h_{13}^{A}\ {}^{(23-)}\omega_{\ \alpha}^{\alpha}\Big)\Big\} + \\
&+U_{\nu}\Big\{h_{2}^{U}\ {}^{[13-]}z^{\mu\nu} + h_{3}^{U}\ {}^{[14-]}z^{\mu\nu} + h_{4}^{U}\ {}^{[23-]}z^{\nu\mu} + h_{6}^{U}\ {}^{(13-)}z^{\mu\nu} + h_{7}^{U}\ {}^{(14-)}z^{\mu\nu} + \\
&+h_{8}^{U}\ {}^{(23-)}z^{\mu\nu} + h_{9}^{U}\ {}^{(13-)}\omega^{\mu\nu} + h_{10}^{U}\ {}^{(14-)}\omega^{\mu\nu} + g^{\nu\mu}\Big(+h_{12}^{U}\ {}^{[13-]}z_{\ \alpha}^{\alpha} - h_{4}^{U}\ {}^{[23-]}z_{\ \alpha}^{\alpha} + \\
&+h_{8}^{U}\ {}^{(13-)}z_{\ \alpha}^{\alpha} + h_{8}^{U}\ {}^{(23-)}z_{\ \alpha}^{\alpha} + h_{12}^{U}\ {}^{(13-)}\omega_{\ \alpha}^{\alpha} + h_{12}^{U}\ {}^{(23-)}\omega_{\ \alpha}^{\alpha}\Big)\Big\} + V_{\nu}^{-}\Big\{h_{3}^{-}\ {}^{[12]}z^{[\nu\mu]} + \\
&+h_{4}^{-}S^{\nu\mu\,1} + h_{6}^{-}\ {}^{(11)}z^{(\nu\mu)} + h_{6}^{-}\ {}^{(22)}z^{(\nu\mu)} + h_{7}^{-}\ {}^{(12)}z^{(\nu\mu)} + 2h_{6}^{-}\ {}^{+-4}z^{(\nu\mu)} + \\
&+h_{7}^{-}\ {}^{[+-]}z^{(\nu\mu)} + h_{8}^{-}\ {}^{(+-)}\omega^{(\nu\mu)} + g^{\nu\mu}\Big(2\ {}^{(12)}z_{\ \alpha}^{\alpha} + 4\ {}^{(12)}\omega_{\ \alpha}^{\alpha} + h_{12}^{-}\ {}^{[+-]}z_{\ \alpha}^{\alpha} + \\
&+h_{13}^{-}\ {}^{(+-)}z_{\ \alpha}^{\alpha} + h_{14}^{-}\ {}^{+-4}\omega_{\ \alpha}^{\alpha}\Big)\Big\}
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

Setor corrente:

$$
\begin{aligned}
j_{V^{+}}^{\mu} &= A_{\nu}\Big\{h_{1}^{A}V^{\nu\mu\,-} + h_{6}^{A}S^{\nu\mu\,-} + g^{\nu\mu}\Big(h_{12}^{A}S_{\alpha}^{\alpha-}\Big)\Big\} + \\
&+U_{\nu}\Big\{h_{1}^{U}V^{\nu\mu\,-} + h_{5}^{U}S^{\nu\mu\,-} + g^{\nu\mu}\Big(h_{11}^{U}S_{\alpha}^{\alpha-}\Big)\Big\} + \\
&+V_{\nu}^{-}\Big\{h_{1}^{-}F^{\nu\mu} + h_{2}^{-}U^{\nu\mu} + h_{4}^{-}S^{\nu\mu\,1} + h_{5}^{-}S^{\nu\mu\,2} + g^{\nu\mu}\Big(h_{9}^{-}S_{\alpha}^{\alpha 1} + h_{10}^{-}S_{\alpha}^{\alpha 2}\Big)\Big\}
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

A equação de continuidade correspondente é

$$
\Box\Big(S_{\alpha+}^{\alpha} + z_{\alpha+}^{\alpha}\Big) = \partial.\Big(j_{+} + l_{+} + c_{+} + M_{+}\Big)
\tag{2.50}
$$

onde os parâmetros $\bar{c}_1, ...$ estão definidos no Apêndice B do paper[47].

As correspondentes expressões das ondas eletromagnéticas ficam:

Spin-1

$$
\Box\Big(F_{\nu\mu}^{+} + z_{[\nu\mu]}^{+}\Big) = \partial_{\mu}d_{\nu}^{+} - \partial_{\nu}d_{\mu}^{+} + \partial_{\mu}M_{\nu}^{+} - \partial_{\nu}M_{\mu}^{+} + \partial^{\alpha}f_{\alpha\mu\nu}^{+}
$$

onde

$$d_{\mu}^{+} = l_{\mu}^{+\,T} + c_{\mu}^{+} + j_{\mu V^{+}}^{T} \quad \text{e} \quad f_{\alpha\mu\nu}^{+} = \bar{c}_2\Big(f_{\alpha\mu\nu}^{[-1]} + f_{\alpha\mu\nu}^{[-2]}\Big) \tag{2.51}$$

Spin-0 :

$$\Box\Big(S_{\alpha+}^{\alpha} + z_{\alpha+}^{\alpha}\Big) = \partial.\Big(j_{+} - l_{+} - c_{+}\Big) \tag{2.52}$$

2.1.4 Campo V_{μ}^{-} (fóton massivo carregado negativamente)

Spin-1:

$$\partial_{\nu}\Big(F_{-}^{\nu\mu} + z_{-}^{[\nu\mu]}\Big) + M_{-\,T}^{\mu} + c_{-\,T}^{\mu} + l_{-\,T}^{\mu} = j_{V^{-}\,T}^{\mu} \tag{2.53}$$

Spin-0:

$$\partial^{\mu}\Big(S_{\alpha-}^{\alpha} + z_{\alpha-}^{\alpha}\Big) + M_{-\,L}^{\mu} + c_{-\,L}^{\mu} + l_{-\,L}^{\mu} = j_{V^{-}\,L}^{\mu} \tag{2.54}$$

onde

Setor T:

$$F_{-}^{\nu\mu} = \bar{c}_1 V^{\nu\mu\,+}, \text{ (granular)} \tag{2.55}$$

$$z_{-}^{[\nu\mu]} = \bar{c}_2\Big(\,{}^{[+1]}z^{[\nu\mu]} + {}^{[+2]}z^{[\nu\mu]}\Big) \text{ (coletivo)} \tag{2.56}$$

Setor L:

$$S_{\alpha-}^{\alpha} = \bar{c}_3 S_{\alpha}^{\alpha+}, \text{ (granular)} \tag{2.57}$$

$$z_{\alpha-}^{\alpha} = \bar{c}_4\Big(\,{}^{(+1)}z_{\alpha}^{\alpha} + {}^{(+2)}z_{\alpha}^{\alpha}\Big) + \bar{c}_5\Big(\,{}^{(+1)}\omega_{\alpha}^{\alpha} + {}^{(+2)}\omega_{\alpha}^{\alpha}\Big) \text{ (coletivo)} \tag{2.58}$$

Setor massa:

$$M_{-}^{\mu} = \mu_V^2 V^{\mu-} \tag{2.59}$$

Setor-London:

$$l_{-}^{\mu} = V^{\mu +}\Big\{ h_{11}^{-*}\Big(\overset{(11)}{z}{}^{\alpha}_{\alpha} + \overset{(22)}{z}{}^{\alpha}_{\alpha} + 2\,\overset{(11)}{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha} + 2\,\overset{(22)}{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha}\Big)\Big\} \tag{2.60}$$

Setor conglomerado:

$$\begin{aligned}
c_{-}^{\mu} &= A_{\nu}\Bigg\{ h_{2}^{A*}\,\overset{[13+]}{z}{}_{\nu\mu} + h_{3}^{A*}\,\overset{[23+]}{z}{}_{[\nu\mu]} + h_{4}^{A*}\,\overset{(23+)}{z}{}_{[\nu\mu]} + h_{5}^{A*}\,\overset{[24+]}{z}{}_{[\nu\mu]} + \\
&+ h_{7}^{A*}\,\overset{[23+]}{z}{}_{(\nu\mu)} + h_{8}^{A*}\,\overset{(13+)}{z}{}_{(\nu\mu)} + h_{4}^{*A}\,\overset{(23+)}{z}{}_{(\nu\mu)} + h_{9}^{A*}\,\overset{(24+)}{z}{}_{\mu\nu} + h_{10}^{A*}\,\overset{(23+)}{\omega}{}_{\mu\nu} + h_{11}^{A*}\,\overset{(24+)}{\omega}{}_{\mu\nu} + \\
&+ g^{\nu\mu}\Big(- h_{2}^{A*}\,\overset{[13+]}{z}{}^{\alpha}_{\alpha} - h_{2}^{A*}\,\overset{[23+]}{z}{}^{\alpha}_{\alpha} + h_{8}^{A*}\,\overset{(13+)}{z}{}^{\alpha}_{\alpha} + h_{8}^{A*}\,\overset{(23+)}{z}{}^{\alpha}_{\alpha} + h_{13}^{A*}\,\overset{(13+)}{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha} + h_{13}^{A*}\,\overset{(23+)}{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha}\Big)\Bigg\} + \\
&+ U_{\nu}\Bigg\{ h_{2}^{U*}\,\overset{[13+]}{z}{}_{\mu\nu} + h_{3}^{U*}\,\overset{[14+]}{z}{}_{\mu\nu} + h_{4}^{U*}\,\overset{[23+]}{z}{}_{\nu\mu} + h_{5}^{U*}S^{\nu\mu +} + h_{6}^{U*}\,\overset{(13+)}{z}{}_{\mu\nu} + \\
&+ h_{7}^{U*}\,\overset{(14+)}{z}{}_{\mu\nu} + h_{8}^{U*}\,\overset{(23+)}{z}{}_{\mu\nu} + h_{9}^{U*}\,\overset{(13+)}{\omega}{}_{\mu\nu} + h_{10}^{U*}\,\overset{(14+)}{\omega}{}_{\mu\nu} + \\
&+ g^{\nu\mu}\Bigg(+ h_{12}^{U}\,\overset{[13+]}{z}{}^{\alpha}_{\alpha} - h_{4}^{U*}\,\overset{[23+]}{z}{}^{\alpha}_{\alpha} + h_{8}^{U*}\,\overset{(13+)}{z}{}^{\alpha}_{\alpha} + h_{8}^{U*}\,\overset{(23+)}{z}{}^{\alpha}_{\alpha} + h_{12}^{U*}\,\overset{(13+)}{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha} + h_{12}^{U*}\,\overset{(23+)}{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha}\Bigg)\Bigg\} + \\
&+ V_{\nu}^{+}\Big\{ h_{3}^{-*}\,\overset{[12]}{z}{}_{[\nu\mu]} + h_{6}^{-*}\,\overset{(11)}{z}{}_{(\nu\mu)} + h_{6}^{-*}\,\overset{(22)}{z}{}_{(\nu\mu)} + h_{7}^{-*}\,\overset{(12)}{z}{}_{(\nu\mu)} + 2h_{6}^{-*}\,\overset{+-4}{z}{}_{(\nu\mu)} + \\
&+ h_{7}^{-*}\,\overset{[+-]}{z}{}_{(\nu\mu)} + h_{8}^{-*}\,\overset{(+-)}{\omega}{}_{(\nu\mu)} + g^{\nu\mu}\Big(2\,\overset{(12)}{z}{}^{\alpha}_{\alpha} + 4\,\overset{(12)}{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha}\Big)\Big\}
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Setor corrente:

$$\begin{aligned}
j_{V^-}^{\mu} &= A_{\nu}\Bigg\{ h_{1}^{A*}V^{\nu\mu +} + h_{6}^{A*}S^{\nu\mu +} + g^{\nu\mu}\Bigg(h_{12}^{A*}S_{\alpha}^{\alpha +}\Bigg)\Bigg\} + \\
&+ U_{\nu}\Bigg\{ h_{1}^{U*}V^{\nu\mu +} + h_{5}^{U*}S^{\nu\mu +} + g^{\nu\mu}\Bigg(h_{11}^{U*}S_{\alpha}^{\alpha +}\Bigg)\Bigg\} + \\
&+ V_{\nu}^{+}\Bigg\{ h_{1}^{-*}F^{\nu\mu} + h_{2}^{-*}U^{\nu\mu} + h_{4}^{-*}S^{\nu\mu\,1} + h_{5}^{-*}S^{\nu\mu\,2} + g^{\nu\mu}\Bigg(h_{9}^{-*}S_{\alpha}^{\alpha 1} + h_{10}^{-*}S_{\alpha}^{\alpha 2}\Bigg)\Bigg\}
\end{aligned} \tag{2.62}$$

A equação de continuidade correspondente é

$$\Box\Big(S_{\alpha -}^{\alpha} + z_{\alpha -}^{\alpha}\Big) = \partial.\Big(j_{-} + l_{-} + M_{-} + c_{-}\Big) \tag{2.63}$$

As correspondentes expressões das ondas eletromagnéticas ficam:

Spin-1 :

$$\Box\Big(F^{-}_{\nu\mu} + z^{-}_{[\nu\mu]}\Big) = \partial_\mu d^{-}_{\nu} - \partial_\nu d^{-}_{\mu} + \partial_\mu M^{-}_{\nu} - \partial_\nu M^{-}_{\mu} + \partial^\alpha f^{-}_{\alpha\mu\nu}$$

onde

$$d^{-}_{\mu} = l^{-\,T}_{\mu} + c^{-}_{\mu} + j^{T}_{\mu V^-} \quad \text{e} \quad f^{-}_{\alpha\mu\nu} = \bar{c}^{*}_{2}\Big(f^{[+1]}_{\alpha\mu\nu} + f^{[+2]}_{\alpha\mu\nu}\Big) \tag{2.64}$$

Spin-0 :

$$\Box\Big(S^{\alpha}_{\alpha-} + z^{\alpha}_{\alpha-}\Big) = \partial.\Big(j_- - l_- - c_-\Big) \tag{2.65}$$

Esse conjunto interdependente eqs.(2.12-2.64) desenvolve cinco características: evolução sistêmica no espaço-tempo, fisicidade dos campos potenciais, conglomerados de campos, campos fontes, constantes de acoplamento neutras. A primeira, corresponde a evoluções nos tensores intensidade de campo no espaço-tempo, com propagações granulares e coletivas, transversais e longitudinais. A seguir, a presença explícita dos campos $A_{\mu I}$. Não são mais termos subsidiários prescritos por Maxwell e Heaviside no século 19. Produzem relações como $A_\mu F^{\mu\nu}$. O terceiro, estão nas relações de campos com as massas (Proca) e entre campos (escalares de London, tensores de polarização e magnetização). A quarta, está nas correntes não-lineares atuando como fontes para os campos, por exemplo, o campo do fóton interagindo com seu próprio campo elétrico e magnético. O quinto aspecto é a presença de constantes de acoplamento além da carga elétrica.

O conjunto de campos $\{A_\mu, U_\mu, V^{\pm}_{\mu}\}$ mostra uma física onde cada evolução espaço-temporal de campo é associada a uma fonte dependendo do conjunto de campos. Consequentemente, a carga elétrica irá ser transportada através de quatro mensageiros, fornecendo novos aspectos em sua lei de conservação, condução, transmissão e interação. Não há mais uma dinâmica individual. Existem quatro campos fornecendo uma causalidade sistêmica. Um determinismo de conjunto com campos granulares e coletivos. As equações relativísticas sistêmicas estão implementando uma nova relação entre campos e fontes eletromagnéticas. Novas constantes de acoplamento despontam. Como resultado, a

transmissão de campos eletromagnéticos contém variáveis e expressões além de Maxwell. Uma nova física da luz emerge. Os fótons se tornam um elemento ativo no fenômeno eletromagnético.

Existe ainda, uma quinta equação de movimento. A chamada de equação da simetria. Originada do teorema de Noether, resulta

$$\partial_\nu K^{\nu\mu} + J_N^\mu = 0, \quad K^{\nu\mu} \equiv \sum_{I=1}^{4} k_I \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_{\mu I})} \tag{2.66}$$

Tomando

$$K^{\nu\mu} = K^{[\mu\nu]} + \tilde{K}^{(\mu\nu)} + g_{\mu\nu} K^\alpha_\alpha \tag{2.67}$$

temos a equação de continuidade

$$\partial_\mu \partial_\nu \tilde{K}^{(\nu\mu)} + \Box K^\alpha_\alpha = 0 \tag{2.68}$$

o que resulta,

$$\sum_{I=1}^{4} k_I \Box \left(S_\alpha^{\alpha I} + z_\alpha^{\alpha I} \right) = 0 \tag{2.69}$$

Substituindo eq.(2.69) em eq.(2.1), temos a lei de conservação sistêmica

$$k_I \partial \cdot \left(m^I + l^I + c^I \right) = k_I \partial \cdot j^I \tag{2.70}$$

onde eq.(2.70) significa a lei de conservação sistêmica envolvendo o conjunto de campos.

Essas equações dinâmicas são complementadas pelas identidades de Bianchi. As identidades de Bianchi antissimétricas são:

$$\partial_\mu F^I_{\nu\rho} + \partial_\rho F^I_{\mu\nu} + \partial_\nu F^I_{\rho\nu} = 0 \tag{2.71}$$

onde $F^I_{\mu\nu} = \{F_{\mu\nu}, U_{\mu\nu}, V^\pm_{\mu\nu}\}$. A relação granular simétrica $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu S^{\rho\sigma}$ não fornece uma identidade de Bianchi.

As relações antissimétricas coletivas de Bianchi são:

$$\partial_\mu z^{GI}_{[\nu\rho]} + \partial_\rho z^{GI}_{[\mu\nu]} + \partial_\nu z^{GI}_{[\rho\mu]} = \gamma_{[12]}\Big\{U_\rho F_{\nu\mu} + U_\mu F_{\nu\rho} + U_\nu F_{\rho\mu} - A_\mu U_{\rho\nu} - A_\nu U_{\rho\mu} - A_\rho U^{\mu\nu}\Big\} + 2\gamma_{[34]}\mathrm{Im}\Big\{V^-_\mu V^+_{\nu\rho} + V^-_\nu V^+_{\rho\mu} + V^-_\rho V^+_{\mu\nu}\Big\} \tag{2.72}$$

ou

$$\partial_\mu \tilde{z}^{(\mu\nu)} = j^\nu_B, \quad \partial_\nu j^\nu_B = 0 \tag{2.73}$$

Eq.(2.73) introduz um tipo de monopólo de campos. Em vez da carga magnética puntiforme de Dirac sua composição de campos é mais próxima dos monopolos de 't Hooft e Polyakov baseados nos campos de Higgs [71]. Monopólos dependendo de campos contém oportunidades na matéria condensada bem como nos gelos de spin [72].

A identidade coletiva simétrica de Bianchi é dada por

$$\begin{aligned}
&\partial_\mu z^{GI}_{(\nu\rho)} + \partial_\rho z^{GI}_{(\mu\nu)} + \partial_\nu z^{GI}_{(\rho\mu)} = \gamma_{(11)}\Big\{A_\mu S^1_{\rho\nu} + A_\nu S^1_{\rho\mu} + A_\rho S^1_{\mu\nu}\Big\} + \\
&+\gamma_{(22)}\Big\{U_\mu S^2_{\rho\nu} + U_\nu S^2_{\rho\mu} + U_\rho S^2_{\mu\nu}\Big\} + \\
&+\gamma_{(12)}\Big\{A_\mu S^2_{\rho\nu} + A_\nu S^2_{\rho\mu} + A_\rho S^2_{\mu\nu} + U_\mu S^1_{\rho\nu} + U_\nu S^1_{\rho\mu} + U_\rho S^1_{\mu\nu}\Big\} + \\
&+2\gamma_{(33)}\mathrm{Re}\Big\{V^-_\mu S^+_{\rho\nu} + V^-_\nu S^+_{\rho\mu} + V^-_\rho S^+_{\mu\nu}\Big\}
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Por fim, existe uma identidade de Bianchi similar à eq.(2.74) para ω^α_α.

Concluindo, observa-se que as equações desenvolvidas demonstram sobre a simetria das diferenças. A partir de uma simetria abeliana comum dada pela eq.(1.1), partículas com spins, massas e cargas diversas são geradas. Uma pluriformidade é construída.

2.1.5 Equação diretiva do fóton

Um sistema completo com (4+1) equações de movimento é derivado a partir da simetria (1.1). Entretanto, dado que o sistema que flui no espaço-tempo possui apenas quatro campos, devemos introduzir uma equação efetiva de tal maneira que reduza o sistema

eletromagnético a quatro equações de movimento. Portanto, o próximo passo será como o sistema assumirá a equação da simetria. Selecionar qual campo será responsável pelo determinismo diretivo. A perspectiva está em que, devido ser o portador da singularidade da invariância da luz, o fóton seja escolhido como diretriz do conjunto de campos.

Recapitulando, a maior dificuldade das equações de Maxwell está na interpretação da luz. Para Maxwell, a luz não é o início, a carga sim. Portanto, um eletromagnetismo baseado na luz ainda falta ser desenvolvido. Nossa interpretação aqui é apresentar o fóton como a diretiva do conjunto de campos. O mensageiro eletromagnético guiando os quatro campos como o vetor de grupo. Portanto, numa dinâmica de conjunto, identificar a simetria da luz através do fóton.

A partir do paradigma da invariância da luz uma nova equação para o fóton deve existir. Essa interpretação faz com que a escolha física da equação da simetria resulta sobre o fóton. Carregando a propriedade singular de ser um absoluto podemos interpretá-lo como a diretiva do conjunto. Algo onde a simetria da luz escolha o fóton como seu guia. Entre os outros campos, ser diferenciado devido ao fato de que a simetria da luz está sobre ele. Para isto, deve incorporar a equação da simetria eq.(2.66) na equação do fóton (2.12) e (2.13).

Uma equação efetiva para o fóton se desenvolve. Na escolha física como quanta diretivo, combina a equação da simetria de Noether com sua equação de Euler-Lagrange. Estas equações associadas fazem o fóton assumir a diretiva a comandar a causalidade do conjunto. Determina uma equação onde o fóton age como o condutor sistêmico. Obtém-se,

Spin-1:

$$\partial_\nu \left(F_w^{\nu\mu} + z_w^{[\nu\mu]} \right) + l_{w\,T}^{\mu} + c_{w\,T}^{\mu} = j_{w\,T}^{\mu} \tag{2.75}$$

Spin-0:

$$\partial^\mu \left(S_{\alpha\,w}^{\alpha} + z_{\alpha\,w}^{\alpha} \right) + l_{w\,L}^{\mu} + c_{w\,L}^{\mu} = j_{w\,L}^{\mu} \tag{2.76}$$

onde o setor transversal é

$$F_w^{\nu\mu} = \bar{\bar{a}}_1 F^{\nu\mu}(\text{granular}) \tag{2.77}$$

$$z_w^{[\nu\mu]} = \bar{\bar{a}}_2 \Big({}^{[12]}_{z}{}^{[\nu\mu]} + {}^{[+-]}_{z}{}^{[\nu\mu]} \Big) + \bar{\bar{a}}_3 \, {}^{(+-)}_{z}{}^{[\nu\mu]}(\text{coletivo}) \tag{2.78}$$

e o setor longitudinal

$$S^{\alpha}_{\alpha\, w} = \Big(\bar{\bar{a}}_4 S^{\alpha 1}_{\alpha} + \bar{\bar{a}}_5 S^{\alpha 2}_{\alpha} \Big)(\text{granular}) \tag{2.79}$$

$$z^{\alpha}_{\alpha\, w} = \bar{\bar{a}}_6 \Big({}^{(11)}_{z}{}^{\alpha}_{\alpha} + {}^{(22)}_{z}{}^{\alpha}_{\alpha} + 2 \, {}^{(12)}_{z}{}^{\alpha}_{\alpha} + 2 \, {}^{(+-3)}_{z}{}^{\alpha}_{\alpha} \Big) + \bar{\bar{a}}_7 \Big({}^{(11)}_{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha} + {}^{(22)}_{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha} + 2 \, {}^{(12)}_{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha} + 2 \, {}^{+-3}_{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha} \Big)(\text{coletivo}) \tag{2.80}$$

O termo de London correspondente é

$$l^{\mu}_{w} = A^{\mu} \Big(r^{A}_{28} \, {}^{(22)}_{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha} + r^{A}_{29} \, {}^{+-3}_{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha} \Big) + U^{\mu} \Big(r^{U}_{27} \, {}^{(11)}_{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha} + r^{U}_{28} \, {}^{+-3}_{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha} \Big) \tag{2.81}$$

O termo conglomerado correspondente é

$$
\begin{aligned}
c^{\mu}_{w} = A_{\nu}\Bigg\{ & r^{A}_{4}\ {}^{[12]}_{z}{}^{[\nu\mu]} + r^{A}_{5}\ {}^{[+-]}_{z}{}^{(\nu\mu)} + r^{A}_{6}\ {}^{(12)}_{\omega}{}^{(\nu\mu)} + r^{A}_{7}\ {}^{[13-]}_{z}{}^{[\nu\mu]} + r^{A}_{8}\ {}^{[23-]}_{z}{}^{[\nu\mu]} + r^{A}_{9}\ {}^{[24-]}_{z}{}^{[\nu\mu]} + \\
& + r^{A}_{10}\ {}^{(23-)}_{z}{}^{[\nu\mu]} - r^{A}_{11}\ {}^{(24-)}_{z}{}^{[\nu\mu]} - r^{A}_{12}\ {}^{(23-)}_{\omega}{}^{[\nu\mu]} - r^{A}_{13}\ {}^{(24-)}_{\omega}{}^{[\nu\mu]} + r^{A*}_{7}\ {}^{[13+]}_{z}{}^{[\nu\mu]} + r^{A*}_{8}\ {}^{[23+]}_{z}{}^{[\nu\mu]} + \\
& + r^{A*}_{9}\ {}^{[24+]}_{z}{}^{[\nu\mu]} + r^{A*}_{10}\ {}^{(23+)}_{z}{}^{[\nu\mu]} - r^{A*}_{11}\ {}^{(24+)}_{z}{}^{[\nu\mu]} - r^{A*}_{12}\ {}^{(23+)}_{\omega}{}^{[\nu\mu]} - r^{A*}_{13}\ {}^{(24+)}_{\omega}{}^{[\nu\mu]} + r^{A}_{17}\ {}^{(11)}_{z}{}^{(\nu\mu)} + \\
& + r^{A}_{18}\ {}^{(22)}_{z}{}^{(\nu\mu)} + r^{A}_{19}\ {}^{+-3}_{z}{}^{(\nu\mu)} + r^{A}_{20}\ {}^{(11)}_{\omega}{}^{(\nu\mu)} + r^{A}_{21}\ {}^{(12)}_{\omega}{}^{(\nu\mu)} + r^{A}_{22}\ {}^{(22)}_{\omega}{}^{(\nu\mu)} + r^{A}_{7}\ {}^{[13-]}_{z}{}^{(\nu\mu)} + r^{A}_{23}\ {}^{[23-]}_{z}{}^{(\nu\mu)} + \\
& + r^{A}_{24}\ {}^{(13-)}_{z}{}^{(\nu\mu)} + r^{A*}_{9}\ {}^{(23-)}_{z}{}^{(\mu\nu)} + r^{A}_{12}\ {}^{(24-)}_{z}{}^{(\nu\mu)} + r^{A}_{13}\ {}^{(23-)}_{\omega}{}^{[\nu\mu]} + r^{A}_{14}\ {}^{(24-)}_{\omega}{}^{(\nu\mu)} + r^{A*}_{7}\ {}^{[13+]}_{z}{}^{(\nu\mu)} + \\
& + r^{A*}_{23}\ {}^{[23+]}_{z}{}^{(\nu\mu)} + r^{A*}_{24}\ {}^{(13+)}_{z}{}^{(\nu\mu)} + r^{A}_{9}\ {}^{(23+)}_{z}{}^{(\mu\nu)} + r^{A*}_{12}\ {}^{(24+)}_{z}{}^{(\nu\mu)} + r^{A*}_{13}\ {}^{(23+)}_{\omega}{}^{[\nu\mu]} + r^{A*}_{14}\ {}^{(24+)}_{\omega}{}^{(\nu\mu)} + \\
& + g^{\nu\mu}\Bigg(- r^{A}_{7}\ {}^{[13-]}_{z}{}^{\alpha}_{\alpha} - r^{A}_{7}\ {}^{[23-]}_{z}{}^{\alpha}_{\alpha} + r^{A}_{24}\ {}^{(13-)}_{z}{}^{\alpha}_{\alpha} + r^{A}_{24}\ {}^{(23-)}_{z}{}^{\alpha}_{\alpha} + r^{A}_{30}\ {}^{(13-)}_{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha} + r^{A}_{30}\ {}^{(23-)}_{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha} - r^{A+}_{7}\ {}^{[13+]}_{z}{}^{\alpha}_{\alpha} + \\
& \qquad - r^{A*}_{7}\ {}^{[23+]}_{z}{}^{\alpha}_{\alpha} + r^{A*}_{24}\ {}^{(13+)}_{z}{}^{\alpha}_{\alpha} + r^{A*}_{24}\ {}^{(23+)}_{z}{}^{\alpha}_{\alpha} + r^{A*}_{30}\ {}^{(13+)}_{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha} + r^{A*}_{30}\ {}^{(23+)}_{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha}\Bigg)\Bigg\} + \\
& + U_{\nu}\Bigg\{ r^{U}_{4}\ {}^{[12]}_{z}{}^{[\nu\mu]} + r^{U}_{4}\ {}^{[+-]}_{z}{}^{(\nu\mu)} + r^{U}_{5}\ {}^{(12)}_{\omega}{}^{[\nu\mu]} + r^{U}_{6}\ {}^{[13-]}_{z}{}^{[\nu\mu]} + r^{U}_{7}\ {}^{[14-]}_{z}{}^{[\nu\mu]} + r^{U}_{8}\ {}^{[23-]}_{z}{}^{[\nu\mu]} + \\
& + r^{U}_{9}\ {}^{(13-)}_{z}{}^{[\nu\mu]} + r^{U}_{10}\ {}^{(14-)}_{z}{}^{[\nu\mu]} + r^{U}_{11}\ {}^{(23-)}_{z}{}^{[\nu\mu]} + r^{U}_{12}\ {}^{(13-)}_{\omega}{}^{[\nu\mu]} + r^{U}_{13}\ {}^{(14-)}_{\omega}{}^{[\nu\mu]} + r^{U*}_{6}\ {}^{[13+]}_{z}{}^{[\nu\mu]} + \\
& + r^{U*}_{7}\ {}^{[14+]}_{z}{}^{[\nu\mu]} + r^{U*}_{8}\ {}^{[23+]}_{z}{}^{[\nu\mu]} + r^{U*}_{9}\ {}^{(13+)}_{z}{}^{[\nu\mu]} + r^{U*}_{10}\ {}^{(14+)}_{z}{}^{[\nu\mu]} + r^{U*}_{11}\ {}^{(23+)}_{z}{}^{[\nu\mu]} + r^{U*}_{12}\ {}^{(13+)}_{\omega}{}^{[\nu\mu]} + \\
& + r^{U*}_{13}\ {}^{(14+)}_{\omega}{}^{[\nu\mu]} + r^{U}_{17}\ {}^{(11)}_{z}{}^{(\nu\mu)} + r^{U}_{18}\ {}^{(12)}_{z}{}^{(\nu\mu)} + r^{U}_{19}\ {}^{(22)}_{z}{}^{(\nu\mu)} + r^{U}_{20}\ {}^{+-3}_{z}{}^{(\nu\mu)} + r^{U}_{21}\ {}^{(11)}_{\omega}{}^{(\nu\mu)} + r^{U}_{22}\ {}^{(12)}_{\omega}{}^{(\nu\mu)} + \\
& + r^{U*}_{13}\ {}^{(14+)}_{\omega}{}^{[\nu\mu]} + r^{U}_{17}\ {}^{(11)}_{z}{}^{(\nu\mu)} + r^{U}_{18}\ {}^{(12)}_{z}{}^{(\nu\mu)} + r^{U}_{8}\ {}^{[23-]}_{z}{}^{(\nu\mu)} - r^{U}_{9}\ {}^{(13-)}_{z}{}^{(\nu\mu)} + -r^{U}_{10}\ {}^{(14-)}_{z}{}^{(\nu\mu)} + \\
& - r^{U}_{11}\ {}^{(23-)}_{z}{}^{(\nu\mu)} - r^{U}_{12}\ {}^{(13-)}_{\omega}{}^{(\nu\mu)} - r^{U}_{13}\ {}^{(14-)}_{\omega}{}^{(\nu\mu)} - r^{U*}_{6}\ {}^{[13+]}_{z}{}^{(\nu\mu)} - r^{U*}_{7}\ {}^{[14+]}_{z}{}^{(\nu\mu)} + r^{U*}_{8}\ {}^{[23+]}_{z}{}^{(\nu\mu)} + \\
& - r^{U*}_{9}\ {}^{(13+)}_{z}{}^{(\nu\mu)} - r^{U*}_{10}\ {}^{(14+)}_{z}{}^{(\nu\mu)} - r^{U*}_{12}\ {}^{(13+)}_{\omega}{}^{(\nu\mu)} - r^{U*}_{13}\ {}^{(14+)}_{\omega}{}^{(\nu\mu)} +
\end{aligned}
$$

$$+g^{\nu\mu}\Bigg(r_{29}^{U}\ {}^{[13-]}_{\ \alpha}z^{\alpha}_{\ \alpha}+r_{30}^{U}\ {}^{[23-]}_{\ \alpha}z^{\alpha}_{\ \alpha}+r_{31}^{U}\ {}^{(13-)}_{\ \alpha}z^{\alpha}_{\ \alpha}+r_{31}^{U}\ {}^{(23-)}_{\ \alpha}z^{\alpha}_{\ \alpha}+r_{29}^{U}\ {}^{(13-)}_{\ \alpha}\omega^{\alpha}_{\ \alpha}$$

$$+r_{29}^{U}\ {}^{(23-)}_{\ \alpha}\omega^{\alpha}_{\ \alpha}+r_{29}^{U*}\ {}^{[13+]}_{\ \alpha}z^{\alpha}_{\ \alpha}+r_{30}^{U*}\ {}^{[23+]}_{\ \alpha}z^{\alpha}_{\ \alpha}+r_{31}^{U*}\ {}^{(13+)}_{\ \alpha}z^{\alpha}_{\ \alpha}+r_{31}^{U*}\ {}^{(23+)}_{\ \alpha}z^{\alpha}_{\ \alpha}+r_{29}^{U*}\ {}^{(13+)}_{\ \alpha}\omega^{\alpha}_{\ \alpha}+r_{29}^{U*}\ {}^{(23+)}_{\ \alpha}\omega^{\alpha}_{\ \alpha}\Bigg)\Bigg\}+$$

$$+V_{\nu}^{+}\Bigg\{r_{4}^{+}\ {}^{[12]}z^{[\nu\mu]}-iqc_{2}\Big({}^{[-1]}z^{[\nu\mu]}+{}^{[-2]}z^{[\nu\mu]}\Big)+r_{5}^{+}\ {}^{[13-]}z^{[\nu\mu]}+r_{6}^{+}\ {}^{[14-]}z^{[\nu\mu]}+r_{7}^{+}\ {}^{[23-]}z^{[\nu\mu]}+$$

$$+f_{6}^{+}\ {}^{[24-]}z^{[\nu\mu]}-f_{7}^{+}\ {}^{(13-)}z^{[\nu\mu]}+r_{8}^{+}\ {}^{(23-)}z^{[\nu\mu]}+r_{9}^{+}\ {}^{(13-)}\omega^{[\nu\mu]}+f_{12}^{+}\ {}^{(24-)}\omega^{[\nu\mu]}+r_{13}^{+}\ {}^{(11)}z^{(\nu\mu)}+$$

$$+r_{14}^{+}\ {}^{(22)}z^{(\nu\mu)}+r_{15}^{+}\ {}^{(12)}z^{(\nu\mu)}+r_{16}^{+}\ {}^{+-4}z^{(\nu\mu)}+r_{17}^{+}\ {}^{[+-]}z^{(\nu\mu)}+r_{18}^{+}\ {}^{(+-)}\omega^{(\nu\mu)}-iqc_{4}\Big({}^{(-1)}z^{(\nu\mu)}+{}^{(-2)}z^{(\nu\mu)}\Big)+$$

$$+r_{19}^{+}\ {}^{[13-]}z^{(\nu\mu)}+r_{20}^{+}\ {}^{[14-]}z^{(\nu\mu)}+r_{21}^{+}\ {}^{[23-]}z^{(\nu\mu)}+f_{6}^{+}\ {}^{[24-]}z^{(\nu\mu)}+r_{22}^{+}\ {}^{(13-)}z^{(\nu\mu)}+r_{23}^{+}\ {}^{(14-)}z^{(\nu\mu)}+$$

$$+r_{24}^{+}\ {}^{(23-)}\omega^{(\nu\mu)}+f_{10}^{+}\ {}^{(24-)}\omega^{(\nu\mu)}+r_{24}^{+}\ {}^{(13-)}\omega^{(\nu\mu)}+r_{25}^{+}\ {}^{(14-)}\omega^{(\nu\mu)}+f_{11}^{+}\ {}^{(23-)}\omega^{(\mu\nu)}+f_{12}^{+}\ {}^{(24-)}z^{(\nu\mu)}+$$

$$+g^{\nu\mu}\Bigg(-iqc_{6}\Big({}^{(-1)}z^{\alpha}_{\ \alpha}+{}^{(-2)}z^{\alpha}_{\ \alpha}\Big)-iqc_{7}\Big({}^{(-1)}\omega^{\alpha}_{\ \alpha}+{}^{(-2)}\omega^{\alpha}_{\ \alpha}\Big)+r_{29}^{+}\ {}^{[13-]}z^{\alpha}_{\ \alpha}+$$

$$+r_{29}^{+}\ {}^{[23-]}z^{\alpha}_{\ \alpha}++r_{30}^{+}\ {}^{(13-)}z^{\alpha}_{\ \alpha}+r_{30}^{+}\ {}^{(23-)}z^{\alpha}_{\ \alpha}+r_{31}^{+}\ {}^{(13-)}\omega^{\alpha}_{\ \alpha}+r_{32}^{+}\ {}^{(23-)}\omega^{\alpha}_{\ \alpha}\Bigg)\Bigg\}+$$

$$+V_{\nu}^{-}\Bigg\{r_{4}^{+*}\ {}^{[12]}z^{[\nu\mu]}+iqc_{2}\Big({}^{[+1]}z^{[\nu\mu]}+{}^{[+2]}z^{[\nu\mu]}\Big)+r_{5}^{+*}\ {}^{[13+]}z^{[\nu\mu]}+r_{6}^{+*}\ {}^{[14+]}z^{[\nu\mu]}+r_{7}^{+*}\ {}^{[23+]}z^{[\nu\mu]}+$$

$$+f_{6}^{+*}\ {}^{[24+]}z^{[\nu\mu]}-f_{7}^{+*}\ {}^{(13+)}z^{[\nu\mu]}+r_{8}^{+*}\ {}^{(23+)}z^{[\nu\mu]}+r_{9}^{+*}\ {}^{(13+)}\omega^{[\nu\mu]}+f_{12}^{+}\ {}^{(24+)}\omega^{[\nu\mu]}+r_{13}^{+*}\ {}^{(11)}z^{(\nu\mu)}+$$

$$+r_{14}^{+*}\ {}^{(22)}z^{(\nu\mu)}+r_{15}^{+*}\ {}^{(12)}z^{(\nu\mu)}+r_{16}^{+*}\ {}^{+-4}z^{(\nu\mu)}+r_{17}^{+*}\ {}^{[+-]}z^{(\nu\mu)}+r_{18}^{+*}\ {}^{(+-)}\omega^{(\nu\mu)}++r_{19}^{+*}\ {}^{[13+]}z^{(\nu\mu)}+$$

$$+iqc_{4}\Big({}^{(+1)}z^{(\nu\mu)}+{}^{(+2)}z^{(\nu\mu)}\Big)+r_{20}^{+*}\ {}^{[14+]}z^{(\nu\mu)}+r_{21}^{+*}\ {}^{[23+]}z^{(\nu\mu)}+f_{6}^{+*}\ {}^{[24+]}z^{(\nu\mu)}+r_{22}^{+*}\ {}^{(13+)}z^{(\nu\mu)}+$$

$$+r_{23}^{+*}\ {}^{(14+)}z^{(\nu\mu)}+r_{24}^{+*}\ {}^{(23+)}\omega^{(\nu\mu)}+f_{10}^{+*}\ {}^{(24+)}\omega^{(\nu\mu)}+r_{24}^{+*}\ {}^{(13+)}\omega^{(\nu\mu)}+r_{25}^{+*}\ {}^{(14+)}\omega^{(\nu\mu)}+$$

$$+f_{11}^{+*}\ {}^{(23+)}\omega^{(\mu\nu)}+f_{12}^{+}\ {}^{(24+)}z^{(\nu\mu)}+g^{\nu\mu}\Bigg(iqc_{6}\Big({}^{(+1)}z^{\alpha}_{\ \alpha}+{}^{(+2)}z^{\alpha}_{\ \alpha}\Big)+iqc_{7}\Big({}^{(+1)}\omega^{\alpha}_{\ \alpha}+{}^{(+2)}\omega^{\alpha}_{\ \alpha}\Big)+$$

$$+r_{29}^{+*}\ {}^{[13+]}z^{\alpha}_{\ \alpha}+r_{29}^{+*}\ {}^{[23+]}z^{\alpha}_{\ \alpha}+r_{30}^{+*}\ {}^{(13+)}z^{\alpha}_{\ \alpha}+r_{30}^{+*}\ {}^{(23+)}z^{\alpha}_{\ \alpha}+r_{31}^{+*}\ {}^{(13+)}\omega^{\alpha}_{\ \alpha}+r_{32}^{+*}\ {}^{(23+)}\omega^{\alpha}_{\ \alpha}\Bigg)\Bigg\}\qquad(2.82)$$

A corrente sistêmica não-linear é escrita como

$$j^{\mu}_{\rm w} = A_{\nu}\Bigg\{ r^{A}_{1}F^{\nu\mu} + r^{A}_{2}U^{\nu\mu} + r^{A}_{3}V^{\nu\mu-} + r^{A\,*}_{3}V^{\nu\mu+} + r^{A}_{14}S^{\nu\mu 1} +$$

$$+ r^{A}_{15}S^{\nu\mu 2} + r^{A}_{16}S^{\nu\mu-} + r^{A\,*}_{16}S^{\nu\mu-} + g^{\nu\mu}\Bigg(r^{A}_{25}S^{\alpha 1}_{\alpha} + r^{A}_{26}S^{\alpha 2}_{\alpha} + r^{A}_{27}S^{\alpha-}_{\alpha} + r^{A*}_{27}S^{\alpha+}_{\alpha}\Bigg) +$$

$$+ U_{\nu}\Bigg\{ r^{U}_{1}F^{\nu\mu} + r^{U}_{2}U^{\nu\mu} + r^{U}_{3}V^{\nu\mu+} + r^{U*}_{3}V^{\nu\mu-} + r^{U}_{14}S^{\nu\mu 1} + r^{U}_{15}S^{\nu\mu 2} +$$

$$+ r^{U}_{16}S^{\nu\mu-} + r^{U*}_{16}S^{\nu\mu+} + g^{\nu\mu}\Bigg(r^{U}_{24}S^{\alpha 1}_{\alpha} + r^{U}_{25}S^{\alpha 2}_{\alpha} + r^{U}_{26}S^{\alpha-}_{\alpha} + r^{U*}_{26}S^{\alpha+}_{\alpha}\Bigg)\Bigg\} +$$

$$+ V^{+}_{\nu}\Bigg\{ r^{+}_{1}F^{\nu\mu} + r^{+}_{2}U^{\nu\mu} + (r^{+}_{3} - iqc_1)V^{\nu\mu-} + r^{+}_{10}S^{\nu\mu 1} +$$

$$+ r^{+}_{11}S^{\nu\mu 2} + (r^{+}_{12} - iqc_3)S^{\nu\mu-} + g^{\nu\mu}\Bigg(r^{+}_{26}S^{\alpha 1}_{\alpha} + r^{+}_{27}S^{\alpha 2}_{\alpha} + (r^{+}_{28} - iqc_5)S^{\alpha-}_{\alpha}\Bigg)\Bigg\} +$$

$$+ V^{-}_{\nu}\Bigg\{ r^{+*}_{1}F^{\nu\mu} + r^{+*}_{2}U^{\nu\mu} + (r^{+*}_{3} + iqc_1)V^{\nu\mu+} + r^{+*}_{10}S^{\nu\mu 1} +$$

$$+ r^{+}_{11}S^{\nu\mu 2} + (r^{+}_{12} + iqc_3)S^{\nu\mu+} + + g^{\nu\mu}\Bigg(r^{+*}_{26}S^{\alpha 1}_{\alpha} + r^{+*}_{27}S^{\alpha 2}_{\alpha} + (r^{+*}_{28} + iqc_5)S^{\alpha+}_{\alpha}\Bigg)\Bigg\} \qquad (2.83)$$

Os coeficientes correspondentes nestas equações estão determinados no Apêndice C do paper [47].

A equação de continuidade total é

$$\Box\Big(S^{\alpha}_{\alpha\, w} + z^{\alpha}_{\alpha\, w}\Big) = \partial\cdot(j_w - l_w - c_w) \qquad (2.84)$$

Diferentemente da equação eq.eqrefcefoton, a eq.(2.84) fornece uma carga fotônica. Fisicamente, uma carga fotônica dependendo da carga elétrica é obtida. Note no Apêndice C do paper [47] que para alguns termos a carga elétrica (ou um múltiplo dela) é o coeficiente do termo líder.

Portanto, o conjunto de campos $\{A_{\mu}, U_{\mu}, V^{\pm}_{\mu}\}$ flui uma dinâmica sistêmica baseada em quatro equações. Elas são: a equação efetiva do fóton mais os 3 campos associados

ao fluxo dirigido pelo fóton. Juntos, fluem no espaço-tempo um conjunto onde Maxwell se torna um setor. Existe um maior oceano eletromagnético carregando cargas e campos diferentes a serem explorados.

2.2 Equações de Maxwell Globais na Forma Vetorial

O próximo objetivo é o de rever as equações covariantes na forma vetorial. O modelo impõe um conjunto de campos $A_{\mu_I} = \{A_\mu, U_\mu, V_\mu^\pm\}$ interligados através de uma parâmetro de gauge comum conforme mostra a eq.(1.1). Essa associação provoca uma dinâmica sistêmica (network, diretriz, circunstância) e a propagar famílias de spin-1 e spin-0 a serem vistas na forma vetorial.O grupo de Lorentz consegue dar a informação sobre o spin através do índice de covariância μ. Desta maneira podemos compreender a respeito dos tipos de spin associados ao 'field strength'. Considere o termo $\partial_\mu A_\nu : \big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big)\otimes = \big(0,0\big) + \big(0,1\big) + \big(1,0\big) + \big(1,1\big)$. A partir dessa decomposição entendemos que um tensor $Z_{\mu\nu}$ genérico contém 16 graus de liberdade a serem divididos entre setores antissimétricos e simétricos.

a) Tensor antissimétrico

$$Z_{[\mu\nu]} \in \underbrace{\big(0,1\big)}_{\text{3 graus de liberdade}} + \underbrace{\big(1,0\big)}_{\text{3 graus de liberdade}} \tag{2.85}$$

Portanto, o tensor $Z_{[\mu\nu]}$ carrega 2 spin-1. São os campos $\vec{E} - \vec{B}/\vec{e} - \vec{b}$.

b) Tensor simétrico

Façamos a seguinte decomposição do tensor $Z_{(\mu\nu)}$. Primeiramente a respeito de seu traço,

$$tr Z_{(\mu\nu)} \equiv \eta^{\mu\nu} Z_{(\mu\nu)} \equiv Z_\alpha^\alpha \in \underbrace{\big(0,0\big)}_{\text{1 grau de liberdade}} \tag{2.86}$$

e a seguir de um setor com traço zero.

$$\tilde{Z}_{(\mu\nu)} \equiv Z_{(\mu\nu)} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}Z_{\alpha\beta} \in \underbrace{(1,1)}_{\text{9 graus de liberdade}} \tag{2.87}$$

Portanto, existem dois tipos de spin-0 em $Z_{(\mu\nu)}$. Um originário da parte $s=0$ e outra da $s=1\big(1,0,-1\big)$. O resultado é que o tensor $Z_{(\mu\nu)}$ contém 2 spin-0, 1 spin-1, 1 spin-2 a serem estudados de maneira dinâmica. Entretanto a identidade cinética reduz o termo $Z_{(\mu\nu)}$ em termos da parte antissimétrica e escalar. Tensorialmente podemos reescrever $\tilde{Z}_{\mu\nu}$ como

$$\tilde{Z}_{\mu\nu} = \partial_\mu\partial_\nu\phi + \partial_\mu W_\nu + \partial_\nu W_\mu + X_{\mu\nu} \tag{2.88}$$

onde $\partial\cdot W=0$ e $\partial^\mu X_{\mu\nu}=0$, o que resulta nos termos $\underbrace{\partial^\mu\partial^\nu\tilde{Z}_{\mu\nu}}_{\text{spin 0}}$; $\underbrace{\partial^\mu\tilde{S}_{\mu\nu}}_{\text{spin 1}}$; $\underbrace{\tilde{X}_{\mu\nu}}_{\text{spin 2}}$

Três tipos de campos eletromagnéticos surgem da eq.(2.1). São os campos granulares de spin-1, $\vec{E}_I - \vec{B}_I$; campos coletivos $\vec{e}_I - \vec{b}_I$; os associados campos escalares coletivos e granulares; e os field balls $\gamma_{IJ}\Phi^J$, $\gamma_{IJ}\vec{A}^J$ agindo como fontes.

Definindo:

$$F_{[\mu\nu]} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad z_{[\mu\nu]} = \begin{pmatrix} 0 & e_x & e_y & e_z \\ -e_x & 0 & -b_z & b_y \\ -e_y & b_z & 0 & -b_x \\ -e_z & -b_y & b_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} S & S_x & S_y & S_z \\ S_x & S_{xx} & \overset{\leftrightarrow}{S}_z & \overset{\leftrightarrow}{S}_y \\ S_y & \overset{\leftrightarrow}{S}_z & S_{yy} & \overset{\leftrightarrow}{S}_x \\ S_z & \overset{\leftrightarrow}{S}_y & \overset{\leftrightarrow}{S}_x & S_{zz} \end{pmatrix} \quad z_{(\mu\nu)} = \begin{pmatrix} s & s_x & s_y & s_z \\ s_x & s_{xx} & \overset{\leftrightarrow}{s}_z & \overset{\leftrightarrow}{s}_y \\ s_y & \overset{\leftrightarrow}{s}_z & s_{yy} & \overset{\leftrightarrow}{s}_x \\ s_z & \overset{\leftrightarrow}{s}_y & \overset{\leftrightarrow}{s}_x & s_{zz} \end{pmatrix}$$

$$F_{0i} \equiv \vec{E}_{A\,i}, \quad F_{ij} \equiv \epsilon_{ijk}\vec{B}_{A\,k}, \quad U_{0i} \equiv \vec{E}_{U\,i}, \quad U_{ij} \equiv \epsilon_{ijk}\vec{B}_{U\,k}, \quad V^\pm_{0i} \equiv \vec{E}_{\pm\,i}, \quad V^\pm_{ij} \equiv \epsilon_{ijk}\vec{B}_{\pm\,k},$$
$$S^1_{00} \equiv S_A, \quad S^1_{0i} \equiv \vec{S}_A, \quad S^1_{ij} \equiv \overset{\leftrightarrow}{S}_A, S^2_{00} \equiv S_U, \quad S^2_{0i} \equiv \vec{S}_U, \quad S^2_{ij} \equiv \overset{\leftrightarrow}{S}_U, \quad S^\pm_{00} \equiv S_{\pm\,i},$$
$$S^\pm_{0i} \equiv \vec{S}_\pm, \quad S^\pm_{ij} \equiv \overset{\leftrightarrow}{S}_\pm, \quad z_{[0i]} \equiv \vec{e}_i, \quad z_{[ij]} \equiv \epsilon_{ijk}\vec{b}_k, \quad z_{(00)} \equiv s, \quad z_{(0i)} \equiv \vec{s}, \quad z_{(ij)} \equiv \overset{\leftrightarrow}{s}$$
$$\omega_{[0i]} \equiv \vec{e}_{\omega\,i}, \quad \omega_{[ij]} \equiv \epsilon_{ijk}\vec{b}_{\omega\,k}, \quad \omega_{(00)} \equiv s_\omega, \quad \omega_{(0i)} \equiv \vec{s}_\omega, \quad \omega_{(ij)} \equiv \overset{\leftrightarrow}{s}_\omega \tag{2.89}$$

pode-se expressar o conjunto de equações de Maxwell.

O eletromagnetismo de Quatro Campos é formado por 4 equações vetoriais de Maxwell interdependentes com uma lei de conservação de energia-momento geral a todas. Abaixo ao descrevermos

2.2.1 Campo do fóton A_μ

Para spin-1:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}_A+\vec{e}_A\right)+l_A^T=\rho_A^T \tag{2.90}$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{B}_A+\vec{b}_A\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}_A+\vec{e}_A\right)+\vec{l}_A^T=\vec{J}_A^T \tag{2.91}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_A=0 \tag{2.92}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}_A=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}_A \tag{2.93}$$

com a equação de continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_A^T-l_A^T\right)+\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{J}_A^T-\vec{l}_A^T\right)=0 \tag{2.94}$$

Para spin-0:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(S_{A\alpha}^{\ \alpha}+s_{A\alpha}^{\ \alpha}\right)+l_A^L=\rho_A^L \tag{2.95}$$

$$-\vec{\nabla}\left(S_{A\alpha}^{\ \alpha}+s_{A\alpha}^{\ \alpha}\right)+\vec{l}_A^L=\vec{J}_A^L \tag{2.96}$$

com a equação de continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_A^L-l_A^L\right)+\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{J}_A^L-\vec{l}_A^L\right)=0 \tag{2.97}$$

2.2.2 Campo do fóton massivo-U_μ

Para spin-1:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}_U+\vec{e}_U\right)+l_U^T+M_U^T=\rho_U^T \tag{2.98}$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{B}_U+\vec{b}_U\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}_U+\vec{e}_U\right)+\vec{l}_U^T+\vec{M}_U^T=\vec{J}_U^T \tag{2.99}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_U=0 \tag{2.100}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}_U=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}_U \tag{2.101}$$

com a equação de continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_U^T-l_U^T-M_U^T\right)+\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{J}_U^T-\vec{l}_U^T-\vec{M}_U^T\right)=0 \tag{2.102}$$

Para spin-0:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(S_{U\alpha}^{\alpha}+s_{U\alpha}^{\alpha}\right)+l_U^L+M_U^L=\rho_U^L \tag{2.103}$$

$$-\vec{\nabla}\left(S_{U\alpha}^{\alpha}+s_{U\alpha}^{\alpha}\right)+\vec{l}_U^L+\vec{M}_U^L=\vec{J}_U^L \tag{2.104}$$

com a equação de continuidade

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_U^L-l_U^L-M_U^L\right)+\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{J}_U^L-\vec{l}_U^L-\vec{M}_U^L\right)=0 \tag{2.105}$$

2.2.3 Fóton carregado positivamente-V_μ^+

Para spin-1:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}_++\vec{e}_+\right)+l_+^T+M_+^T=\rho_+^T \tag{2.106}$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{B}_++\vec{b}_+\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}_++\vec{e}_+\right)+\vec{l}_+^T+\vec{M}_+^T=\vec{J}_+^T \tag{2.107}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_+=0 \tag{2.108}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}_+=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}_+ \tag{2.109}$$

com a equação de continuidade

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_+^T - l_+^T - M_+^T\right) + \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{J}_+^T - \vec{l}_+^T - \vec{M}_+^T\right) = 0 \tag{2.110}$$

Para spin-0:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(S_{+\alpha}^{\alpha} + s_{+\alpha}^{\alpha}\right) + l_+^L + M_+^L = \rho_+^L \tag{2.111}$$

$$-\vec{\nabla}\left(S_{+\alpha}^{\alpha} + s_{+\alpha}^{\alpha}\right) + \vec{l}_+^L + \vec{M}_+^L = \vec{J}_+^L \tag{2.112}$$

com a equação de continuidade

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_+^L - l_+^L - M_+^L\right) + \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{J}_+^L - \vec{l}_+^L - \vec{M}_+^L\right) = 0 \tag{2.113}$$

2.2.4 Campo do fóton carregado negativamente-V_μ^-

Para spin-1:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}_- + \vec{e}_-\right) + l_-^T + M_-^T = \rho_-^T \tag{2.114}$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{B}_- + \vec{b}_+\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}_- + \vec{e}_+\right) + \vec{l}_-^T + \vec{M}_-^T = \vec{J}_-^T \tag{2.115}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_- = 0 \tag{2.116}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}_- = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}_- \tag{2.117}$$

com a equação de continuidade

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_-^T - l_-^T - M_-^T\right) + \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{J}_-^T - \vec{l}_-^T - \vec{M}_-^T\right) = 0 \tag{2.118}$$

Para spin-0:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(S_{-\alpha}^{\alpha} + s_{-\alpha}^{\alpha}\right) + l_-^L + M_-^L = \rho_-^L \tag{2.119}$$

$$-\vec{\nabla}\left(S_{-\alpha}^{\alpha} + s_{-\alpha}^{\alpha}\right) + \vec{l}_-^L + \vec{M}_-^L = \vec{J}_-^L \tag{2.120}$$

com a equação de continuidade

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\rho_{-}^{L} - l_{-}^{L} - M_{-}^{L}\Big) + \vec{\nabla}\cdot\Big(\vec{J}_{-}^{L} - \vec{l}_{-}^{L} - \vec{M}_{-}^{L}\Big) = 0 \tag{2.121}$$

Note que as equações acima contém termos além de Maxwell. Eles são os vetores de polarização, massas, termos de London e campos não-lineares nos seus próprios campos.

2.2.5 Equações de Bianchi coletivas na Forma Vetorial

Spin-1

$$\vec{\nabla}\times\vec{e} + \frac{\partial\vec{b}}{\partial t} = \vec{j}_{c} \tag{2.122}$$

onde

$$\vec{j}_{c} = \gamma_{[12]}\Big\{\phi\vec{B}_{U} - \phi_{U}\vec{B}_{A} + \vec{A}\times\vec{E}_{U} - \vec{U}\times\vec{E}_{A}\Big\} - 2\gamma_{[34]}\mathrm{Im}\Big\{\phi^{-}\vec{B}^{+} + \vec{V}^{-}\times\vec{E}^{+}\Big\} \tag{2.123}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{b} = \rho_{c} \tag{2.124}$$

onde

$$\rho_{c} = \gamma_{[12]}\Big\{\vec{U}\cdot\vec{B}_{A} - \vec{A}\cdot\vec{B}_{U}\Big\} + 2\gamma_{[34]}\mathrm{Im}\Big\{\vec{V}^{-}\cdot\vec{B}^{+}\Big\} \tag{2.125}$$

que resulta na equação da continuidade

$$\frac{\partial\rho_{c}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_{c} = 0 \tag{2.126}$$

Spin-0 :

Na forma escalar

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \gamma_{(11)}\Big(\phi S_{A}\Big) + \gamma_{(22)}\Big(\phi_{U}S_{U}\Big) + \gamma_{(12)}\Big(\phi S_{U} + \phi_{U}S_{A}\Big) + 2\gamma_{(33)}\mathrm{Re}\Big(\phi_{-}S_{+}\Big) \tag{2.127}$$

Na forma tensorial

$$\frac{\partial s_{ij}}{\partial t}+\partial_j\vec{s}_i+\partial_i\vec{s}_j=\gamma_{(11)}\Big\{\phi S_{A\,ij}+\vec{A}_i\vec{S}_{Aj}+\vec{A}_j\vec{S}_{Ai}\Big\}+$$
$$+\gamma_{(22)}\Big\{\phi_U S_{U\,ij}+\vec{U}_i\vec{S}_{Uj}+\vec{U}_j\vec{S}_{Ui}\Big\}+2\gamma_{(33)}\mathrm{Re}\Big\{\phi_- S_{+\,ij}+\vec{V}_i^{-}\vec{S}_{+j}+\vec{V}_j^{-}\vec{S}_{+i}\Big\}+$$
$$+\gamma_{(12)}\Big\{\phi S_{U\,ij}+\vec{A}_i\vec{S}_{Uj}+\vec{A}_j\vec{S}_{Ui}+\phi_U S_{A\,ij}+\vec{U}_i\vec{S}_{Aj}+\vec{U}_j\vec{S}_{Ai}\Big\} \tag{2.128}$$

Em uma segunda forma tensorial

$$\partial_i s_{(jk)}+\partial_k s_{(ij)}+\partial_j s_{(ik)}=\gamma_{(11)}\Big\{A_i S_{A\,jk}+A_j S_{A\,ik}+A_k S_{A\,ij}\Big\}+$$
$$+\gamma_{(22)}\Big\{U_i S_{U\,jk}+U_\nu S_{U\,ik}+U_k S_{U\,ij}\Big\}+2\gamma_{(33)}\mathrm{Re}\Big\{V_i^{-}S_{+\,jk}+V_j^{-}S_{+\,ik}+V_k^{-}S_{+\,ij}\Big\}+$$
$$+\gamma_{(12)}\Big\{A_i S_{U\,jk}+A_j S_{U\,ik}+A_j S_{U\,ij}+U_i S_{A\,jk}+U_j S_{A\,ik}+U_k S_{A\,ij}\Big\} \tag{2.129}$$

2.2.6 Equação do Fóton Diretivo na Forma Vetorial

Spin-1 :

$$\vec{\nabla}\cdot\Big(\vec{E}_w+\vec{e}_w\Big)+M_w^T+l_w^T=\rho_w^T \tag{2.130}$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{B}_w+\vec{b}_w\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}_w+\vec{e}_w\right)-+\vec{M}_w^T+\vec{l}_w^T=\vec{J}_w^T \tag{2.131}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_w=0 \tag{2.132}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}_w=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}_w \tag{2.133}$$

com a equação de continuidade

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\rho_w^T-l_w^T-M_w^T\Big)+\vec{\nabla}\cdot\Big(\vec{J}_w^T-\vec{l}_w^T-\vec{M}_w^T\Big)=0 \tag{2.134}$$

Spin-0 :

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(S_{w\alpha}^{\alpha}+s_{w\alpha}^{\alpha}\Big)+l_w^L=\rho_w^L \tag{2.135}$$

$$-\vec{\nabla}\left(S_{w\alpha}^{\alpha}+s_{w\alpha}^{\alpha}\right)+\vec{M}_w^L+\vec{l}_w^L=\vec{J}_w^L \tag{2.136}$$

com a equação de continuidade

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_w^L - l_w^L - M_-^L\right) + \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{J}_w^L - \vec{l}_-^L - \vec{M}_w^L\right) = 0 \tag{2.137}$$

2.3 Tensor Energia Momento

O sistema de Quatro Campos desenvolve um fluxo descrito pela densidade de energia, vetor de Poynting e tensor de cisalhamento. As suas leis de conservação são dadas por:

$$\frac{\partial}{\partial t}U + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0 \tag{2.138}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}S_i + \partial_j T_{ij} = 0 \tag{2.139}$$

2.3.1 Energia

A densidade de energia do sistema de campos é dada por:

$$U = U_A + U_S + U_M + U_{GF} + U_I \tag{2.140}$$

onde o termo cinético antissimétrico é dado por

$$U_T = a_1(|\vec{E}_A|^2 + |\vec{B}_A|^2) + a_2(|\vec{E}_U|^2 + |\vec{B}_U|^2) + a_3(\vec{E}_+\cdot\vec{E}_- + \vec{B}_+\cdot\vec{B}_-) \tag{2.141}$$

O termo cinético simétrico contribui como

$$\begin{aligned}
U_S = &-\frac{3}{2}b_{(11)}S_A^2 - b_{11}\vec{S}_A\cdot\vec{S}_A + \frac{1}{2}\overleftrightarrow{S}_A\cdot\overleftrightarrow{S}_A + \\
&-\frac{3}{2}b_{(22)}S_U^2 - b_{(22)}\vec{S}_U\cdot\vec{S}_U + \frac{1}{2}b_{(22)}\overleftrightarrow{S}_U\cdot\overleftrightarrow{S}_U - 3b_{(33)}S_+S_- - 2b_{(33)}\vec{S}_+\cdot\vec{S}_- + b_{33}\overleftrightarrow{S}_+\cdot\overleftrightarrow{S}_- + \\
&-\frac{5}{2}c_{(11)}S_A^2 - 3c_{(11)}S_AS_{i\,A}^i - \frac{1}{2}c_{(11)}S_{i\,A}^{i\,2} - \frac{5}{2}c_{(22)}S_U^2 - 3c_{(22)}S_US_{i\,U}^i - \frac{1}{2}c_{(22)}S_{i\,U}^{i\,2} + \\
&-3c_{(33)}S_+S_- - 4c_{(33)}S_+S_{-\,i}^i - 4c_{(33)}S_-S_{+\,i}^i + c_{(33)}S_{i\,+}^iS_{j\,-}^j
\end{aligned} \tag{2.142}$$

Observe que os termos de energia negativa podem ser eliminados pelos termos de gauge fixing.

O termo de massa

$$U_M = \frac{3}{4}m_U^2\phi_U^2 - \frac{1}{4}m_u^2|\vec{U}|^2 + \frac{3}{2}m_\pm^2\phi_+\phi_- - \frac{1}{2}m_\pm^2\vec{V}_+\cdot\vec{V}_- \tag{2.143}$$

O setor de gauge-fixing

$$U_{GF} = -\frac{5}{8}\xi_{(11)}S_A^2 - \frac{3}{4}\xi_{(11)}S_A S_{A\,i}^i - \frac{1}{8}\xi_{(11)}S_{A\,i}^{2\,i} - \frac{5}{8}\xi_{(22)}S_U^2 - \frac{3}{4}\xi_{(22)}S_U S_{U\,i}^i - \frac{1}{8}\xi_{(22)}S_{U\,i}^{i\,2} +$$
$$-\frac{3}{2}\xi_{(12)}S_A S_U - 2\xi_{(12)}S_A S_{U\,i}^i - 2\xi_{(12)}S_U S_{A\,i}^i + \frac{1}{2}\xi_{(12)}S_{A\,i}^i S_{U\,j}^j +$$
$$-\frac{3}{2}\xi_{(33)}S_+ S_- - 2\xi_{(33)}S_+ S_{-\,i}^i - 2\xi_{(33)}S_- S_{+\,i}^i + \frac{1}{2}\xi_{(33)}S_{+\,i}^i S_{-\,j}^j \qquad (2.144)$$

O termo trilinear antissimétrico

$$U_{3A} = 4\,b_1\Big(\vec{E}_A\cdot\vec{e}^{\,[12]} + \vec{B}_A\cdot\vec{b}^{\,[12]}\Big) + 4\,b_2\Big(\vec{E}_U\cdot\vec{e}^{\,[12]} + \vec{B}_U\cdot\vec{b}^{\,[12]}\Big) +$$
$$+4\,b_1\Big(\vec{E}_A\cdot\vec{e}^{\,[+-]} + \vec{B}_U\cdot\vec{b}^{\,[+-]}\Big) + 4\,b_2\Big(\vec{E}_U\cdot\vec{e}^{\,[+-]} + \vec{B}_U\cdot\vec{b}^{\,[+-]}\Big) +$$
$$+4\beta_1\Big(\vec{E}_A\cdot\vec{e}^{\,(+-)} + \vec{B}_U\cdot\vec{b}^{\,(+-)}\Big) + 4\beta_2\Big(\vec{E}_U\cdot\vec{e}^{\,(+-)} + \vec{B}_U\cdot\vec{b}^{\,(+-)}\Big) +$$
$$+4\,b_3\Big(\vec{E}_+\cdot\vec{e}^{\,[-1]} + \vec{B}_+\cdot\vec{b}^{\,[-1]} + \vec{E}_+\cdot\vec{e}^{\,[-2]} + \vec{B}_+\cdot\vec{b}^{\,[-2]}\Big) +$$
$$+4\,b_3\Big(\vec{E}_-\cdot\vec{e}^{\,[+1]} + \vec{B}_-\cdot\vec{b}^{\,[+1]} + \vec{E}_-\cdot\vec{e}^{\,[+2]} + \vec{B}_-\cdot\vec{b}^{\,[+2]}\Big) \qquad (2.145)$$

O termo trilinear simétrico corresponde a

$$U_{3S} = -3\beta_1 S_A s^{(11)} - 2\beta_1\vec{S}_A\cdot\vec{s}^{\,(11)} + \beta_1\overleftrightarrow{S}_A\cdot\overleftrightarrow{s}^{(11)} - 3\beta_1 S_A s^{(22)} - 2\beta_1\vec{S}_A\cdot\vec{s}^{\,(22)} +$$
$$+\beta_1\overleftrightarrow{S}_A\cdot\overleftrightarrow{s}^{(22)} - 3\beta_1 S_A s^{(12)} - 2\beta_1\vec{S}_A\cdot\vec{s}^{\,(12)} + \beta_1\overleftrightarrow{S}_A\cdot\overleftrightarrow{s}^{(12)} - 3\beta_1 S_A s^{+-3} - 2\beta_1\vec{S}_A\cdot\vec{s}^{\,+-3} +$$
$$+\beta_1\overleftrightarrow{S}_A\cdot\overleftrightarrow{s}^{+-3} - 3\beta_2 S_U s^{(11)} - 2\beta_2\vec{S}_U\cdot\vec{s}^{\,(11)} + \beta_2\overleftrightarrow{S}_U\cdot\overleftrightarrow{s}^{(11)} - 3\beta_2 S_U s^{(22)} - 2\beta_2\vec{S}_U\cdot\vec{s}^{\,(22)} +$$
$$+\beta_2\overleftrightarrow{S}_U\cdot\overleftrightarrow{s}^{(22)} - 3\beta_2 S_U s^{(12)} - 2\beta_2\vec{S}_U\cdot\vec{s}^{\,(12)} + \beta_2\overleftrightarrow{S}_U\cdot\overleftrightarrow{s}^{(12)} - 3\beta_2 S_U s^{+-3} - 2\beta_2\vec{S}_U\cdot\vec{s}^{\,+-3} +$$
$$+\beta_2\overleftrightarrow{S}_U\cdot\overleftrightarrow{s}^{+-3} - 6\beta_3 S_+ s^{(-1)} - 4\beta_3\vec{S}_+\cdot\vec{s}^{\,(-1)} + 2\beta_3\overleftrightarrow{S}_+\cdot\overleftrightarrow{s}^{(-1)} - 6\beta_3 S_+ s^{(-2)} +$$
$$-4\beta_3\vec{S}_+\cdot\vec{s}^{\,(-2)} + 2\beta_3\overleftrightarrow{S}_+\cdot\overleftrightarrow{s}^{(-2)} - 6\beta_3 S_- s^{(+1)} - 4\beta_3\vec{S}_-\cdot\vec{s}^{\,(+1)} + 2\beta_3\overleftrightarrow{S}_-\cdot\overleftrightarrow{s}^{(+1)} +$$
$$-6\beta_3 S_- s^{(+2)} - 4\beta_3\vec{S}_-\cdot\vec{s}^{\,(+2)} + 2\beta_3\overleftrightarrow{S}_-\cdot\overleftrightarrow{s}^{(+2)} +$$

$$
\begin{aligned}
&-3\rho_1 S_A s^{(11)} - 4\rho_1 S_A s_i^{(11)\,i} - 4\rho_1 s^{(11)} S_{A\,i}^i + \rho_1 S_{A\,i}^i s_j^{(11)j} - 3\rho_1 S_A s^{(22)} + \\
&-4\rho_1 S_A s_i^{(22)\,i} - 4\rho_1 s^{(22)} S_{A\,i}^i + \rho_1 S_{A\,i}^i s_j^{(22)j} - 3\rho_1 S_A s^{(12)} - 4\rho_1 S_A s_i^{(12)\,i} + \\
&-4\rho_1 s^{(12)} S_{A\,i}^i + \rho_1 S_{A\,i}^i s_j^{(12)j} - 3\rho_1 S_A s^{+-3} - 4\rho_1 S_A s_i^{+-3\,i} - 4\rho_1 s^{+-3} S_{A\,i}^i + \\
&+\rho_1 S_{A\,i}^i s_j^{+-3j} - 3\big(\rho_1 + 4\beta_1\big) S_A s_\omega^{(11)} - 4\big(\rho_1 + 4\beta_1\big) S_A s_{\omega\,i}^{(11)\,i} + \\
&-4\big(\rho_1 + 4\beta_1\big) s_\omega^{(11)} S_{A\,i}^i - 3\big(\rho_1 + 4\beta_1\big) S_A s_\omega^{(22)} - 4\big(\rho_1 + 4\beta_1\big) S_A s_{\omega\,i}^{(22)\,i} + \\
&-4\big(\rho_1 + 4\beta_1\big) s_\omega^{(22)} S_{A\,i}^i + \big(\rho_1 + 4\beta_1\big) S_{A\,i}^i s_{\omega\,j}^{(22)j} - 6\big(\rho_1 + 4\beta_1\big) S_A s_\omega^{(12)} + \\
&-8\big(\rho_1 + 4\beta_1\big) S_A s_{\omega\,i}^{(12)\,i} - 8\big(\rho_1 + 4\beta_1\big) s_\omega^{(12)} S_{A\,i}^i - 6\big(\rho_1 + 4\beta_1\big) S_A s_\omega^{+-3} + \\
&-8\big(\rho_1 + 4\beta_1\big) S_A s_{\omega\,i}^{+-3\,i} - 8\big(\rho_1 + 4\beta_1\big) s_\omega^{+-3} S_{A\,i}^i \big(\rho_1 + 4\beta_1\big) S_{A\,i}^i s_{\omega\,j}^{(11)j} + \\
&+2\big(\rho_1 + 4\beta_1\big) S_{A\,i}^i s_{\omega\,j}^{(12)j} + 2\big(\rho_1 + 4\beta_1\big) S_{A\,i}^i s_{\omega\,j}^{+-3j} - 3\rho_2 S_U s^{(11)} + \\
&-4\rho_2 S_U s_i^{(11)\,i} - 4\rho_2 s^{(11)} S_{U\,i}^i + \rho_2 S_{U\,i}^i s_j^{(11)j} - 3\rho_2 S_U s^{(22)} - 4\rho_2 S_U s_i^{(22)\,i} + \\
&-4\rho_1 s^{(22)} S_{A\,i}^i + \rho_2 S_{U\,i}^i s_j^{(22)j} - 3\rho_2 S_U s^{(12)} - 4\rho_2 S_U s_i^{(12)\,i} - 4\rho_1 s^{(12)} S_{A\,i}^i + \rho_2 S_{U\,i}^i s_j^{(12)j} + \\
&-3\rho_2 S_U s^{+-3} - 4\rho_2 S_U s_i^{+-3\,i} - 4\rho_2 s^{+-3} S_{U\,i}^i + \rho_2 S_{U\,i}^i s_j^{+-3j} - 3\big(\rho_2 + 4\beta_2\big) S_U s_\omega^{(11)} + \\
&-4\big(\rho_2 + 4\beta_2\big) S_A s_{\omega\,i}^{(11)\,i} - 4\big(\rho_2 + 4\beta_2\big) s_\omega^{(11)} S_{U\,i}^i + \big(\rho_2 + 4\beta_2\big) S_{U\,i}^i s_{\omega\,j}^{(11)j} \\
&-3\big(\rho_2 + 4\beta_2\big) S_U s_\omega^{(22)} - 4\big(\rho_2 + 4\beta_2\big) S_U s_{\omega\,i}^{(22)\,i} - 4\big(\rho_2 + 4\beta_2\big) s_\omega^{(22)} S_{U\,i}^i + \\
&+\big(\rho_2 + 4\beta_2\big) S_{U\,i}^i s_{\omega\,j}^{(22)j} - 6\rho_3 S_+ s^{(-1)} - 8\rho_3 S_+ s_i^{(-1)\,i} - 8\rho_3 s^{(-1)} S_{+\,i}^i + 2\rho_3 S_{+\,i}^i s_j^{(-1)j} + \\
&-6\rho_3 S_+ s^{(-2)} - 8\rho_3 S_+ s_i^{(-2)\,i} - 8\rho_3 s^{(-2)} S_{+\,i}^i + 2\rho_3 S_{+\,i}^i s_j^{(-2)j} - 6\big(\rho_3 + 4\beta_3\big) S_+ s_\omega^{(-1)} + \\
&-8\big(\rho_3 + 4\beta_3\big) S_+ s_{\omega\,i}^{(-1)\,i} - 8\big(\rho_3 + 4\beta_3\big) s_\omega^{(-1)} S_{+\,i}^i + 2\big(\rho_3 + 4\beta_3\big) S_{+\,i}^i s_{\omega\,j}^{(-1)j} + \\
&-6\big(\rho_3 + 4\beta_3\big) S_+ s_\omega^{(-2)} - 8\big(\rho_3 + 4\beta_3\big) S_+ s_{\omega\,i}^{(-2)\,i} - 8\big(\rho_3 + 4\beta_3\big) s_\omega^{(-2)} S_{+\,i}^i + \\
&2\big(\rho_3 + 4\beta_3\big) S_{+\,i}^i s_{\omega\,j}^{(-2)j} - 6\rho_3 S_- s^{(+1)} - 8\rho_3 S_- s_i^{(+1)\,i} - 8\rho_3 s^{(+1)} S_{-\,i}^i + 2\rho_3 S_{-\,i}^i s_j^{(+1)j} + \\
&-6\rho_3 S_- s^{(+2)} - 8\rho_3 S_- s_i^{(+2)\,i} - 8\rho_3 s^{(+2)} S_{-\,i}^i + 2\rho_3 S_{-\,i}^i s_j^{(+2)j} + -6\big(\rho_3 + 4\beta_3\big) S_- s_\omega^{(+1)} + \\
&-8\big(\rho_3 + 4\beta_3\big) S_- s_{\omega\,i}^{(+1)\,i} - 8\big(\rho_3 + 4\beta_3\big) s_\omega^{(+1)} S_{-\,i}^i + 2\big(\rho_3 + 4\beta_3\big) S_{-\,i}^i s_{\omega\,j}^{(+1)j} + \\
&-6\big(\rho_3 + 4\beta_3\big) S_- s_\omega^{(+2)} - 8\big(\rho_3 + 4\beta_3\big) S_- s_{\omega\,i}^{(+2)\,i} - 8\big(\rho_3 + 4\beta_3\big) s_\omega^{(+2)} S_{-\,i}^i + 2\big(\rho_3 + 4\beta_3\big) S_{-\,i}^i s_{\omega\,j}^{(+2)j}
\end{aligned}
\tag{2.146}
$$

O termo quadrilinear antissimétrico

$$
\begin{aligned}
U_{4A} &= 2\Big(|\vec{e}^{\,[12]}|^2 + |\vec{b}^{\,[12]}|^2\Big) + 2\Big(\vec{e}^{\,[12]}\cdot\vec{e}^{\,[21]} + \vec{b}^{\,[12]}\cdot\vec{b}^{\,[21]}\Big) + \\
&+4\Big(\vec{e}^{\,[13+]}\cdot\vec{e}^{\,[13-]} + \vec{b}^{\,[13+]}\cdot\vec{b}^{\,[13-]}\Big) + 4\Big(\vec{e}^{\,[23+]}\cdot\vec{e}^{\,[23-]} + \vec{b}^{\,[23+]}\cdot\vec{b}^{\,[23-]}\Big) + \\
&+8\Big(\vec{e}^{\,[13+]}\cdot\vec{e}^{\,[23-]} + \vec{b}^{\,[13+]}\cdot\vec{b}^{\,[23-]}\Big) + 4\Big(\vec{e}^{\,[12]}\cdot\vec{e}^{\,[+-]} + \vec{b}^{\,[12]}\cdot\vec{b}^{\,[+-]}\Big) \\
&-8\Big(\vec{e}^{\,(12)}\cdot\vec{e}^{\,(12)}_{\omega} + \vec{b}^{\,(12)}\cdot\vec{b}^{\,(12)}_{\omega}\Big) - 16\Big(|\vec{e}^{\,(12)}_{\omega}|^2 + |\vec{b}^{\,(12)}_{\omega}|^2\Big) + \\
&+4\Big(\vec{e}^{\,(13+)}\cdot\vec{e}^{\,(13-)} + \vec{b}^{\,(13+)}\cdot\vec{b}^{\,(13-)}\Big) + 4\Big(\vec{e}^{\,(23+)}\cdot\vec{e}^{\,(23-)} + \vec{b}^{\,(23+)}\cdot\vec{b}^{\,(23-)}\Big) + \\
&+8\Big(\vec{e}^{\,(13+)}\cdot\vec{e}^{\,(23-)} + \vec{b}^{\,(13+)}\cdot\vec{b}^{\,(23-)}\Big) - 4i\Big(\vec{e}^{\,(13+)}\cdot\vec{e}^{\,(24-)}_{\omega} + \vec{b}^{\,(13+)}\cdot\vec{b}^{\,(24-)}_{\omega}\Big) + \\
&+4i\Big(\vec{e}^{\,(13-)}\cdot\vec{e}^{\,(24+)}_{\omega} + \vec{b}^{\,(13-)}\cdot\vec{b}^{\,(24+)}_{\omega}\Big) - 4i\Big(\vec{e}^{\,(23+)}\cdot\vec{e}^{\,(14-)}_{\omega} + \vec{b}^{\,(23+)}\cdot\vec{b}^{\,(14-)}_{\omega}\Big) + \\
&+4i\Big(\vec{e}^{\,(23-)}\cdot\vec{e}^{\,(14+)}_{\omega} + \vec{b}^{\,(23-)}\cdot\vec{b}^{\,(14+)}_{\omega}\Big) - 16i\Big(\vec{e}^{\,(13+)}_{\omega}\cdot\vec{e}^{\,(24-)}_{\omega} + \vec{b}^{\,(13+)}_{\omega}\cdot\vec{b}^{\,(24-)}_{\omega}\Big) + \\
&+16i\Big(\vec{e}^{\,(13-)}_{\omega}\cdot\vec{e}^{\,(24+)}_{\omega} + \vec{b}^{\,(13-)}_{\omega}\cdot\vec{b}^{\,(24+)}_{\omega}\Big) - 16i\Big(\vec{e}^{\,(14-)}_{\omega}\cdot\vec{e}^{\,(23+)}_{\omega} + \vec{b}^{\,(14-)}_{\omega}\cdot\vec{b}^{\,(23+)}_{\omega}\Big) + \\
&+16i\Big(\vec{e}^{\,(14+)}_{\omega}\cdot\vec{e}^{\,(23-)}_{\omega} + \vec{b}^{\,(14+)}_{\omega}\cdot\vec{b}^{\,(23-)}_{\omega}\Big) - 2i\Big(\vec{e}^{\,(13-)}\cdot\vec{e}^{\,(24+)} + \vec{b}^{\,(13-)}\cdot\vec{b}^{\,(24+)}\Big) + \\
&+2i\Big(\vec{e}^{\,(13+)}\cdot\vec{e}^{\,(24-)} + \vec{b}^{\,(13+)}\cdot\vec{b}^{\,(24-)}\Big) - 2i\Big(\vec{e}^{\,(14+)}\cdot\vec{e}^{\,(23-)} + \vec{b}^{\,(14+)}\cdot\vec{b}^{\,(23-)}\Big) + \\
&+2i\Big(\vec{e}^{\,(14-)}\cdot\vec{e}^{\,(23+)} + \vec{b}^{\,(14-)}\cdot\vec{b}^{\,(23+)}\Big) - 4i\Big(\vec{e}^{\,(14-)}\cdot\vec{e}^{\,(23+)}_{\omega} + \vec{b}^{\,(14-)}\cdot\vec{b}^{\,(23+)}_{\omega}\Big) + \\
&+4i\Big(\vec{e}^{\,(14+)}\cdot\vec{e}^{\,(23-)}_{\omega} + \vec{b}^{\,(14+)}\cdot\vec{b}^{\,(23-)}_{\omega}\Big) - 4i\Big(\vec{e}^{\,(24-)}\cdot\vec{e}^{\,(13+)}_{\omega} + \vec{b}^{\,(24-)}\cdot\vec{b}^{\,(13+)}_{\omega}\Big) \\
&+4i\Big(\vec{e}^{\,(24+)}\cdot\vec{e}^{\,(13-)}_{\omega} + \vec{b}^{\,(24+)}\cdot\vec{b}^{\,(13-)}_{\omega}\Big) - 16\Big(\vec{e}^{\,(+-)}\cdot\vec{e}^{\,(+-)}_{\omega} + \vec{b}^{\,(+-)}\cdot\vec{b}^{\,(+-)}_{\omega}\Big) + \\
&-32\Big(\vec{e}^{\,(+-)}_{\omega}\cdot\vec{e}^{\,(+-)}_{\omega} + \vec{b}^{\,(+-)}_{\omega}\cdot\vec{b}^{\,(+-)}_{\omega}\Big)
\end{aligned}
\tag{2.147}
$$

O termo quadrilinear simétrico

$$
\begin{aligned}
U_{4S} &= -3s^{[12]\,2} - 2|\vec{s}^{\,[12]}|^2 + |\overset{\leftrightarrow}{s}{}^{[12]}|^2 - 3s^{[12]}s^{[21]} - 2\vec{s}^{\,[12]}\cdot\vec{s}^{\,[21]} + \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{[12]}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}^{[21]} + \\
&-6s^{[13+]}s^{[13-]} - 4\vec{s}^{\,[13+]}\cdot\vec{s}^{\,[13-]} + 2\overset{\leftrightarrow}{s}{}^{[13+]}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}^{[13-]} - 6s^{[23+]}s^{[23-]} - 4\vec{s}^{\,[23+]}\cdot\vec{s}^{\,[23-]} + \\
&-12s^{[13+]}s^{[23-]} - 8\vec{s}^{\,[13+]}\cdot\vec{s}^{\,[23-]} + 4\overset{\leftrightarrow}{s}{}^{[13+]}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}^{[23-]} - 6|s^{[+-]}|^2 - 4|\vec{s}^{\,[+-]}|^2 + 2|\overset{\leftrightarrow}{s}{}^{[+-]}|^2 + \\
&-3s^{(11)\,2} - 2|\vec{s}^{\,(11)}|^2 + |\overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(11)}|^2 - 3s^{(22)\,2} - 2|\vec{s}^{\,(22)}|^2 + |\overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(22)}|^2 + 2\overset{\leftrightarrow}{s}{}^{[23+]}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}^{[23-]} + \\
&-6s^{(11)}s^{(11)}_{\omega} - 4\vec{s}^{\,(11)}\cdot\vec{s}^{\,(11)}_{\omega} + 2\overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(11)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(11)}_{\omega} - 6s^{(11)}s^{(22)}_{\omega} - 4\vec{s}^{\,(22)}\cdot\vec{s}^{\,(22)}_{\omega} + 2\overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(22)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(22)}_{\omega} +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-6s_\omega^{(11)\,2} - 4|\vec{s}_\omega^{(11)}|^2 + 2|\overset{\leftrightarrow}{s}_\omega^{(11)}|^2 - 6s_\omega^{(22)\,2} - 4|\vec{s}_\omega^{(22)}|^2 + 2|\overset{\leftrightarrow}{s}_\omega^{(22)}|^2 - 3s^{(11)}s^{(12)} + \\
&-2\vec{s}^{(11)}\cdot\vec{s}^{(12)} + \overset{\leftrightarrow}{s}^{(11)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}^{(12)} - 3s^{(22)}s^{(12)} - 2\vec{s}^{(22)}\cdot\vec{s}^{(12)} + \overset{\leftrightarrow}{s}^{(22)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}^{(12)} + \\
&-12s^{(12)}s_\omega^{(11)} - 8\vec{s}^{(12)}\cdot\vec{s}_\omega^{(11)} + 4\overset{\leftrightarrow}{s}^{(12)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}_\omega^{(11)} - 12s^{(12)}s_\omega^{(22)} - 8\vec{s}^{(12)}\cdot\vec{s}_\omega^{(22)} + \\
&+4\overset{\leftrightarrow}{s}^{(12)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}_\omega^{(22)} - 24s_\omega^{(11)}s_\omega^{(12)} - 16\vec{s}_\omega^{(11)}\cdot\vec{s}_\omega^{(12)} + 8\overset{\leftrightarrow}{s}_\omega^{(11)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}_\omega^{(12)} - 24s_\omega^{(22)}s_\omega^{(12)} + \\
&-16\vec{s}_\omega^{(22)}\cdot\vec{s}_\omega^{(12)} + 8\overset{\leftrightarrow}{s}_\omega^{(22)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}_\omega^{(12)} - 3s^{(11)}s^{(22)} - 2\vec{s}^{(11)}\cdot\vec{s}^{(22)} + \overset{\leftrightarrow}{s}^{(11)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}^{(22)} + \\
&-6s^{(11)}s^{+-3} - 4\vec{s}^{(11)}\cdot\vec{s}^{+-3} + 2\overset{\leftrightarrow}{s}^{(11)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}^{+-3} + 2i\overset{\leftrightarrow}{s}^{(23+)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}_\omega^{(14-)} + \\
&-6s^{(22)}s^{+-3} - 4\vec{s}^{(22)}\cdot\vec{s}^{+-3} + 2\overset{\leftrightarrow}{s}^{(22)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}^{+-3} - 6s^{(12)\,2} - 4|\vec{s}^{(12)}|^2 + 2|\overset{\leftrightarrow}{s}^{(12)}|^2 + \\
&-12s^{(12)}s_\omega^{(12)} - 8\vec{s}^{(12)}\cdot\vec{s}_\omega^{(12)} + 4\overset{\leftrightarrow}{s}^{(12)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}_\omega^{(12)} - 24s_\omega^{(12)\,2} - 16|\vec{s}_\omega^{(12)}|^2 + 8|\overset{\leftrightarrow}{s}_\omega^{(12)}|^2 + \\
&-6s^{(13+)}s^{(13-)} - 4\vec{s}^{(13+)}\cdot\vec{s}^{(13-)} + 2\overset{\leftrightarrow}{s}^{(13+)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}^{(13-)} - 6s^{(23+)}s^{(23-)} + \\
&-4\vec{s}^{(23+)}\cdot\vec{s}^{(23-)} + 2\overset{\leftrightarrow}{s}^{(23+)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}^{(23-)} - 12s^{(13+)}s^{(23-)} - 8\vec{s}^{(13+)}\cdot\vec{s}^{(23-)} + \\
&+4\overset{\leftrightarrow}{s}^{(13+)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}^{(23-)} - 12s^{(12)}s^{+-3} - 8\vec{s}^{(12)}\cdot\vec{s}^{+-3} + 4\overset{\leftrightarrow}{s}^{(12)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}^{+-3} + \\
&-6s^{+-3}s^{+-4} - 4\vec{s}^{+-3}\cdot\vec{s}^{+-4} + 2\overset{\leftrightarrow}{s}^{+-3}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}^{+-4} - 6is^{(13+)}s_\omega^{(24-)} + \\
&-4i\vec{s}^{(13+)}\cdot\vec{s}_\omega^{(24-)} + 2i\overset{\leftrightarrow}{s}^{(13+)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}_\omega^{(24-)} + 6is^{(13-)}s_\omega^{(24+)} + 4i\vec{s}^{(13-)}\cdot\vec{s}_\omega^{(24+)} + \\
&-2i\overset{\leftrightarrow}{s}^{(13-)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}_\omega^{(24+)} - 6is^{(23+)}s_\omega^{(14-)} - 4i\vec{s}^{(23+)}\cdot\vec{s}_\omega^{(14-)} + 6is^{(23-)}s_\omega^{(14+)} + \\
&+4i\vec{s}^{(23-)}\cdot\vec{s}_\omega^{(14+)} - 2i\overset{\leftrightarrow}{s}^{(23-)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}_\omega^{(14+)} - 24is_\omega^{(13+)}s_\omega^{(24-)} - 16i\vec{s}_\omega^{(13+)}\cdot\vec{s}_\omega^{(24-)} + \\
&+8i\overset{\leftrightarrow}{s}_\omega^{(13+)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}_\omega^{(24-)} + 24is_\omega^{(13-)}s_\omega^{(24+)} + 16i\vec{s}_\omega^{(13-)}\cdot\vec{s}_\omega^{(24+)} - 8i\overset{\leftrightarrow}{s}_\omega^{(13-)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}_\omega^{(24+)} + \\
&-3is^{(14+)}s^{(23-)} - 2i\vec{s}^{(14+)}\cdot\vec{s}^{(23-)} + i\overset{\leftrightarrow}{s}^{(14+)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}^{(23-)} - 3is^{(14-)}s_\omega^{(23+)} + \\
&-2i\vec{s}^{(14-)}\cdot\vec{s}_\omega^{(23+)} + i\overset{\leftrightarrow}{s}^{(14-)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}^{(23+)} + 24is_\omega^{(14+)}s_\omega^{(23-)} + 16i\vec{s}_\omega^{(14+)}\cdot\vec{s}_\omega^{(23-)} + \\
&-8i\overset{\leftrightarrow}{s}_\omega^{(14+)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}_\omega^{(23-)} - 24is_\omega^{(14-)}s_\omega^{(23+)} - 16i\vec{s}_\omega^{(14-)}\cdot\vec{s}_\omega^{(23+)} + 8i\overset{\leftrightarrow}{s}_\omega^{(14-)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}_\omega^{(23+)} + \\
&+3is^{(13+)}s^{(24-)} + 2i\vec{s}^{(13+)}\cdot\vec{s}^{(24-)} - i\overset{\leftrightarrow}{s}^{(13+)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}^{(24-)} - 3is^{(13-)}s^{(24+)} + \\
&-2i\vec{s}^{(13-)}\cdot\vec{s}^{(24+)} + i\overset{\leftrightarrow}{s}^{(13-)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}^{(24+)} + 6is^{(14+)}s_\omega^{(23-)} + 4i\vec{s}^{(14+)}\cdot\vec{s}_\omega^{(23-)} + \\
&-2i\overset{\leftrightarrow}{s}^{(14+)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}_\omega^{(23-)} - 6is^{(14-)}s_\omega^{(23+)} - 4i\vec{s}^{(14-)}\cdot\vec{s}_\omega^{(23+)} + 2i\overset{\leftrightarrow}{s}^{(14-)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}_\omega^{(23+)} + \\
&+6is^{(24+)}s_\omega^{(13-)} + 4i\vec{s}^{(24+)}\cdot\vec{s}_\omega^{(13-)} - 2i\overset{\leftrightarrow}{s}^{(24+)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}_\omega^{(13-)} - 6is^{(24-)}s_\omega^{(13+)} + \\
&+2i\overset{\leftrightarrow}{s}^{(24-)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}_\omega^{(13+)} + 10s^{[13+]}s^{[13-]} + 6s^{[13+]}s_i^{[13-]\,i} + 6s^{[13-]}s_i^{[13+]\,i} - 2s_i^{[13+]\,i}s_j^{[13-]\,j} + \\
&+10s^{[23+]}s^{[23-]} + 6s^{[23+]}s_i^{[23-]\,i} + 6s^{[23-]}s_i^{[23+]\,i} - 2s_i^{[23+]\,i}s_j^{[23-]\,j} +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+10s^{[+-]\,2}+12s^{[+-]}s_i^{[+-]\,i}-2\left(s_i^{[+-]\,i}\right)^2-4i\vec{s}^{(24-)}\cdot\vec{s}_\omega^{(13+)}+10s^{[13+]}s^{[23-]}+\\
&+6s^{[13+]}s_i^{[23-]\,i}+6s^{[23-]}s_i^{[13+]\,i}-2s_i^{[13+]\,i}s_j^{[23-]\,j}-10s^{[13-]}s^{[23+]}-6s^{[13-]}s_i^{[23+]\,i}+\\
&-6s^{[23+]}s_i^{[13-]\,i}+2s_i^{[13-]\,i}s_j^{[23+]\,j}+10s^{[13+]}s^{[24-]}+6s^{[13+]}s_i^{[24-]\,i}+6s^{[24-]}s_i^{[13+]\,i}+\\
&-2s_i^{[13+]\,i}s_j^{[24-]\,j}-10s^{[13-]}s^{[24+]}-6s^{[13-]}s_i^{[24+]\,i}-6s^{[24+]}s_i^{[13-]\,i}+2s_i^{[13-]\,i}s_j^{[24+]\,j}+\\
&-10s^{(11)}s_\omega^{(22)}-6s^{(11)}s_{\omega\,i}^{(22)\,i}-6s_\omega^{(22)}s_i^{(11)\,i}+2s_i^{(11)\,i}s_{\omega\,j}^{(22)\,j}-20s_\omega^{(11)}s_\omega^{(22)}+\\
&-12s_\omega^{(11)}s_{\omega\,i}^{(22)\,i}-12s_\omega^{(22)}s_{\omega\,i}^{(11)\,i}+4s_{\omega\,i}^{(11)\,i}s_{\omega\,j}^{(22)\,j}-10s^{(13+)}s^{(13-)}-6s^{(13+)}s_i^{(13-)\,i}+\\
&-6s^{(13-)}s_i^{(13+)\,i}+2s_i^{(13-)\,i}s_j^{(13+)\,j}-10s^{(23+)}s^{(23-)}-6s^{(23+)}s_i^{(23-)\,i}-6s^{(23-)}s_i^{(23+)\,i}+\\
&+2s_i^{(23-)\,i}s_j^{(23+)\,j}+-40s^{(13+)}s_\omega^{(13-)}-24s^{(13+)}s_{\omega\,i}^{(13-)\,i}-24s_\omega^{(13-)}s_i^{(13+)\,i}+8s_{\omega\,i}^{(13-)\,i}s_j^{(13+)\,j}+\\
&-40s^{(23+)}s_\omega^{(23-)}-24s^{(23+)}s_{\omega\,i}^{(23-)\,i}-24s_\omega^{(23-)}s_i^{(23+)\,i}+8s_{\omega\,i}^{(23-)\,i}s_j^{(23+)\,j}-80s_\omega^{(13+)}s_\omega^{(13-)}+\\
&-48s_\omega^{(13+)}s_{\omega\,i}^{(13-)\,i}-48s_\omega^{(13-)}s_{\omega\,i}^{(13+)\,i}+16s_{\omega\,i}^{(13-)\,i}s_{\omega\,j}^{(13+)\,j}-80s_\omega^{(23+)}s_\omega^{(23-)}+\\
&-48s_\omega^{(23-)}s_{\omega\,i}^{(23+)\,i}+16s_{\omega\,i}^{(23-)\,i}s_{\omega\,j}^{(23+)\,j}-10s^{(13+)}s^{(23-)}-6s^{(13+)}s_i^{(23-)\,i}+\\
&+2s_i^{(23-)\,i}s_j^{(13+)\,j}+10s^{(13-)}s^{(23+)}+6s^{(13-)}s_i^{(23+)\,i}+6s^{(23+)}s_i^{(13-)\,i}+\\
&-40s^{(13+)}s_\omega^{(23-)}-24s^{(13+)}s_{\omega\,i}^{(23-)\,i}-24s_\omega^{(23-)}s_i^{(13+)\,i}+8s_{\omega\,i}^{(23-)\,i}s_j^{(13+)\,j}+\\
&+40s^{(13-)}s_\omega^{(23+)}+24s^{(13-)}s_{\omega\,i}^{(23+)\,i}+24s_\omega^{(23+)}s_i^{(13-)\,i}-8s_{\omega\,i}^{(23+)\,i}s_j^{(13-)\,j}+\\
&-80s_\omega^{(13+)}s_\omega^{(23-)}-48s_\omega^{(13+)}s_{\omega\,i}^{(23-)\,i}-48s_\omega^{(23-)}s_{\omega\,i}^{(13+)\,i}+16s_{\omega\,i}^{(23-)\,i}s_{\omega\,j}^{(13+)\,j}+\\
&+80s_\omega^{(13-)}s_\omega^{(23+)}+48s_\omega^{(13-)}s_{\omega\,i}^{(23+)\,i}+48s_\omega^{(23+)}s_{\omega\,i}^{(13-)\,i}-16s_{\omega\,i}^{(23+)\,i}s_{\omega\,j}^{(13-)\,j}+\\
&+10s_\omega^{(+-)}s_\omega^{(+-)}+12s_\omega^{(+-)}s_{\omega\,i}^{(+-)\,i}-2s_{\omega\,i}^{(+-)\,i}s_{\omega\,j}^{(+-)\,j}-20s^{+-3}s_\omega^{+-4}+\\
&-12s^{+-3}s_{\omega\,i}^{+-4\,i}-12s_\omega^{+-4}s_i^{+-3\,i}+4s_i^{+-3\,i}s_{\omega\,j}^{+-4\,j}-40s_\omega^{+-3}s_\omega^{+-4}-24s_\omega^{+-3}s_{\omega\,i}^{+-4\,i}+\\
&-24s_\omega^{+-4}s_{\omega\,i}^{+-3\,i}+8s_{\omega\,i}^{+-3\,i}s_{\omega\,j}^{+-4\,j}-20s^{(11)}s_\omega^{+-3}-12s^{(11)}s_{\omega\,i}^{+-3\,i}-12s_\omega^{+-3}s_i^{(11)\,i}+\\
&+4s_i^{(11)\,i}s_{\omega\,j}^{+-3\,j}+-20s^{(22)}s_\omega^{+-3}-12s^{(22)}s_{\omega\,i}^{+-3\,i}-12s_\omega^{+-3}s_i^{(22)\,i}+4s_i^{(22)\,i}s_{\omega\,j}^{+-3\,j}+\\
&-40s_\omega^{(11)}s_\omega^{+-3}-24s_\omega^{(11)}s_{\omega\,i}^{+-3\,i}-24s_\omega^{+-3}s_{\omega\,i}^{(11)\,i}+8s_{\omega\,i}^{(11)\,i}s_{\omega\,j}^{+-3\,j}-40s_\omega^{(22)}s_\omega^{+-3}+\\
&-24s_\omega^{(22)}s_{\omega\,i}^{+-3\,i}-24s_\omega^{+-3}s_{\omega\,i}^{(22)\,i}+8s_{\omega\,i}^{(22)\,i}s_{\omega\,j}^{+-3\,j}-40s^{(12)}s_\omega^{+-3}-24s^{(12)}s_{\omega\,i}^{+-3\,i}+\\
&-24s_\omega^{+-3}s_i^{(12)\,i}+8s_i^{(12)\,i}s_{\omega\,j}^{+-3\,j}-80s_\omega^{(12)}s_\omega^{+-3}-48s_\omega^{(12)}s_{\omega\,i}^{+-3\,i}-48s_\omega^{+-3}s_{\omega\,i}^{(12)\,i}+\\
&+16s_{\omega\,i}^{(12)\,i}s_{\omega\,j}^{+-3\,j}-2s_i^{(23+)\,i}s_j^{(13-)\,j}-6s^{(23-)}s_i^{(13+)\,i}-48s_\omega^{(23+)}s_{\omega\,i}^{(23-)\,i}
\end{aligned}
\tag{2.148}
$$

2.3.2 Vetor de Poynting

O fluxo total é dado por

$$\vec{S} = \vec{S}_A + \vec{S}_S + \vec{S}_M + \vec{S}_{GF} + \vec{S}_I \tag{2.149}$$

onde

$$\vec{S}_A = -2a_1\vec{E}_A \times \vec{B}_A - 2a_2\vec{E}_U \times \vec{B}_U - 4a_3\vec{E}_+ \times \vec{B}_-$$

, (2.150)

$$\begin{aligned}
&\vec{S}_S = -2b_{(11)}S_A\vec{S}_A - 2b_{(11)}\vec{S}_A \cdot \overset{\leftrightarrow}{S}_A - 2b_{(22)}S_U\vec{S}_U - 2b_{(22)}\vec{S}_U \cdot \overset{\leftrightarrow}{S}_U \\
&-2b_{(33)}S_+\vec{S}_- - 2b_{(33)}S_-\vec{S}_+ - 2b_{(11)}\vec{S}_+ \cdot \overset{\leftrightarrow}{S}_- - 2b_{(11)}\vec{S}_- \cdot \overset{\leftrightarrow}{S}_+ \\
&-2c_{(11)}\vec{S}_AS_A - 2c_{(11)}\vec{S}_AS^i_{i\,A} - 2c_{(22)}\vec{S}_US_U - 2c_{(22)}\vec{S}_US^i_{i\,U} + \\
&-2c_{(33)}\vec{S}_+S_- - 2c_{(33)}\vec{S}_-S_+ - 2c_{(33)}\vec{S}_+S^i_{i\,-} - 2c_{(33)}\vec{S}_-S^i_{i\,+}
\end{aligned} \tag{2.151}$$

$$\vec{S}_M = \frac{1}{2}m_U^2\phi\vec{U} + \frac{1}{2}m_\pm^2\phi_+\vec{V}_- + \frac{1}{2}m_\pm^2\phi_-\vec{V}_+, \tag{2.152}$$

$$\begin{aligned}
&\vec{S}_{GF} = -\frac{1}{2}\xi_{(11)}\vec{S}_AS_A - \frac{1}{2}\xi_{(11)}\vec{S}_AS^i_{A\,i} - \frac{1}{2}\xi_{(22)}\vec{S}_US_U - \frac{1}{2}\xi_{(22)}\vec{S}_US^i_{U\,i} + \\
&-\xi_{(12)}\vec{S}_AS_U - \xi_{(12)}\vec{S}_US_A - \xi_{(33)}\vec{S}_AS^i_{U\,i} - \xi_{(33)}\vec{S}_US^i_{A\,i} \\
&-\xi_{(33)}\vec{S}_+S_- - \xi_{(33)}\vec{S}_-S_+ - \xi_{(33)}\vec{S}_+S^i_{-\,i} - \xi_{(33)}\vec{S}_-S^i_{+\,i},
\end{aligned} \tag{2.153}$$

$$\begin{aligned}
&\vec{S}_{3A} = -4\,b_1\Big(\vec{E}_A \times \vec{b}^{\,[12]} + \vec{B}_A \times \vec{e}^{\,[12]}\Big) - 4\,b_2\Big(\vec{E}_U \times \vec{b}^{\,[12]} + \vec{B}_U \times \vec{e}^{\,[12]}\Big) + \\
&-4\,b_1\Big(\vec{E}_A \times \vec{b}^{\,[+-]} + \vec{B}_U \times \vec{e}^{\,[+-]}\Big) - 4\,b_2\Big(\vec{E}_U \times \vec{b}^{\,[+-]} + \vec{B}_U \times \vec{e}^{\,[+-]}\Big) + \\
&-4\beta_1\Big(\vec{E}_A \times \vec{b}^{\,(+-)} + \vec{B}_U \times \vec{e}^{\,(+-)}\Big) - 4\beta_2\Big(\vec{E}_U \times \vec{b}^{\,(+-)} + \vec{B}_U \times \vec{e}^{\,(+-)}\Big) + \\
&-4\,b_3\Big(\vec{E}_+ \times \vec{b}^{\,[-1]} + \vec{B}_+ \times \vec{e}^{\,[-1]} + \vec{E}_+ \times \vec{b}^{\,[-2]} + \vec{B}_+ \times \vec{e}^{\,[-2]}\Big) + \\
&-4\,b_3\Big(\vec{E}_- \times \vec{b}^{\,[+1]} + \vec{B}_- \times \vec{e}^{\,[+1]} + \vec{E}_- \times \vec{b}^{\,[+2]} + \vec{B}_- \times \vec{e}^{\,[+2]}\Big),
\end{aligned} \tag{2.154}$$

$$\vec{S}_{3S} = -2\beta_1 S_A \vec{s}^{\,(11)} - 2\beta_1 s^{\,(11)} \vec{S}_A - 2\beta_1 \vec{S}_A \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(11)} - 2\beta_1 \vec{s}^{\,(11)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{S}_A - 2\beta_1 S_A \vec{s}^{\,(22)} +$$
$$-2\beta_1 s^{\,(22)} \vec{S}_A - 2\beta_1 \vec{S}_A \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(22)} - 2\beta_1 \vec{s}^{\,(22)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{S}_A - 4\beta_1 S_A \vec{s}^{\,(12)} - 4\beta_1 s^{\,(12)} \vec{S}_A +$$
$$-4\beta_1 \vec{S}_A \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(12)} - 4\beta_1 \vec{s}^{\,(12)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{S}_A - 4\beta_1 S_A \vec{s}^{\,+-3} - 4\beta_1 s^{\,+-3} \vec{S}_A - 4\beta_1 \vec{S}_A \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{+-3} +$$
$$-4\beta_1 \vec{s}^{\,+-3} \cdot \overset{\leftrightarrow}{S}_A - 2\beta_2 S_U \vec{s}^{\,(11)} - 2\beta_2 s^{\,(11)} \vec{S}_U - 2\beta_2 \vec{S}_U \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(11)} - 2\beta_2 \vec{s}^{\,(11)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{S}_U +$$
$$-2\beta_2 S_U \vec{s}^{\,(22)} - 2\beta_2 s^{\,(22)} \vec{S}_U - 2\beta_2 \vec{S}_U \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(22)} - 2\beta_2 \vec{s}^{\,(22)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{S}_U - 4\beta_2 S_U \vec{s}^{\,(12)} +$$
$$-4\beta_2 s^{\,(12)} \vec{S}_U - 4\beta_2 \vec{S}_U \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(12)} - 4\beta_2 \vec{s}^{\,(12)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{S}_U - 4\beta_2 S_U \vec{s}^{\,+-3} - 4\beta_2 s^{\,+-3} \vec{S}_U +$$
$$-4\beta_2 \vec{S}_U \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{+-3} - 4\beta_2 \vec{s}^{\,+-3} \cdot \overset{\leftrightarrow}{S}_U - 4\beta_3 S_+ \vec{s}^{\,(-1)} - 4\beta_3 s^{\,(-1)} \vec{S}_+ - 4\beta_3 \vec{S}_+ \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(-1)} +$$
$$-4\beta_3 \vec{s}^{\,(-1)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{S}_+ - 4\beta_3 S_+ \vec{s}^{\,(-2)} - 4\beta_3 s^{\,(-2)} \vec{S}_+ - 4\beta_3 \vec{S}_+ \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(-2)} - 4\beta_3 \vec{s}^{\,(-2)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{S}_+$$
$$-4\beta_3 S_- \vec{s}^{\,(+1)} - 4\beta_3 s^{\,(+1)} \vec{S}_- - 4\beta_3 \vec{S}_- \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(+1)} - 4\beta_3 \vec{s}^{\,(+1)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{S}_- - 4\beta_3 S_- \vec{s}^{\,(+2)} +$$
$$-4\beta_3 s^{\,(+2)} \vec{S}_- - 4\beta_3 \vec{S}_- \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(+2)} - 4\beta_3 \vec{s}^{\,(+2)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{S}_- - 2\rho_1 \vec{S}_1 s^{(11)} - 2\rho_1 S_1 \vec{s}^{\,(11)} +$$
$$-2\rho_1 \vec{S}_1 s_i^{(11)\,i} - 2\rho_1 \vec{s}^{\,(11)} S_{1\,i}^i - 2\rho_1 \vec{S}_1 s^{(22)} - 2\rho_1 S_1 \vec{s}^{\,(22)} - 2\rho_1 \vec{S}_1 s_i^{(22)\,i} +$$
$$-2\rho_1 \vec{s}^{\,(22)} S_{1\,i}^i - 4\rho_1 \vec{S}_1 s^{(12)} - 4\rho_1 S_1 \vec{s}^{\,(12)} - 4\rho_1 \vec{S}_1 s_i^{(12)\,i} - 4\rho_1 \vec{s}^{\,(12)} S_{1\,i}^i$$
$$-4\rho_1 \vec{S}_1 s^{\,+-3} - 4\rho_1 S_1 \vec{s}^{\,+-3} - 4\rho_1 \vec{S}_1 s_i^{\,+-3\,i} - 4\rho_1 \vec{s}^{\,+-3} S_{1\,i}^i - 2\big(\rho_1 + 4\beta_1\big) \vec{S}_1 s_\omega^{(11)} +$$
$$-2\big(\rho_1 + 4\beta_1\big) S_1 \vec{s}_\omega^{(11)} - 2\big(\rho_1 + 4\beta_1\big) \vec{S}_1 s_{\omega\,i}^{(11)\,i} - 2\big(\rho_1 + 4\beta_1\big) \vec{s}_\omega^{(11)} S_{1\,i}^i +$$
$$-2\big(\rho_1 + 4\beta_1\big) \vec{S}_1 s_\omega^{(22)} - 2\big(\rho_1 + 4\beta_1\big) S_1 \vec{s}_\omega^{(22)} - 2\big(\rho_1 + 4\beta_1\big) \vec{S}_1 s_{\omega\,i}^{(22)\,i} +$$
$$-4\big(\rho_1 + 4\beta_1\big) \vec{S}_1 s_\omega^{(12)} - 4\big(\rho_1 + 4\beta_1\big) S_1 \vec{s}_\omega^{(12)} - 4\big(\rho_1 + 4\beta_1\big) \vec{S}_1 s_{\omega\,i}^{(12)\,i} +$$
$$-4\big(\rho_1 + 4\beta_1\big) \vec{S}_1 s_\omega^{\,+-3} - 4\big(\rho_1 + 4\beta_1\big) S_1 \vec{s}_\omega^{\,+-3} - 4\big(\rho_1 + 4\beta_1\big) \vec{S}_1 s_i^{\,+-3\,i} +$$
$$-2\rho_2 \vec{S}_2 s^{(11)} - 2\rho_2 S_2 \vec{s}^{\,(11)} - 2\rho_2 \vec{S}_2 s_i^{(11)\,i} - 2\rho_2 \vec{s}^{\,(11)} S_{2\,i}^i +$$
$$-2\rho_1 \vec{S}_2 s^{(22)} - 2\rho_2 S_2 \vec{s}^{\,(22)} - 2\rho_2 \vec{S}_2 s_i^{(22)\,i} - 2\rho_2 \vec{s}^{\,(22)} S_{2\,i}^i - 2\big(\rho_1 + 4\beta_1\big) \vec{s}_\omega^{(22)} S_{1\,i}^i +$$
$$-4\rho_1 \vec{S}_2 s^{(12)} - 4\rho_2 S_2 \vec{s}^{\,(12)} - 4\rho_2 \vec{S}_2 s_i^{(12)\,i} - 4\rho_2 \vec{s}^{\,(12)} S_{2\,i}^i - 4\big(\rho_1 + 4\beta_1\big) \vec{s}^{\,(12)} S_{1\,i}^i +$$
$$-4\rho_1 \vec{S}_2 s^{\,+-3} - 4\rho_2 S_2 \vec{s}^{\,+-3} - 4\rho_2 \vec{S}_2 s_i^{\,+-3\,i} - 4\rho_2 \vec{s}^{\,+-3} S_{2\,i}^i - 4\big(\rho_1 + 4\beta_1\big) \vec{s}^{\,+-3} S_{1\,i}^i +$$
$$-2\big(\rho_2 + 4\beta_2\big) \Big(\vec{S}_2 s_\omega^{(11)} + S_2 \vec{s}_\omega^{(11)} \vec{S}_2 s_{\omega\,i}^{(11)\,i} + \vec{S}_2 s_\omega^{(22)} + S_2 \vec{s}_\omega^{(22)} + \vec{S}_2 s_{\omega\,i}^{(22)\,i} \Big) +$$
$$-4\big(\rho_2 + 4\beta_2\big) \Big(\vec{S}_2 s_\omega^{(12)} + S_2 \vec{s}_\omega^{(12)} + \vec{S}_2 s_{\omega\,i}^{(12)\,i} + \vec{S}_2 s_\omega^{\,+-3} + S_2 \vec{s}_\omega^{\,+-3} + \vec{S}_2 s_i^{\,+-3\,i} \Big) +$$
$$-4\big(\rho_2 + 4\beta_2\big) \vec{s}^{\,+-3} S_{2\,i}^i - 2\big(\rho_2 + 4\beta_2\big) \vec{s}_\omega^{(11)} S_{1\,i}^i - 2\big(\rho_2 + 4\beta_2\big) \vec{s}_\omega^{(22)} S_{2\,i}^i +$$
$$-4\rho_3 \vec{S}_+ s^{(-1)} - 2\rho_3 S_+ \vec{s}^{\,(-1)} - 2\rho_3 \vec{S}_+ s_i^{(-1)\,i} - 2\rho_3 \vec{s}^{\,(-1)} S_{+\,i}^i - 2\big(\rho_3 + 4\beta_3\big) \vec{S}_- s_{\omega\,i}^{(+2)\,i} +$$

$$
\begin{aligned}
&-4\rho_3\vec{S}_+ s^{(-2)} - 2\rho_3 S_+ \vec{s}^{(-2)} - 2\rho_3\vec{S}_+ s_i^{(-2)\,i} - 2\rho_3\vec{s}^{(-2)} S^i_{+\,i} - 2\big(\rho_3+4\beta_3\big)\vec{s}^{(+2)} S^i_{-\,i} + \\
&-4\big(\rho_2+4\beta_2\big)\vec{s}^{(12)} S^i_{2\,i} - 2\big(\rho_3+4\beta_3\big)\vec{s}^{(-1)}_\omega S^i_{+\,i} - 2\big(\rho_3+4\beta_3\big)\vec{s}^{(-2)} S^i_{+\,i} + \\
&-4\big(\rho_3+4\beta_3\big)\vec{S}_+ s^{(-1)}_\omega - 2\big(\rho_3+4\beta_3\big) S_+ \vec{s}^{(-1)}_\omega - 2\big(\rho_3+4\beta_3\big)\vec{S}_+ s^{(-1)\,i}_{\omega\,i} + \\
&-4\big(\rho_3+4\beta_3\big)\vec{S}_+ s^{(-2)}_\omega - 2\big(\rho_3+4\beta_3\big) S_+ \vec{s}^{(-2)}_\omega - 2\big(\rho_3+4\beta_3\big)\vec{S}_+ s^{(-2)\,i}_{\omega\,i} + \\
&-4\rho_3\vec{S}_- s^{(+1)} - 2\rho_3 S_- \vec{s}^{(+1)} - 2\rho_3\vec{S}_- s_i^{(+1)\,i} - 2\rho_3\vec{s}^{(+1)} S^i_{-\,i} + \\
&-4\rho_3\vec{S}_- s^{(+2)} - 2\rho_3 S_- \vec{s}^{(+2)} - 2\rho_3\vec{S}_- s_i^{(+2)\,i} - 2\rho_3\vec{s}^{(+2)} S^i_{-\,i} + \\
&-4\big(\rho_3+4\beta_3\big)\vec{S}_- s^{(+1)}_\omega - 2\big(\rho_3+4\beta_3\big) S_- \vec{s}^{(+1)}_\omega - 2\big(\rho_3+4\beta_3\big)\vec{S}_- s^{(+1)\,i}_{\omega\,i} + \\
&-4\big(\rho_3+4\beta_3\big)\vec{S}_- s^{(+2)}_\omega - 2\big(\rho_3+4\beta_3\big) S_- \vec{s}^{(+2)}_\omega - 2\big(\rho_3+4\beta_3\big)\vec{s}^{(+1)}_\omega S^i_{-\,i},
\end{aligned}
\tag{2.155}
$$

$$
\begin{aligned}
&\vec{S}_{4A} = -2\Big(\vec{e}^{\,[12]}\times\vec{b}^{\,[12]}\Big) - 2\Big(\vec{e}^{\,[12]}\times\vec{b}^{\,[21]} + \vec{e}^{\,[21]}\times\vec{b}^{\,[12]}\Big) + \\
&-4\Big(\vec{e}^{\,[13+]}\times\vec{b}^{\,[13-]} + \vec{e}^{\,[13-]}\times\vec{b}^{\,[13+]}\Big) - 4\Big(\vec{e}^{\,[23+]}\times\vec{b}^{\,[23-]} + \vec{e}^{\,[23-]}\times\vec{b}^{\,[23+]}\Big) + \\
&-8\Big(\vec{e}^{\,[13+]}\times\vec{b}^{\,[23-]} + \vec{e}^{\,[23-]}\times\vec{b}^{\,[13+]}\Big) - 4\Big(\vec{e}^{\,[12]}\times\vec{b}^{\,[+-]} + \vec{e}^{\,[12]}\times\vec{b}^{\,[+-]}\Big) + \\
&-16\Big(\vec{e}^{\,(12)}\times\vec{b}^{(12)}_\omega + \vec{e}^{(12)}_\omega\times\vec{b}^{\,(12)}\Big) - 32\Big(\vec{e}^{(12)}_\omega\times\vec{b}^{(12)}_\omega\Big) + \\
&-8\Big(\vec{e}^{\,(13+)}\times\vec{b}^{\,(13-)} + \vec{e}^{\,(13-)}\times\vec{b}^{\,(13+)}\Big) - 8\Big(\vec{e}^{\,(23+)}\times\vec{b}^{\,(23-)} + \vec{e}^{\,(23-)}\times\vec{b}^{\,(23+)}\Big) + \\
&-16\Big(\vec{e}^{\,(13+)}\times\vec{b}^{\,(23-)} + \vec{e}^{\,(23-)}\times\vec{b}^{\,(23+)}\Big) + 8i\Big(\vec{e}^{\,(13+)}\times\vec{b}^{(24-)}_\omega + \vec{e}^{(24-)}_\omega\times\vec{b}^{\,(13+)}\Big) \\
&-8i\Big(\vec{e}^{\,(13-)}\times\vec{b}^{(24+)}_\omega + \vec{e}^{(24+)}_\omega\times\vec{b}^{\,(13-)}\Big) + 8i\Big(\vec{e}^{\,(23+)}\times\vec{b}^{(14-)}_\omega + \vec{e}^{(14-)}_\omega\times\vec{b}^{\,(23+)}\Big) + \\
&+8i\Big(\vec{e}^{\,(23-)}\times\vec{b}^{(14+)}_\omega + \vec{e}^{(14+)}_\omega\times\vec{b}^{\,(23-)}\Big) + 32i\Big(\vec{e}^{(13+)}_\omega\times\vec{b}^{(24-)}_\omega + \vec{e}^{(24-)}_\omega\times\vec{b}^{(13+)}_\omega\Big) + \\
&-32i\Big(\vec{e}^{(13-)}_\omega\times\vec{b}^{(24+)}_\omega + \vec{e}^{(24+)}_\omega\times\vec{b}^{(13-)}_\omega\Big) + 32i\Big(\vec{e}^{(14-)}_\omega\times\vec{b}^{(23+)}_\omega + \vec{e}^{(23+)}_\omega\times\vec{b}^{(14-)}_\omega\Big) + \\
&-32i\Big(\vec{e}^{(14+)}_\omega\times\vec{b}^{(23-)}_\omega + \vec{e}^{(23-)}_\omega\times\vec{b}^{(14+)}_\omega\Big) + 4i\Big(\vec{e}^{\,(13-)}\times\vec{b}^{\,(24+)} + \vec{e}^{\,(24+)}\times\vec{b}^{\,(13-)}\Big) + \\
&-4i\Big(\vec{e}^{\,(13+)}\times\vec{b}^{\,(24-)} + \vec{e}^{\,(24-)}\times\vec{b}^{\,(13+)}\Big) + 8i\Big(\vec{e}^{\,(14+)}\times\vec{b}^{\,(23-)} + \vec{e}^{\,(23-)}\times\vec{b}^{\,(14+)}\Big) + \\
&-8i\Big(\vec{e}^{\,(14-)}\times\vec{b}^{\,(23+)} + \vec{e}^{\,(23+)}\times\vec{b}^{\,(14-)}\Big) + 8i\Big(\vec{e}^{\,(14-)}\times\vec{b}^{(23+)}_\omega + \vec{e}^{(23+)}_\omega\times\vec{b}^{\,(14-)}\Big) + \\
&-8i\Big(\vec{e}^{\,(14+)}\times\vec{b}^{(23-)}_\omega + \vec{e}^{(23-)}_\omega\times\vec{b}^{\,(14+)}\Big) + 8i\Big(\vec{e}^{\,(24-)}\times\vec{b}^{(13+)}_\omega + \vec{e}^{(13+)}_\omega\times\vec{b}^{\,(24-)}\Big) + \\
&-8i\Big(\vec{e}^{\,(24+)}\times\vec{b}^{(13-)}_\omega + \vec{e}^{(13-)}_\omega\times\vec{b}^{\,(24+)}\Big) + 16\Big(\vec{e}^{\,(+-)}\times\vec{b}^{(+-)}_\omega + \vec{e}^{(+-)}_\omega\times\vec{b}^{\,(+-)}\Big),
\end{aligned}
\tag{2.156}
$$

$$\vec{S}_{4S} = -4s^{\,[12]}\vec{s}^{\,[12]} - 4\vec{s}^{\,[12]} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{[12]} - 8s^{\,[+-]}\vec{s}^{\,[+-]} - 8\vec{s}^{\,[+-]} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{[+-]} - 2s^{\,[12]}\vec{s}^{\,[21]} +$$

$$-2s^{\,[21]}\vec{s}^{\,[12]} - 2\vec{s}^{\,[12]} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{[21]} - 2\vec{s}^{\,[21]} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{[12]} - 4s^{\,[13+]}\vec{s}^{\,[13-]} - 4s^{\,[13-]}\vec{s}^{\,[13+]} +$$

$$-4\vec{s}^{\,[13+]} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{[13-]} - 4\vec{s}^{\,[13-]} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{[13+]} - 4s^{\,[23+]}\vec{s}^{\,[23-]} - 4s^{\,[23-]}\vec{s}^{\,[23+]} +$$

$$-4\vec{s}^{\,[23+]} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{[23-]} - 4\vec{s}^{\,[23-]} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{[23+]} - 8s^{\,[13+]}\vec{s}^{\,[23-]} - 8s^{\,[23-]}\vec{s}^{\,[13+]} +$$

$$-8\vec{s}^{\,[13+]} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{[23-]} - 8\vec{s}^{\,[23-]} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{[13+]} - 2s^{\,(11)}\vec{s}^{\,(11)} - 2\vec{s}^{\,(11)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(11)} +$$

$$-2s^{\,(22)}\vec{s}^{\,(22)} - 2\vec{s}^{\,(22)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(22)} - 2s^{\,(11)}\vec{s}^{\,(11)}_{\omega} - 2s^{\,(11)}_{\omega}\vec{s}^{\,(11)} - 2\vec{s}^{\,(11)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(11)}_{\omega} +$$

$$-2\vec{s}^{\,(11)}_{\omega} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(11)} - 2s^{\,(22)}\vec{s}^{\,(22)}_{\omega} - 2s^{\,(22)}_{\omega}\vec{s}^{\,(22)} - 2\vec{s}^{\,(22)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(22)}_{\omega} - 2\vec{s}^{\,(22)}_{\omega} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(22)} +$$

$$-8s^{\,(11)}_{\omega}\vec{s}^{\,(11)}_{\omega} - 8\vec{s}^{\,(11)}_{\omega} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(11)}_{\omega} - 8s^{\,(22)}_{\omega}\vec{s}^{\,(22)}_{\omega} - 8\vec{s}^{\,(22)}_{\omega} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(22)}_{\omega} - 4s^{\,(11)}\vec{s}^{\,(12)} +$$

$$-4s^{\,(12)}\vec{s}^{\,(11)} - 4\vec{s}^{\,(11)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(12)} - 4\vec{s}^{\,(12)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(11)} - 4s^{\,(22)}\vec{s}^{\,(12)} - 4s^{\,(12)}\vec{s}^{\,(22)} +$$

$$-4\vec{s}^{\,(22)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(12)} - 4\vec{s}^{\,(12)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(22)} - 8s^{\,(11)}_{\omega}\vec{s}^{\,(12)} - 8s^{\,(12)}\vec{s}^{\,(11)}_{\omega} - 8\vec{s}^{\,(11)}_{\omega} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(12)} +$$

$$-8\vec{s}^{\,(12)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(11)}_{\omega} - 8s^{\,(22)}_{\omega}\vec{s}^{\,(12)} - 8s^{\,(12)}\vec{s}^{\,(22)}_{\omega} - 8\vec{s}^{\,(22)}_{\omega} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(12)} - 8\vec{s}^{\,(12)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(22)}_{\omega} +$$

$$-16s^{\,(11)}_{\omega}\vec{s}^{\,(12)}_{\omega} - 16s^{\,(12)}\vec{s}^{\,(11)}_{\omega} - 16\vec{s}^{\,(11)}_{\omega} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(12)}_{\omega} - 16\vec{s}^{\,(12)}_{\omega} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(11)}_{\omega} - 16s^{\,(22)}_{\omega}\vec{s}^{\,(12)}_{\omega} +$$

$$-16s^{\,(12)}_{\omega}\vec{s}^{\,(22)}_{\omega} - 16\vec{s}^{\,(22)}_{\omega} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(12)}_{\omega} - 16\vec{s}^{\,(12)}_{\omega} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(22)}_{\omega} - 2s^{\,(11)}\vec{s}^{\,(22)} - 2s^{\,(22)}\vec{s}^{\,(11)} +$$

$$-2\vec{s}^{\,(11)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(22)} - 2\vec{s}^{\,(22)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(11)} - 4s^{\,(11)}\vec{s}^{\,+-3} - 4s^{\,+-3}\vec{s}^{\,(11)} +$$

$$-2\vec{s}^{\,(11)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{+-3} - 2\vec{s}^{\,+-3} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(11)} - 4s^{\,(22)}\vec{s}^{\,+-3} - 4s^{\,+-3}\vec{s}^{\,(22)} - 2\vec{s}^{\,(22)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{+-3} +$$

$$-8s^{\,(12)}\vec{s}^{\,(12)} - 8\vec{s}^{\,(12)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(12)} - 8s^{\,(12)}\vec{s}^{\,(12)}_{\omega} - 8s^{\,(12)}_{\omega}\vec{s}^{\,(12)} - 8\vec{s}^{\,(12)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(12)}_{\omega} +$$

$$-16s^{\,(12)}_{\omega}\vec{s}^{\,(12)}_{\omega} - 8\vec{s}^{\,(12)}_{\omega} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(12)}_{\omega} - 2\vec{s}^{\,+-3} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(22)} - 8\vec{s}^{\,(12)}_{\omega} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(12)} +$$

$$-4s^{\,(13+)}\vec{s}^{\,(13-)} - 4s^{\,(13-)}\vec{s}^{\,(13+)} - 4\vec{s}^{\,(13+)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(13-)} - 4\vec{s}^{\,(13-)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(13+)} +$$

$$-4s^{\,(23+)}\vec{s}^{\,(23-)} - 4s^{\,(23-)}\vec{s}^{\,(23+)} - 4\vec{s}^{\,(23+)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(23-)} - 4\vec{s}^{\,(23-)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(23+)} +$$

$$-8s^{\,(13+)}\vec{s}^{\,(23-)} - 8s^{\,(23-)}\vec{s}^{\,(13+)} - 8\vec{s}^{\,(13+)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(23-)} - 8\vec{s}^{\,(23-)} \cdot \overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(13+)} +$$

$$-16\vec{s}^{\,+-3}_{\omega}s^{\,(22)}_{\omega} - 16\vec{s}^{\,(22)}_{\omega}s^{\,+-3\,i}_{\omega\,i} - 16\vec{s}^{\,+-3}_{\omega}s^{\,(22)\,i}_{\omega\,i} - 16\vec{s}^{\,(12)}s^{\,+-3}_{\omega} - 16\vec{s}^{\,+-3}_{\omega}s^{\,(12)} +$$

$$-16\vec{s}^{\,+-3}_{\omega}s^{\,(12)\,i}_{i} - 16\vec{s}^{\,(12)}s^{\,+-3\,i}_{\omega\,i} - 32\vec{s}^{\,(12)}_{\omega}s^{\,+-3}_{\omega} - 32\vec{s}^{\,+-3}_{\omega}s^{\,(12)}_{\omega} - 8\vec{s}^{\,(12)}_{\omega}s^{\,+-3\,i}_{\omega\,i} - 8\vec{s}^{\,+-3}_{\omega}s^{\,(12)\,i}_{\omega\,i}$$

$$
\begin{aligned}
&-8s^{\,(12)}\vec{s}^{\,+-3}-8s^{\,+-3}\vec{s}^{\,(12)}-8\vec{s}^{\,(12)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}^{+-3}-8\vec{s}^{\,+-3}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(12)}+\\
&-4s^{\,+-3}\vec{s}^{\,+-4}-4s^{\,+-4}\vec{s}^{\,+-3}-4\vec{s}^{\,+-3}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}^{+-4}-4\vec{s}^{\,+-4}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}^{+-3}+\\
&-4is^{\,(13+)}\vec{s}_{\omega}^{\,(24-)}-4is_{\omega}^{\,(24-)}\vec{s}^{\,(13+)}-4i\vec{s}^{\,(13+)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}_{\omega}^{(24-)}-4i\vec{s}^{\,(13+)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}_{\omega}^{(24-)}+\\
&+4is^{\,(13-)}\vec{s}_{\omega}^{\,(24+)}+4is_{\omega}^{\,(24+)}\vec{s}^{\,(13-)}+4i\vec{s}^{\,(13-)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}_{\omega}^{(24+)}-4i\vec{s}^{\,(13-)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}_{\omega}^{(24+)}+\\
&-4is^{\,(23+)}\vec{s}_{\omega}^{\,(14-)}-4is_{\omega}^{\,(14-)}\vec{s}^{\,(23+)}-4i\vec{s}^{\,(23+)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}_{\omega}^{(14-)}-4i\vec{s}^{\,(23+)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}_{\omega}^{(14-)}+\\
&+4is^{\,(23-)}\vec{s}_{\omega}^{\,(14+)}+4is_{\omega}^{\,(14+)}\vec{s}^{\,(23-)}+4i\vec{s}^{\,(23-)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}_{\omega}^{(14+)}-4i\vec{s}^{\,(23-)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}_{\omega}^{(14+)}+\\
&-16is_{\omega}^{\,(13+)}\vec{s}_{\omega}^{\,(24-)}-16is_{\omega}^{\,(24-)}\vec{s}_{\omega}^{\,(13+)}-16i\vec{s}_{\omega}^{\,(13+)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}_{\omega}^{(24-)}-16i\vec{s}_{\omega}^{\,(13+)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}_{\omega}^{(24-)}+\\
&+16is_{\omega}^{\,(13-)}\vec{s}_{\omega}^{\,(24+)}+16is_{\omega}^{\,(24+)}\vec{s}_{\omega}^{\,(13-)}+16i\vec{s}_{\omega}^{\,(13-)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}_{\omega}^{(24+)}-16i\vec{s}_{\omega}^{\,(13-)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}_{\omega}^{(24+)}+\\
&-2is^{\,(14+)}\vec{s}^{\,(23-)}-2is^{\,(23-)}\vec{s}^{\,(14+)}-2i\vec{s}^{\,(14+)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(23-)}-2i\vec{s}^{\,(23-)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}_{\omega}^{(14+)}+\\
&+2is^{\,(23+)}\vec{s}^{\,(14-)}+2is^{\,(14-)}\vec{s}^{\,(23+)}+2i\vec{s}^{\,(23+)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(14-)}-2i\vec{s}^{\,(14-)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}_{\omega}^{(23+)}+\\
&-16is_{\omega}^{\,(14-)}\vec{s}_{\omega}^{\,(23+)}-16is_{\omega}^{\,(23+)}\vec{s}_{\omega}^{\,(14-)}-16i\vec{s}_{\omega}^{\,(14-)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}_{\omega}^{(23+)}-16i\vec{s}_{\omega}^{\,(23+)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}_{\omega}^{(14-)}+\\
&+16is_{\omega}^{\,(14+)}\vec{s}_{\omega}^{\,(23-)}+16is_{\omega}^{\,(23-)}\vec{s}_{\omega}^{\,(14+)}+16i\vec{s}_{\omega}^{\,(14+)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}_{\omega}^{(23-)}-16i\vec{s}_{\omega}^{\,(23-)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}_{\omega}^{(14+)}+\\
&-2is^{\,(13-)}\vec{s}^{\,(24+)}-2is^{\,(24+)}\vec{s}^{\,(13-)}-2i\vec{s}^{\,(13-)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(24+)}-2i\vec{s}^{\,(24+)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}_{\omega}^{(13-)}+\\
&+2is^{\,(13+)}\vec{s}^{\,(24-)}+2is^{\,(24-)}\vec{s}^{\,(13+)}+2i\vec{s}^{\,(13+)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(24-)}-2i\vec{s}^{\,(24-)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}_{\omega}^{(13+)}+\\
&-4is^{\,(14-)}\vec{s}_{\omega}^{\,(23+)}-4is_{\omega}^{\,(23+)}\vec{s}^{\,(14-)}-4i\vec{s}^{\,(14-)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}_{\omega}^{(23+)}-4i\vec{s}^{\,(14-)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}_{\omega}^{(23+)}+\\
&+4is^{\,(14+)}\vec{s}_{\omega}^{\,(23-)}+4is_{\omega}^{\,(23-)}\vec{s}^{\,(14+)}+4i\vec{s}^{\,(14+)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}_{\omega}^{(23-)}-4i\vec{s}_{\omega}^{\,(23-)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(14+)}+\\
&-4is^{\,(24-)}\vec{s}_{\omega}^{\,(13+)}-4is_{\omega}^{\,(13+)}\vec{s}^{\,(24-)}-4i\vec{s}^{\,(24-)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}_{\omega}^{(13+)}-4i\vec{s}^{\,(24-)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}_{\omega}^{(13+)}+\\
&+4is^{\,(24+)}\vec{s}_{\omega}^{\,(13-)}+4is_{\omega}^{\,(13-)}\vec{s}^{\,(24+)}+4i\vec{s}^{\,(24+)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}_{\omega}^{(13-)}-4i\vec{s}_{\omega}^{\,(13-)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{s}{}^{(24+)}+\\
&+4\vec{s}^{\,[13+]}s^{\,[13-]}+4\vec{s}^{\,[13-]}s^{\,[13+]}+4\vec{s}^{\,[13+]}s_{i}^{\,[13-]\,i}+4\vec{s}^{\,[13-]}s_{i}^{\,[13+]\,i}+4\vec{s}^{\,[23+]}s^{\,[23-]}+\\
&+4\vec{s}^{\,[23-]}s^{\,[23+]}+4\vec{s}^{\,[23+]}s_{i}^{\,[23-]\,i}+4\vec{s}^{\,[23-]}s_{i}^{\,[23+]\,i}+4\vec{s}^{\,[13+]}s^{\,[13-]}+4\vec{s}^{\,[13-]}s^{\,[13+]}+\\
&+4\vec{s}^{\,[13+]}s_{i}^{\,[13-]\,i}+4\vec{s}^{\,[13-]}s_{i}^{\,[13+]\,i}+4\vec{s}^{\,[13+]}s^{\,[23-]}+4\vec{s}^{\,[23-]}s^{\,[13+]}+4\vec{s}^{\,[13+]}s_{i}^{\,[23-]\,i}+\\
&-4\vec{s}^{\,[13-]}s^{\,[23+]}-4\vec{s}^{\,[23+]}s^{\,[13-]}+4\vec{s}^{\,[13-]}s_{i}^{\,[23+]\,i}+4\vec{s}^{\,[23+]}s_{i}^{\,[13-]\,i}+4\vec{s}^{\,[23-]}s_{i}^{\,[13+]\,i}+\\
&-4i\vec{s}^{\,[13-]}s^{\,[24+]}-4i\vec{s}^{\,[24+]}s^{\,[13-]}-4i\vec{s}^{\,[13-]}s_{i}^{\,[24+]\,i}-4i\vec{s}^{\,[24+]}s_{i}^{\,[13-]\,i}+4i\vec{s}^{\,[13+]}s^{\,[24-]}+\\
&+4i\vec{s}^{\,[24-]}s^{\,[13+]}+4i\vec{s}^{\,[13+]}s_{i}^{\,[24-]\,i}+4i\vec{s}^{\,[24-]}s_{i}^{\,[13+]\,i}-4\vec{s}^{\,(11)}s_{\omega}^{\,(22)}-4\vec{s}_{\omega}^{\,(22)}s^{\,(11)}\\
&-4\vec{s}^{\,(11)}s_{\omega\,i}^{\,(22)\,i}-4\vec{s}_{\omega}^{\,(22)}s_{i}^{\,(11)\,i}-8\vec{s}_{\omega}^{\,(11)}s_{\omega}^{\,(22)}-8\vec{s}_{\omega}^{\,(22)}s_{\omega}^{\,(11)}-8\vec{s}_{\omega}^{\,(11)}s_{\omega\,i}^{\,(22)\,i}-8\vec{s}_{\omega}^{\,(22)}s_{\omega\,i}^{\,(11)\,i}+
\end{aligned}
\tag{2.157}
$$

$$
\begin{aligned}
&-4\vec{s}^{\,(13+)}s^{\,(13-)} - 4\vec{s}^{\,(13-)}s^{\,(13+)} - 4\vec{s}^{\,(13+)}s_i^{(13-)\,i} - 4\vec{s}^{\,(13-)}s_i^{(13+)\,i} + \\
&-4\vec{s}^{\,(23+)}s^{\,(23-)} - 4\vec{s}^{\,(23-)}s^{\,(23+)} - 4\vec{s}^{\,(23+)}s_i^{(23-)\,i} - 4\vec{s}^{\,(23-)}s_i^{(23+)\,i} + \\
&-16\vec{s}^{\,(13+)}s_\omega^{(13-)} - 16\vec{s}_\omega^{(13-)}s^{\,(13+)} - 16\vec{s}^{\,(13+)}s_{\omega\,i}^{(13-)\,i} - 16\vec{s}_\omega^{(13-)}s_i^{(13+)\,i} + \\
&-16\vec{s}^{\,(23+)}s_\omega^{(23-)} - 16\vec{s}_\omega^{(23-)}s^{\,(23+)} - 16\vec{s}^{\,(23+)}s_{\omega\,i}^{(23-)\,i} - 16\vec{s}_\omega^{(23-)}s_i^{(23+)\,i} + \\
&-32\vec{s}_\omega^{(13+)}s_\omega^{(13-)} - 32\vec{s}_\omega^{(13-)}s_\omega^{(13+)} - 32\vec{s}_\omega^{(13+)}s_{\omega\,i}^{(13-)\,i} - 32\vec{s}_\omega^{(13-)}s_{\omega\,i}^{(13+)\,i} + \\
&-32\vec{s}_\omega^{(23+)}s_\omega^{(23-)} - 32\vec{s}_\omega^{(23-)}s_\omega^{(23+)} - 32\vec{s}_\omega^{(23+)}s_{\omega\,i}^{(23-)\,i} - 32\vec{s}_\omega^{(23-)}s_{\omega\,i}^{(23+)\,i} + \\
&-4\vec{s}^{\,(13+)}s^{\,(23-)} - 4\vec{s}^{\,(23-)}s^{\,(13+)} - 4\vec{s}^{\,(13+)}s_i^{(23-)\,i} - 4\vec{s}^{\,(23-)}s_i^{(13+)\,i} + \\
&+4\vec{s}^{\,(13-)}s^{\,(23+)} + 4\vec{s}^{\,(23+)}s^{\,(13-)} + 4\vec{s}^{\,(13-)}s_i^{(23+)\,i} + 4\vec{s}^{\,(23+)}s_i^{(13-)\,i} + \\
&-16\vec{s}^{\,(13+)}s_\omega^{(13-)} - 16\vec{s}_\omega^{(13-)}s^{\,(13+)} - 16\vec{s}^{\,(13+)}s_{\omega\,i}^{(13-)\,i} - 16\vec{s}_\omega^{(13-)}s_i^{(13+)\,i} + \\
&+16\vec{s}^{\,(13-)}s_\omega^{(13+)} + 16\vec{s}_\omega^{(13+)}s^{\,(13-)} + 16\vec{s}^{\,(13-)}s_{\omega\,i}^{(13+)\,i} + 16\vec{s}_\omega^{(13+)}s_i^{(13-)\,i} + \\
&-32\vec{s}_\omega^{(13+)}s_\omega^{(13-)} - 32\vec{s}_\omega^{(13-)}s_\omega^{(13+)} - 32\vec{s}_\omega^{(13+)}s_{\omega\,i}^{(13-)\,i} - 32\vec{s}_\omega^{(13-)}s_{\omega\,i}^{(13+)\,i} + \\
&+32\vec{s}_\omega^{(13-)}s_\omega^{(13+)} + 32\vec{s}_\omega^{(13+)}s_\omega^{(13-)} + 32\vec{s}_\omega^{(13-)}s_{\omega\,i}^{(13+)\,i} + 32\vec{s}_\omega^{(13+)}s_{\omega\,i}^{(13-)\,i} + \\
&+8\vec{s}^{\,(+-)}s^{\,(+-)} + 8\vec{s}^{\,(+-)}s_i^{(+-)\,i} + 8\vec{s}^{\,[+-]}s^{\,[+-]} + 8\vec{s}^{\,[+-]}s_i^{[+-]\,i} - 8\vec{s}^{\,+-3}s_\omega^{+-4} + \\
&-8\vec{s}_\omega^{\,+-4}s^{\,+-3} - 8\vec{s}^{\,+-3}s_{\omega\,i}^{+-4\,i} - 8\vec{s}_\omega^{\,+-4}s_i^{+-3\,i} - 16\vec{s}_\omega^{\,+-3}s_\omega^{+-4} - 16\vec{s}_\omega^{\,+-4}s_\omega^{+-3} + \\
&-16\vec{s}_\omega^{\,+-3}s_{\omega\,i}^{+-4\,i} - 16\vec{s}_\omega^{\,+-4}s_{\omega\,i}^{+-3\,i} - 8\vec{s}^{\,(11)}s_\omega^{+-3} - 8\vec{s}_\omega^{\,+-3}s^{\,(11)} - 8\vec{s}^{\,(11)}s_{\omega\,i}^{+-3\,i} + \\
&-8\vec{s}_\omega^{\,+-3}s_i^{(11)\,i} - 8\vec{s}^{\,(22)}s_\omega^{+-3} - 8\vec{s}_\omega^{\,+-3}s^{\,(22)} - 8\vec{s}^{\,(22}s_{\omega\,i}^{+-3\,i} - 8\vec{s}_\omega^{\,+-3}s_i^{(22)\,i} + \\
&-16\vec{s}_\omega^{(11)}s_\omega^{+-3} - 16\vec{s}_\omega^{\,+-3}s_\omega^{(11)} - 16\vec{s}_\omega^{(11)}s_{\omega\,i}^{+-3\,i} - 16\vec{s}_\omega^{\,+-3}s_{\omega\,i}^{(11)\,i} - 16\vec{s}_\omega^{(22)}s_\omega^{+-3}
\end{aligned}
\tag{2.158}
$$

Observe que o fluxo de energia sendo proposto pelo vetor de Poynting da eq.(2.145) é diverso daquele apresentado pelo eletromagnetismo constitutivo [69]. Por exemplo, a literatura atual não apresenta os vetores de polarização e magnetização dados por um fluxo apresentado pelas eqs.(2.146-2.154).

Por simplicidade, não descrevemos o termo de cisalhamento, que será incluído em um trabalho em desenvolvimento atualmente [70]. Este trabalho incluirá também um estudo

do tensor completo de momento angular e o estudo do torque devido ao spin nesta versão eletromagnética estendida.

Com os resultados trabalhados neste Capítulo, desenvolvemos os aspectos essenciais da Eletrodinâmica com quadruplete de fótons que nos possibilitarão, no Capítulo que segue, a iniciar uma nossa proposta de fotônica, que, neste contexto, significa um Eletromagnetismo no qual, além das correntes de cargas, há também correntes fotônicas, estas transportando spin.

Capítulo 3

Fotônica

3.1 Introdução

Para o Eletromagnetismo Maxwelliano, a luz é consequência das equações para os campos elétrico ne magnético. Não é origem dos campos. A luz funciona como um serviço de transmissão onde a carga elétrica é a fonte para os campos eletromagnéticos que se propagam neste oceano. O ponto que questionamos na formulação Maxwelliana é o fato do fóton, sendo o transmissor da invariância da luz, não conseguir ser fonte de seu próprio campo eletromagnético.

A pesquisa sobre um fóton primordial está em aberto. O mapa recente da Via Láctea pelo ESA cataloga em três dimensões 1.142 bilhões de estrelas. Mostra o Universo como uma indústria de estrelas. Também, não faltam nuvens fotônicas a formar berçários de estrelas. A questão é se a luz sendo produzida por essas nuvens e estrelas origina-se das equações de Maxwell ou existe uma luz primordial a ser entendida.

—Existe uma luz fotônica ainda não percebida pela Física atual?

A física fotônica é uma descrição física que remonta ao Universo primordial. Relembrando a estrutura de um Big Bang baseado em um universo inflacionário, a era de radiação dominada por 10^{13}s. Portanto, a formação de matéria (bariogênese e assimetria da anti-matéria) poderia ser tratada em nossa proposta, onde a luz não é apenas o carregador da interação eletromagnética, mas é vista como uma origem para a matéria atual, como apontado por Born e Infeld.

Existe uma física fotônica a ser entendida. Devemos iniciar afirmando que as equações de Maxwell não definem o fóton. Lá o elétron é ativo enquanto o fóton é passivo. O comportamento do fóton é como um lago transmitindo o fenômeno eletromagnético. Nesta interpretação, o lado esquerdo das equações de Maxwell funciona como um lago de transmissão, enquanto o lado direito significa as fontes sendo atiradas no lado. Então, podemos dizer que no momento presente a física está apenas atirando pedras carregadas. Além da pedra de Dirac $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$, outras fontes como $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma^{5}\psi$, $\bar{\psi}\Sigma^{\mu\nu}\psi$, e, também com spins diferentes sendo atiradas no rio eletromagnético. Devemos agora entender sobre a pedra fotônica.

Um eletromagnetismo fotônico está a espera de ser desenvolvido. Algo que contenha Maxwell e vai além da carga elétrica como a única fonte para o fenômeno eletromagnético. A expectativa é que através de um EM não-linear se desenvolvam cargas fotônicas como fontes do campo eletromagnético do fóton. Desde a equação de onda de Maxwell (1864), Mecânica Quântica, Schrödinger (1926), equação de spin não-relativístico, Pauli (1927), interação eletromagnética, Dirac (1928) que a Física vem se encaminhando e da fisicidade ao campo fotônico A_{μ}. Embora a invariância de gauge o proíbe de ser medido diretamente a QED o estabeleceu como variável primordial.

A física persegue a luz como origem. A primeira referência publicada no espalhamento luz-luz veio através do russo S.Vavilov em 1928 [74] e o físico alemão O.Halpern em 1934 [75]. Um passo adiante foi dado por Euler-Heisenberg, também em 1934, mostrando na estrutura da eletrodinâmica quântica que a interação fóton-fóton é possível a nível árvore [6]. Entretanto, este modelo é limitado a uma teoria efetiva. Portanto, QED permanece nos dias atuais como a teoria hegemônica mesmo com o espalhamento de Delbrück [4] proposto desde 1930 não ocorrer a nível árvore. Mais sobre a luz a nível árvore está ainda a ser investigado.

A física está à procura pelo fóton primordial. Entretanto, no Zeitgeist atual, a maioria dos modelos eletromagnéticos entende que a interação eA_{μ} é universal, QED não comporta fótons auto-interagentes a nível árvore (correções de radiação são necessárias) e não há carga fotônica. Um passo à frente deve ser dado, tal que preserve a invariância

da luz e a conservação da carga elétrica, mas, capaz de colocar a luz em sua posição de liderança. Uma nova interpretação é necessária. Para isto, esta tese desenvolve um modelo baseado em uma quarta interpretação da invariância da luz. Após a equação de Maxwell, relatividade, Grupo de Lorentz, a quarta interpretação introduz campos em uma mesma representação de Lorentz [27] . Consequentemente, a partir da representação $\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}$ introduz-se o conjunto de campos $\{A_\mu, U_\mu, V_\mu^\pm\}$, que fornece novas possibilidades para a luz ser entendida.

Uma nova era do fóton desponta. Uma região física fotônica é gerada por um novo entendimento da própria natureza da luz. Novos aspectos físicos aparecem através de fótons auto-interagentes. Uma primeira compreensão é que o espalhamento fóton-fóton pode ser tratado a nível árvore e sem matéria fermiônica e sem a presença de carga elétrica. Fenômenos como difração, interferência, emissões de ondas terão novas contribuições. Portanto, efeitos como em ótica não-linear, onde fótons auto-interangentes podem funcionar como um novo argumento para explorar as variações de frequência. Atualmente a variação de frequências está sendo tratada apenas como tópico cinemático. Entretanto uma Lagrangeana tri e quadri-vértices podem justificar porque um fóton incidente vermelho pode ser transformado em um azul.

O próximo passo desse eletromagnetismo não-linear proposto pelo Capítulo 2 é compreender o surgimento da fotônica. Luminosidade e efeitos de vórtices são esperados como a ocorrência de estruturas luminosas como nuvens de fótons, bolas de fótons e jorros de luz como jets, cones, spots. A não-linearidade de fótons pode também aparecer como sólitons. Outra situação é a dinâmica e as interações de conglomerados de fótons como $z_{\mu\nu}^{(11)}$. Permite a existência de nuvens de fótons. Definitivamente, gases de fótons interagindo sem elétrons e pósitrons mostraram uma física além da QED. Espera-se que este fato seja comum na formação de estrelas. Ao nível de nossos experimentos, a auto-interação de fótons pode ser vista pelo aumento da energia dos fótons. O espalhamento inelástico luz-luz envolvendo apenas fótons reais é outro candidato.

Para se entender a fotônica propriamente dita, devemos é organizar uma abordagem perturbativa. Reescrevendo-se $\mathcal{L}$ da eq.(2.2) em termos de campos, obtém-se

$$\mathcal{L}_K = \mathcal{L}_K^A + \mathcal{L}_K^S \tag{3.1}$$

onde o setor cinético antissimétrico é

$$\mathcal{L}_K^A = a_{IJ}\partial_\mu A_\nu^I \partial^\mu A^{J\,\nu} + b_{IJ}\partial_\mu A_\nu^I \partial^\nu A^{\mu J} \tag{3.2}$$

o qual expandido em quatro campos fornece

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_K^A &= a_{11}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + b_{11}\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu + \\
&+ a_{22}\partial_\mu U_\nu \partial^\mu U^\nu + b_{22}\partial_\mu U_\nu \partial^\nu U^\mu + \\
&+ a_{33}\partial_\mu V_\nu^+ \partial^\mu V^{-\,\nu} + b_{33}\partial_\mu V_\nu^+ \partial^\nu V^{-\,\mu}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

O setor simétrico cinético é

$$\mathcal{L}_K^S = c_{IJ}\partial_\mu A_\nu^I \partial^\mu A^{\nu J} + d_{IJ}\partial_\mu A_\nu^I \partial^\nu A^{\mu J} + e_{IJ}\partial_\mu A^{\mu I} \partial^\nu A^{\nu J} \tag{3.4}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_K^S &= c_{(11)}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + d_{(11)}\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu + \\
&+ c_{(22)}\partial_\mu U_\nu \partial^\mu U^\nu + d_{(22)}\partial_\mu U_\nu \partial^\nu U^\mu + \\
&+ c_{(33)}\partial_\mu V_\nu^+ \partial^\mu V^{-\,\nu} + d_{(33)}\partial_\mu V_\nu^+ \partial^\nu V^{-\,\mu} + \\
&+ e_{(11)}\partial_\mu A^\mu \partial^\nu A^\nu + e_{(22)}\partial_\mu U^\mu \partial^\nu U^\nu + \\
&+ e_{(12)}\partial_\mu A^\mu \partial^\nu U^\nu + e_{(33)}\partial_\mu V^{+\mu} \partial^\nu V^{-\nu}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

O termo de massa é

$$\mathcal{L}_M = m_{IJ}^2 A_\mu^I A^{\mu J} \tag{3.6}$$

com

$$\mathcal{L}_M = m_{22}^2 U_\mu U^\mu + m_{33}^2 V_\mu^+ V^{\mu -} \tag{3.7}$$

O termo de gauge fixing se torna

$$\mathcal{L}_{GF} = \psi_{IJ} \partial_\mu A^{\mu I} \partial^\nu A^{\nu J} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{GF} = {} & \psi_{(11)} \partial_\mu A^\mu \partial^\nu A^\nu + \psi_{(22)} \partial_\mu U^\mu \partial^\nu U^\nu + \\ & + \psi_{(12)} \partial_\mu A^\mu \partial^\nu U^\nu + \psi_{(33)} \partial_\mu V^{+\mu} \partial^\nu V^{-\nu} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Separando as interações

$$\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_I^3 + \mathcal{L}_I^4 \tag{3.10}$$

e decompondo o termo trilinear

$$\mathcal{L}_I^3 = \mathcal{L}_A^3 + \mathcal{L}_S^3 + \mathcal{L}_{\mathbf{st}}^3 \tag{3.11}$$

A parte antissimétrica é

$$\mathcal{L}_A^3 = a_{IJK} \partial_\mu A_\nu^I A^{\mu J} A^{\nu K}, \tag{3.12}$$

resultando na seguinte decomposição em quatro campos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^3_A = & \, a_{112}\partial_\mu A_\nu A^\mu U^\nu + a_{121}\partial_\mu A_\nu U^\mu A^\nu + \\
& + a_{134}\partial_\mu A_\nu V^{+\,\mu} V^{-\,\nu} + a_{143}\partial_\mu A_\nu V^{-\,\mu} V^{+\,\nu} + \\
& + a_{212}\partial_\mu U_\nu A^\mu U^\nu + a_{212}\partial_\mu U_\nu A^\nu U^\mu + \\
& + a_{234}\partial_\mu U_\nu V^{+\,\mu} V^{-\,\nu} + a_{243}\partial_\mu U_\nu V^{-\,\mu} V^{+\,\nu} + \\
& + a_{314}\partial_\mu V^+_\nu A^\mu V^{-\,\nu} + a_{314}\partial_\mu V^+_\nu A^\nu V^{-\,\mu} + \\
& + a_{324}\partial_\mu V^+_\nu U^\mu V^{-\,\nu} + a_{324}\partial_\mu V^+_\nu U^\nu V^{-\,\mu} + \\
& + a_{413}\partial_\mu V^-_\nu A^\mu V^{+\,\nu} + a_{413}\partial_\mu V^-_\nu A^\nu V^{+\,\mu} + \\
& + a_{423}\partial_\mu V^-_\nu U^\mu V^{+\,\nu} + a_{423}\partial_\mu V^-_\nu U^\nu V^{+\,\mu}
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

O setor trilinear simétrico resulta

$$
\mathcal{L}^3_S = b_{IJK}\partial_\mu A^I_\nu A^{\mu J} A^{\nu K} + c_{IJK}\partial_\mu A^{\mu\, I} A^J_\nu A^{\nu K}
\tag{3.14}
$$

com a decomposição em quatro campos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^3_S &= b_{111}\partial_\mu A_\nu A^\mu A^\nu + b_{122}\partial_\mu A_\nu U^\mu U^\nu + b_{112}\partial_\mu A_\nu A^\mu U^\nu + \\
&+ b_{121}\partial_\mu A_\nu U^\mu A^\nu + b_{134}\partial_\mu A_\nu V^{+\mu} V^{-\nu} + b_{143}\partial_\mu A_\nu V^{-\mu} V^{+\nu} + \\
&+ b_{211}\partial_\mu U_\nu A^\mu A^\nu + b_{222}\partial_\mu U_\nu U^\mu U^\nu + b_{212}\partial_\mu U_\nu A^\mu U^\nu + \\
&+ b_{221}\partial_\mu U_\nu U^\mu A^\nu + b_{234}\partial_\mu U_\nu V^{+\mu} V^{-\nu} + b_{243}\partial_\mu U_\nu V^{-\mu} V^{+\nu} + \\
&+ b_{314}\partial_\mu V^+_\nu A^\mu V^{-\nu} + b_{314}\partial_\mu V^+_\nu A^\nu V^{-\mu} + b_{324}\partial_\mu V^+_\nu U^\mu V^{-\nu} + \\
&+ b_{324}\partial_\mu V^+_\nu U^\nu V^{-\mu} + b_{413}\partial_\mu V^-_\nu A^\mu V^{+\nu} + b_{413}\partial_\mu V^-_\nu A^\nu V^{+\mu} + \\
&+ b_{423}\partial_\mu V^-_\nu U^\mu V^{+\nu} + b_{423}\partial_\mu V^-_\nu U^\nu V^{+\mu} \\
&+ c_{111}\partial_\mu A^\mu A_\nu A^\nu + c_{122}\partial_\mu A^\mu U_\nu U^\nu + c_{112}\partial_\mu A^\mu A_\nu U^\nu + c_{134}\partial_\mu A^\mu V^+_\nu V^{-\nu} + \\
&+ c_{211}\partial_\mu U^\mu A_\nu A^\nu + c_{222}\partial_\mu U^\mu U_\nu U^\nu + c_{212}\partial_\mu U^\mu A_\nu U^\nu + c_{234}\partial_\mu U^\mu V^+_\nu V^{-\nu} + \\
&+ c_{314}\partial_\mu V^{+\mu} A_\nu V^{-\nu} + c_{324}\partial_\mu V^{+\mu} U_\nu V^{-\nu} + c_{413}\partial_\mu V^{-\mu} A_\nu V^{+\nu} + c_{423}\partial_\mu V^{-\mu} U_\nu V^{+\nu}
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

A contribuição semi-topológica trilinear é dada por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^3_{\mathbf{st}} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Big\{ & 2(\alpha_0 A_\mu + \alpha_1 U_\mu)[i(V^+_\nu V^-_{\rho\sigma} - V^-_\nu V^+_{\rho\sigma})] + (\alpha_0 A_{\rho\sigma} + \alpha_1 U_{\rho\sigma})[i({}^{[+-]}z_{\mu\nu} + {}^{[-+]}z_{\mu\nu})] \\
& + 4\,{}^{[12]}z_{\mu\nu}\,(\alpha_0 A_{\rho\sigma} + \alpha_1 U_{\rho\sigma})\Big\}.
\end{aligned}
$$

A decomposição do termo quadrilinear, resulta

$$
\mathcal{L}^4_I = \mathcal{L}^4_A + \mathcal{L}^4_S + \mathcal{L}^4_{\mathbf{st}} \tag{3.16}
$$

onde

$$
\mathcal{L}^4_A = b_{IJKL} A^I_\mu A^J_\nu A^{\mu K} A^{\nu L} \tag{3.17}
$$

Escrevendo em quatro campos:

$$\mathcal{L}_A^4 = b_{1112}A_\mu U_\nu A^\mu U^\nu + b_{1122}A_\mu A_\nu U^\mu U^\nu + b_{1134}A_\mu A_\nu V^{+\mu}V^{-\nu} + b_{2234}U_\mu U_\nu V^{+\mu}V^{-\nu} +$$
$$+b_{1314}A_\mu V_\nu^+ A^\mu V^{-\nu} + b_{2324}U_\mu V_\nu^+ U^\mu V^{-\nu} + b_{1324}A_\mu V_\nu^+ U^\mu V^{-\nu} + b_{1234}A_\mu U_\nu V^{+\mu}V^{-\nu} +$$
$$+b_{1243}A_\mu U_\nu V^{-\mu}V^{+\nu} + b_{3434}V_\mu^+ V_\nu^- V^{+\mu}V^{-\nu} + b_{3443}V_\mu^+ V_\nu^- V^{-\mu}V^{+\nu} \tag{3.18}$$

O setor simétrico quadrilinear é dado por

$$\mathcal{L}_S^4 = c_{IJKL}A_\mu^I A_\nu^J A^{\mu K} A^{\nu L} \tag{3.19}$$

resultando

$$\mathcal{L}_S^4 = c_{1111}A_\mu A_\nu A^\mu A^\nu + c_{2222}U_\mu U_\nu U^\mu U^\nu + c_{1112}A_\mu A_\nu A^\mu U^\nu + c_{2221}U_\mu U_\nu U^\mu A^\nu +$$
$$+c_{1212}A_\mu U_\nu A^\mu U^\nu + c_{1122}A_\mu A_\nu U^\mu U^\nu + c_{1134}A_\mu A_\nu V^{+\mu}V^{-\nu} + c_{2234}U_\mu U_\nu V^{+\mu}V^{-\nu} +$$
$$+c_{1314}A_\mu V_\nu^+ A^\mu V^{-\nu} + c_{2324}U_\mu V_\nu^+ U^\mu V^{-\nu} + c_{1324}A_\mu V_\nu^+ U^\mu V^{-\nu} + c_{1234}A_\mu U_\nu V^{+\mu}V^{-\nu} +$$
$$+c_{1243}A_\mu U_\nu V^{-\mu}V^{+\nu} + c_{3434}V_\mu^+ V_\nu^- V^{+\mu}V^{-\nu} + c_{3443}V_\mu^+ V_\nu^+ V^{-\mu}V^{+\nu} \tag{3.20}$$

O setor semi-topológico quadrilinear é dado por

$$\mathcal{L}_{\mathbf{st}}^4 = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Big\{4\,{}^{[12]}_{\mu\nu}z\,{}^{[12]}_{\rho\sigma}z + 4\,{}^{[12]}_{\mu\nu}z\,({}^{[+-]}_{\rho\sigma}z + {}^{[-+]}_{\rho\sigma}z) + ({}^{[+-]}_{\mu\nu}z + {}^{[-+]}_{\mu\nu}z)({}^{[+-]}_{\rho\sigma}z + {}^{[-+]}_{\rho\sigma}z)\Big\}. \tag{3.21}$$

Tomando os setores como um todo, temos

$$\mathcal{L}_I^4 = a_{1111}A_\mu A_\nu A^\mu A^\nu + a_{2222}U_\mu U_\nu U^\mu U^\nu + a_{1112}A_\mu A_\nu A^\mu U^\nu + a_{2221}U_\mu U_\nu U^\mu A^\nu +$$
$$+a_{1212}A_\mu U_\nu A^\mu U^\nu + a_{1122}A_\mu A_\nu U^\mu U^\nu + a_{1134}A_\mu A_\nu V^{+\mu}V^{-\nu} + a_{2234}U_\mu U_\nu V^{+\mu}V^{-\nu} +$$
$$+a_{1314}A_\mu V_\nu^+ A^\mu V^{-\nu} + a_{2324}U_\mu V_\nu^+ U^\mu V^{-\nu} + a_{1324}A_\mu V_\nu^+ U^\mu V^{-\,\nu} + a_{1234}A_\mu U_\nu V^{+\mu}V^{-\,\nu} +$$
$$+a_{1243}A_\mu U_\nu V^{-\mu}V^{+\,\nu} + a_{3434}V_\mu^+ V_\nu^- V^{+\mu}V^{-\nu} + a_{3443}V_\mu^+ V_\nu^+ V^{-\mu}V^{+\nu} \tag{3.22}$$

onde os coeficientes escritos em termos dos coeficientes livres da Lagrangeana eq.(2.2) são apresentados no Apêndice D.

Os termos tri e quadri-lineares ∂AAA e $AAAA$ explicitam a presença da fotônica pura. Mostramos que além do fóton de Maxwell, fóton de Einstein, fóton da Mecânica Quântica, surge o fóton auto-interagente com uma constante de acoplamento diversa da carga elétrica. Os demais termos mostram o fóton interagindo com os demais campos. Diferentemente do Modelo Padrão, desenvolve a interação entre $A_\mu eU_\mu$. Uma proposta de eletromagnetismo neutro.

3.1.1 Propagadores

Estabelecida a Lagrangeana, o primeiro passo é um estudo sobre os propagadores. Eles reresentam um primeiro contato entre um modelo de teoria de campo e a física. Através deles pode-se ler os números quânticos internos e externos carregados por um dado modelo. Seus pólos e resíduos informam sobre as condições para a fisicidade do modelo, nos graus de liberdade informados, e nas propriedades como a largura da taxa de decaimento. Entretanto a informação mais crucial é sobre a pré-condição para que as entidades físicas associadas possam ser calculadas: a renormalização. Para que um modelo não seja rejeitado em seu primeiro estágio, ele irá precisar de um propagador saudável.

Expressando a parte cinética do conjunto de campos

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_K + \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{GF}$$

como

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} A_{\mu I} (\mathcal{O}^{\mu\nu})_{IJ} A_{\nu J} \tag{3.23}$$

pode-se derivar os correspondentes propagadores como $i\mathcal{O}^{-1}$.

Portanto decompondo eq () em termos de operadores tranversais e longitudinais $\theta^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\Box}, \omega^{\mu\nu} = \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\Box}$, pode-se derivar a seguinte expressão

$$\mathcal{L}_K = \frac{1}{2} \left(A_\mu, U_\mu, V_\mu^+, V_\mu^- \right) \mathcal{O}_{\mu\nu} \begin{pmatrix} A_\nu \\ U_\nu \\ V_\nu^+ \\ V_\nu^- \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

onde

$$\mathcal{O}^{\mu\nu} = A\theta^{\mu\nu} + B\omega^{\mu\nu} \tag{3.25}$$

com

$$A = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & & \\ 0 & p_2 & & \\ & & 0 & r \\ & 0 & r & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} l_1 & q & & \\ q & l_2 & & \\ & & 0 & s \\ & 0 & s & 0 \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

cujos elementos são

$$\begin{aligned} p_1 &= -4(a_1 + b_{11})\Box \\ p_2 &= -4(a_2 + b_{22})\Box - \mu_V^2 \\ r &= -4(a_3 + b_{33})\Box - \mu_V^2, \end{aligned} \tag{3.27}$$

e

$$\begin{aligned} l_1 &= A_{11}\Box, \quad A_{11} = -2(4b_{11} + 4c_{11} + \xi_{11}) \\ l_2 &= A_{22}\Box - \mu_V^2, \quad A_{22} = -2(4b_{22} + 4c_{22} + \xi_{22}) \\ q &= A_{12}\Box, \quad A_{12} = -2(4c_{12} + \xi_{12}) \\ s &= A_{33}\Box - \mu_V^2, \quad A_{33} = -2(4b_{33} + 4c_{33} + \xi_{33}) \end{aligned} \tag{3.28}$$

Os propagadores transversais correspondentes são

$$\langle A_\mu A_\nu \rangle_T = -\frac{a_{11}}{\Box} \quad , \quad a_{11} = \frac{1}{4(a_1 + b_{11})} \tag{3.29}$$

$$\langle U_\mu U_\nu \rangle_T = -\frac{b_{11}}{\Box + \frac{\mu_V^2}{4(a_2+b_{22})}} \quad , \quad b_{11} = \frac{1}{4(a_2 + b_{22})} \tag{3.30}$$

$$\left\langle V_\mu^+ V_\nu^- \right\rangle_T = -\frac{c_{11}}{\Box + \frac{\mu_V^2}{4(a_3+b_{33})}} \quad , \quad c_{11} = \frac{1}{4(a_3 + b_{33})} \tag{3.31}$$

$$\tag{3.32}$$

As equações ((3.29)-(3.31)) estão mostrando três pólos de spin-1 onde um é sem massa (fóton), outro $m_U^2 = \frac{\mu_U^2}{4(a_2+b_{22})}$ (fóton massivo) e $m_V^2 = \frac{\mu_V^2}{4(a_3+b_{33})}$ (fótons carregados).

Os propagadores longitudinais são

$$\langle A_\mu A_\nu \rangle_L = -\frac{A_{11}}{\Box} - \frac{d_{11}}{\Box - \frac{A_{11}}{A_{11}A_{22}-A_{12}}\mu_U^2}, d_{11} = \frac{A_{11}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) - A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \tag{3.33}$$

$$\langle U_\mu U_\nu \rangle_L = -\frac{e_{11}}{\Box + \frac{A_{11}}{A_{12}^2-A_{11}A_{22}}\mu_U^2} \quad , \quad e_{11} = \frac{A_{11}}{A_{12}^2 - A_{11}A_{22}} \tag{3.34}$$

$$\langle A_\mu U_\nu \rangle_L = -\frac{f_{11}}{\Box + \frac{A_{11}}{A_{12}^2-A_{11}A_{22}}\mu_V^2} \quad , \quad f_{11} = \frac{A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \tag{3.35}$$

$$\left\langle V_\mu^+ V_\nu^- \right\rangle_L = \frac{g_{11}}{\Box - \frac{\mu_V^2}{A_{33}}} \quad , \quad g_{11} = \frac{1}{A_{33}} \tag{3.36}$$

$$\tag{3.37}$$

Similarmente, as equações ((3.33)-(3.36)) mostram três pólos de spin-0. Eles são um fóton escalar sem massa, fóton escalar massivo, $m_{U^0} = \frac{A_{11}}{A_{12}^2-A_{11}A_{22}\mu_\nu^2}$, fótons escalares carregados massivos $m_{V^{\pm 0}} = \frac{\mu_\nu^2}{A_{33}}$.

Para uma melhor espectroscopia, vamos considerar o gauge unitário onde todos os propagadores são diagonalizados. Para isso, toma-se a relação

$$c_{12} + \xi_{12} = 0 \tag{3.38}$$

Eqs(3.23-3.38) facilitam a presença do conjunto provocado pelo transporte da carga elétrica. A expressão de suas massas e resíduos estão ligados a um todo. Os parâmetros que os definem não são restritos ao campo associado. As suas expressões estão a mostrar

um coletivo a sustentar o individual. Enquanto na seção anterior essa perspectiva revelou-se ao encontrar uma dinâmica a integrar campos granulares e coletivos, agora a expressão dos respectivos propagadores mostra seus números quânticos derivados em função do conjunto físico originado do comportamento da carga elétrica.

3.1.2 Análise de Power Counting

Um primeiro aspecto para o programa de renormalização é considerar o power counting. Por uma mistura de power counting e topologia pode-se entender onde as divergências estão. Basicamente o grau superficial de divergência dos diagramas de Feynman δ é a diferença entre o momento de potência k no numerador e denominador.

$$\delta = dL - \sum_A \alpha_A I_A + V_3 \tag{3.39}$$

onde L significa interrogações de loops independentes loop, cada um fornecendo d dimensões, d potências de momento. I_A significa momento natural.

$$\langle A_{\mu I} A_{\nu J} \rangle \sim \int d^4k \frac{1}{(k^2)^{p_{IJ}}}$$

e

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle \sim \int d^\varphi k \frac{1}{\not{k}}$$

que significa $\alpha_A = 2p_{IJ}$ para as propagações de campo vetoriais e para o campo de Dirac $\alpha_A = 1$. V_3 significa um vértice com 3 pernas (uma derivada).

A equação ((3.39)) é entendida como uma expressão relacionando o número de loops, vértices e linhas internas

$$L = \sum_A I_A - V + I \tag{3.40}$$

Analisando os vértices, o modelo contém tri e quadrivértices. Considere primeiramente sobre os trivértices pois envolvem uma derivada. Existem três tipos. O primeiro V_{3AI}

envolve três linhas dos mesmo campo $A_{\mu I}$; $V_{2AI,AJ}$ significa duas linhas $A_{\mu I}$ e outra $A_{\mu J}$; $A_{AI,AJ,AK}$ com três linhas diferentes. Resulta na seguinte expressão

$$V_{3,I} = V_{3AI} + \sum\!\!\!\!\!\!\diagup_{J} V_{2AI,AJ} + \sum\!\!\!\!\!\!\diagup_{J,K} \frac{1}{2!} V_{AI,AJ,AK} \tag{3.41}$$

onde $V_{3,I}$ significa o número total de vértices com três linhas onde ao mesmo uma contém o campo A_I. A barra no somatório indica que a soma é tomada com índices diferentes $(I, J, K \neq s)$. O fatorial no termo impede que o mesmo termo seja contado duas vezes. O segundo tipo de vértice não contém derivadas. Eles são os tipos A_{4AI}, $V_{3AI,AJ}$, $V_{2AI,AJ,AK}$, $V_{AI,AJ,AK,AL}$, $V_{AI\bar{\psi}\psi}$. Fornece,

$$\begin{aligned} V_{4,I} \equiv\ & V_{4AI} + V_{AI,\bar{\psi}\psi} + \sum\!\!\!\!\!\!\diagup_{J} (V_{3AI,AJ} + V_{2AI,2AJ} + V_{AI,3AJ}) + \\ & + \sum\!\!\!\!\!\!\diagup_{J,K} (\frac{1}{2!} V_{2AI,2AJ,AK} + V_{AI,3AJ,AK}) + \sum\!\!\!\!\!\!\diagup_{J,K,L} \frac{1}{3!} V_{AI,AJ,AK,AL} \end{aligned} \tag{3.42}$$

Sob essas definições,a expressão δ se torna, para quatro dimensões

$$\delta = 4 - 4 \sum_{I} (V_{3,I} + V_{4,I}) + \sum\!\!\!\!\!\!\diagup_{I,J} (4 - 2p_{IJ}) I_{AI,AJ} + (4-1) I_{\bar{\psi}\psi} + \sum_{I} V_{3,I} \tag{3.43}$$

Substituindo equações (3.41) e (3.42) na (3.43), it gives

$$\begin{aligned} \delta =\ & 4 - \sum_{I,J} (4 - 2p_{IJ}) I_{AIAJ} + 3 I_{\psi\bar{\psi}} + \\ & -3 \sum_{I} \left\{ V_{3AI} + \sum\!\!\!\!\!\!\diagup_{J} V_{2AI,AJ} + \sum\!\!\!\!\!\!\diagup_{J,K} \frac{1}{2!} V_{AI,AJ,AK} \right\} + \\ & -4 \sum_{I} \left\{ V_{4AI} + V_{AI,\psi\bar{\psi}} + \sum\!\!\!\!\!\!\diagup_{J} (V_{3AI,AJ} + V_{2AI,2AJ} + V_{AI,3AJ}) \right\} + \\ & + \frac{1}{2!} V_{2AI,AJ,AK} + V_{AI,2AJ,AK} + \sum\!\!\!\!\!\!\diagup_{J,K,L} \frac{1}{3!} V_{AI,AJ,AK,AL} \end{aligned} \tag{3.44}$$

O próximo passo é considerar relações topológicas. Elas permitem relacionar o número de vértices com o número de linhas. Produz,

$$\sum n_{iA} V_i = 2 I_{AI} + I_{AIAJ} + E_{AI} \tag{3.45}$$

onde n_{iAI} significa o número de linhas envolvendo o campo A_I de vértice V_i, I_{AI} é o número de linhas internas relacionadas ao propagador $\langle A_I A_I \rangle$, I_{AIAJ} corresponde às linhas internas envolvendo os propagadores mistos $\langle A_I A_J \rangle$ e E_{AI} significa o número de linhas externas relacionadas ao campo A_I.

O modelo a ser estudado envolve 4+1 tipos de relações topológicas. O campo espinorial fornece

$$2I_{\psi\bar{\psi}} + E_\psi = 2\sum_I V_{AI\psi\bar{\psi}} \tag{3.46}$$

Para campos quadrivetoriais,

$$\begin{aligned}
&2I_{AIAI} + \sum\!\!\!\!\!\!\diagup_J I_{AIAJ} + E_{AI} = \\
&4V_{4AI} + 3\left(\sum\!\!\!\!\!\!\diagup_J V_{3AI,AJ} + V_{3AI}\right) + \sum\!\!\!\!\!\!\diagup_{J,K,L} \frac{1}{3!} V_{AI,AJ,AK,AL} + \\
&+2\sum\!\!\!\!\!\!\diagup_J \left(V_{2AI,2AJ} + V_{2AI,AJ} + \frac{1}{2!}\sum\!\!\!\!\!\!\diagup_K V_{2AI,AJ,AK}\right) + \\
&+\sum\!\!\!\!\!\!\diagup_J \left(V_{AI,3AJ} + V_{AI,2AG} + \sum\!\!\!\!\!\!\diagup_{J,K} \left(V_{AI,2AJ,AK} + \frac{1}{2!} V_{AI,AJ,AK}\right)\right) + V_{AI\psi\bar{\psi}}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Portanto, a partir das expressões (3.46) e (3.47), pode-se substituir as linhas internas $I_{\psi\bar{\psi}}$ e I_{AIAJ} em termos de outras linhas internas uma linha externa e vértices. Fornece,

$$\begin{aligned}
\delta = 4 &- \tfrac{3}{2}E_\psi + \sum_I \left\{(p_{II} - 2)\, E_{AI} + \left(4V_{4AI} + 3V_{3AI} + V_{AI\psi\bar{\psi}}\right)(1 - p_{II})\right\} + \\
&+\sum\!\!\!\!\!\!\diagup_{I,J} \left\{(4 - 3p_{II} - p_{JJ})\, V_{3AIAJ} + (3 - 2p_{II} - p_{JJ})\, V_{2AIAJ}\right\} + \\
&+\sum\!\!\!\!\!\!\diagup_{I,J} \left\{\tfrac{1}{2!}\left[(4 - 2p_{II} - 2p_{JJ})\, V_{2AI2AJ} + (p_{II} + p_{JJ} - 2p_{IJ})\, I_{AIAJ}\right]\right\} + \\
&+\sum\!\!\!\!\!\!\diagup_{IJK} \left\{\tfrac{1}{2!}(4 - 2p_{II} - p_{JJ} - p_{KK})\, V_{2AI2AJ} + \tfrac{1}{3!}(3 - p_{II} - p_{JJ} - p_{KK})\, V_{AIAJAK}\right\} + \\
&+ \sum_{IJKL} \tfrac{1}{4!}(4 - p_{II} - p_{JJ} - p_{KK} - p_{LL})\, V_{AIAJAKAL}
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Equação (3.48) leva a um número finito de gráficos primitivamente divergentes. Este resultado é obtido substituindo as linhas internas da equação (3.47). Resultando,

$$\delta = 4 - \tfrac{3}{2}E_{\psi} - \sum_{I} E_{AI} + \sum_{I} 2\left(1 - p_{II}\right) I_{AIAI} + \sum_{IJ} \left(1 - p_{IJ}\right) I_{AIAJ} \tag{3.49}$$

Equação (3.49) deve ser considerada agora para o núcleo usual onde $p_{II} = 1$. Fornece que o termo de linhas internas se cancelam. O mesmo irá acontecer para $p_{IJ} = 1$. Nestes casos a expressão δse torna

$$\delta = 4 - \tfrac{3}{2}E_{\psi} - \sum_{I} E_{AI} \tag{3.50}$$

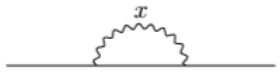
No caso onde p_{II} e/ou p_{IJ} são maiores que um, temos um termo adicional

$$\delta = 4 - \tfrac{3}{2}E_{\psi} - E_{AI} - a \tag{3.51}$$

que é um número positivo. Então, em ambos os casos, o número de gráficos primitivamente divergentes é finito, dependendo apenas do número de linhas externas. Note que no segundo caso, (3.50), a teoria é super-renormalizável.

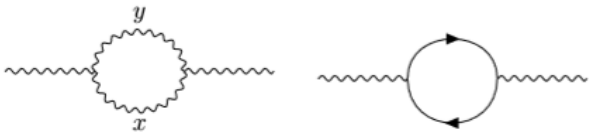
3.1.3 Gráficos primitivamente divergentes

Dada a expressão para o grau de divergência superficial,(3.50), pode-se listar os gráficos primitivamente divergentes correspondentes. Considerando a forma geral dos propagadores, $\langle A_{\mu I} A_{\nu I} \rangle = \frac{1}{(k^2 - m^2)^x}$, obtemos
onde as linhas cheias significam os campos elétricos enquanto as linhas onduladas são associadas a qualquer um dos campos bosônicos.



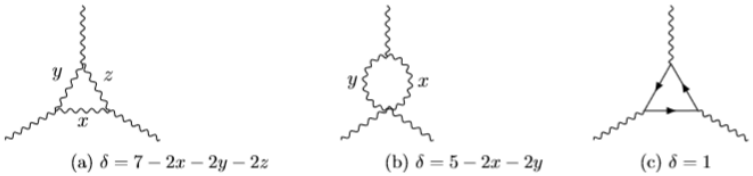
$\delta = 3 - 2x$

Figura 1: Auto-Energia dos Elétrons



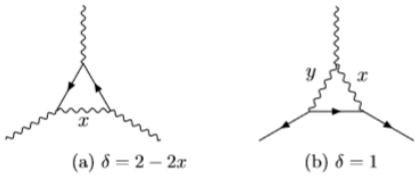
(a) $\delta = 6 - 2x - 2y$ (b) $\delta = 2$

Figura 2: Auto-Energia de Campos Vetoriais



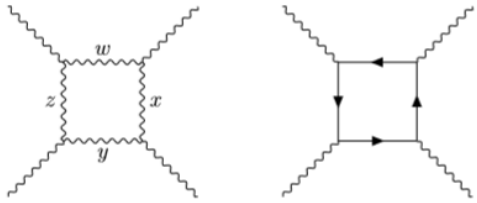
(a) $\delta = 7 - 2x - 2y - 2z$ (b) $\delta = 5 - 2x - 2y$ (c) $\delta = 1$

Figura 3: Três Campos Vetoriais

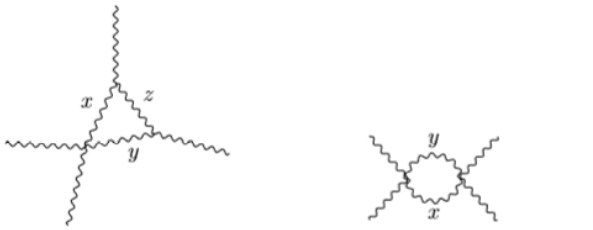


(a) $\delta = 2 - 2x$ (b) $\delta = 1$

Figura 4: Tri-Vértice: Elétron-Pósitron e um Campo Vetorial



(a) $\delta = 8 - 2x - 2y - 2z - 2w$ (b) $\delta = 0$



(a) $\delta = 6 - 2x - 2y - 2z$ (b) $\delta = 4 - 2x - 2y$

O começo de tudo está no fóton. Neste propósito essa seção faz sua leitura da Lagrangeana na eq.(2.2). Encontra-se um modelo a colocar o fóton nas origens. Fisicidade do campo A_μ, fóton diretivo, carga fotônica, auto-interação, ubiquidade com os demais campos, acoplamentos sem a mediação da carga elétrica formam uma prospectiva do fóton como entidade primordial. A possibilidade das partículas serem gerados a partir do fóton.

Estamos diante de um Big Bang fotônico. Os experimentos $\gamma \longrightarrow e^+e^- \longrightarrow \gamma$, $e^+e^- \longrightarrow \gamma\gamma$, $\gamma\gamma \longrightarrow e^+e^-$, $\gamma\gamma \longrightarrow \gamma\gamma$ a partir da interação fóton-fóton a nível árvore e sem depender somente da carga elétrica estarão a mostrar sobre um eletromagnetismo com setor fotônico. A possibilidade das partículas serem derivadas do fóton primordial. A passagem da energia de MeV $\left(e^+e^- \longrightarrow \gamma\gamma\right)$ para GeV $\left(W^+W^- \longrightarrow \gamma\gamma\right)$ e TeV $\left(\text{partícula-antipartícula} \longrightarrow \gamma\gamma\right)$ evidenciará em laboratório a respeito dessa conversão entre matéria e energia a partir das regras de Feynman propostas pelas eqs.(3.1-3.21).

A principal consequência destas propriedades da fotônica é que a partir da luz pode se gerar matéria. Um Big-Bang luminoso torna-se possível. Fótons contêm propriedades para produção de partículas. O aspecto fundamental é que fótons ordinários contém reações para conjurar matéria da luz e vice-versa. A reação elétron-pósitron oferece uma

primeira faixa de energia. Pertence a uma região onde fótons estão carregando pacotes de energia abaixo de 1 MeV como $e^+e^- \longrightarrow \gamma\gamma$. Um próximo passo é descrever reações como $\gamma\gamma \longrightarrow e^+e^-$ a nível árvore [77]. O experimento PVLS a ser realizado em 2018 em Padova provavelmente vai além das equações de Maxwell e Dirac e define uma física onde a luz precede a carga elétrica. Entretanto, o LHC é o experimento principal para produção de fótons até 14 TeV [1].

Uma física fotônica é estipulada. A simetria provida pela eq.(2.1) revela um fóton absoluto, ubíquo, diretivo de conjunto, produtor de contingências, possuidor de estrutura interna e associado a constantes de acoplamento diversas da carga elétrica. Essas propriedades são suportadas, respectivamente, pelo experimento Michelson-Morley, gA_μ interatividade com diversidade universal, equação de simetria integrada na equação do fóton de Euler-Lagrange, variáveis físicas sob relativismo e chance, auto-interações. Selecionamos estas características para a física fotônica. São as seguintes características: fótons auto-interagentes, fótons ubíquos, corrente fotônica, ondas eletromagnéticas não-lineares, nova relação de dispersão, força fotônica de Lorentz, geração de matéria de origem fotônica. Três consequências básicas acontecem. Eles são o big bang da fotônica, fenomenologia e inovação. O primeiro provoca a produção de matéria a partir de fótons; novas fenomenologias para estudar propriedades físicas como supercondutividade, bolas de fótons e assim por diante; e, em terceiro lugar, novas oportunidades para as inovações EM, onde o elétron é substituído pelo fóton, como no caso de chips fotônicos [78].

No Capítulo a seguir, focalizaremos os nossos esforços no transporte de spin-1, enfatizando os efeitos eletromagnéticos do spin mesmo no caso em que este spin seja portado por partículas eletromagneticamente neutras.

Capítulo 4

Spintrônica de Spin-1

4.1 Introdução

O spin é um número quântico derivado da invariância da luz. Uma partícula deve ter os seus números quânticos determinados. Isto é, spin, massa, carga invariância C,P,T, CPT bem definidos. O EM não se basta ao discurso da carga elétrica junto a campos EM. Existe também o acoplamento do momento magnético anômalo com o campo magnético $\mu = g\frac{e}{2m}\vec{S}$. A equação de Pauli encontrou o termo $\mu \cdot \vec{B}$ a medir a interação do spin com o campo magnético onde $\vec{B}$ representa o spin do fóton e μ o da matéria.

Spintrônica é a área da física da matéria condensada que estuda as propriedades do spin do elétron, com o objetivo de melhorar a eficiência dos dispositivos eletrônicos e enriquecê-los com novas funcionalidades. Uma definição tão ampla implica que a gama de assuntos que se enquadram no guarda-chuva da spintrônica é inevitavelmente muito ampla. Em um extremo, os pesquisadores exploram o controle de spins localizados únicos, realizadas em locais atômicos únicos em cristais - como centros de vacância de nitrogênio em diamantes - ou em pontos quânticos de semicondutores. Estes são considerados spin qubits, ideais para computação quântica em um ambiente de estado sólido. No outro extremo, os pesquisadores exploram o transporte de spin e a dinâmica de spin em sistemas de macroescala, acoplando o transporte de spin à dinâmica de spin de muitas maneiras.

O campo está evoluindo rapidamente e muitos desenvolvimentos interessantes na física fundamental e na ciência dos materiais ocorreram apenas nos últimos anos. A história de

sucesso da magnetorresistência gigante e sua ampla aplicação à tecnologia da informação - que ganhou Albert Fert e Peter Grünberg, Prêmio Nobel de Física em 2007 - certamente contribuiu para isso. Mas seria uma falácia considerar as eventuais aplicações mais importantes do que a visão fundamental fornecida pela pesquisa da spintrônica. O spin é uma entidade puramente quântica-mecânica e sua interação com a carga de elétrons ou o ambiente atômico proporciona uma oportunidade única para entender a natureza quântica da matéria.

4.2 Spin-$\frac{1}{2}$

Entre 1913 e 1925 aconteceu a fase empírica do spin. Após a publicação dos dois artigos de Niels Bohr, em Julho e Setembro de 1913, nos quais fundamenta o seu modelo atômico, o Modelo Atômico de Bohr, houve um grande desenvolvimento semi-empírico de apêndices ao modelo para se tentar reproduzir, através de elaboradas expressões matemáticas, as raias de emissão espectral. Todo este movimento está fielmente reproduzido no livro "The Story of Spin", de Sin-Itiro Tomonaga [79], um dos fundadores da formulação atual da QED, juntamente com Richard Feynman e Julian Schwinger. Fica muito clara, ao longo dos capítulos do livro de Tomonaga, que havia um elemento que faltava para a real compreensão do mecanismo que governa as linhas espectrais atômicas. A busca desesperada por expressões matemáticas que reproduzissem as séries de emissão era a constatação de que havia um conceito, uma ideia, que faltava.

Em 1922, a experiência de Stern-Gerlach [80] mostra a quantização do momento angular de um átomo. Em 1925, o conceito de spin é explicitado. Goudsmit e Uhlenck propõem, através de exploração teórica, a idéia de que, além da massa e da carga elétrica, o elétron é dotado de um outro atributo quântico, de natureza espacial, sem análogo clássico: o spin [81].

Entre 1925-28, surge a terceira fase do spin. A sua incorporação nas equações físicas. Com a publicação da Mecânica Matricial de Heisenberg, em Julho de 1925 [82] e da Equação de Schrödinger em Dezembro de 1926, em seu artigo "An Ondulatory Theory

of the Mechanics of Atoms and Molecules"[83], Pauli, já em Maio de 1927, lança o seu artigo onde propõe a chamada Equação de Pauli [84], na qual acopla o spin do elétron a um campo magnético externo, através do chamado termo de Pauli de acoplamento não-mínimo. Logo em seguida, Pauli tentou, sem sucesso, compatibilizar o spin do elétron (proposto por Goudsmit e Uhlenbeck em forma não-relativística e utilizado por ele, Pauli, na Equação de Schrödinger, também não-relativística) com a Relatividade Especial. Foi Paul Dirac, em 1928, em seus dois clássicos artigos de 2 de Janeiro e 2 de Fevereiro [18], quem conseguiu mostrar a origem relativística do spin, utilizando os chamados espinores de SL(2,C), e escrevendo a celebrada Equação de Dirac que, nada mais é do que a descrição da dinâmica relativística do spin do elétron.

Neste novo cenário físico do spin, o aspecto mais relevante coube a Dirac. Sem ainda conhecer de forma sistemática as representações não-unitárias de dimensão finita do Grupo de Lorentz (estas só seriam sistematizadas com o livro de Élie Cartan, "Theory of Spinors"[85]), mas conhecendo os espinores relativísticos através das notas de aula do curso sobre espinores de Élie Cartan de 1913, consegue introduzir o spin do elétron na Relatividade Especial e re-deriva, no chamado limite fracamente relativístico de sua equação, a Equação de Pauli de 1927. (Cabe esclarecer aqui que foi em suas célebres aulas de 1913 que Cartan concebe a teoria matemática geral de uma nova categoria de objetos geométricos de um espaço-tempo geral, os espinores. Estas aulas deram origem ao livro de 1938, cuja referência encontra-se acima.) Desta forma, o conceito de spin do elétron fica bem esclarecido e, a partir da Equação de Dirac, são compreendidas, de forma mais sistemática, as correções relativísticas e a estrutura hiperfina das linhas espectrais do átomo de Hidrogênio.

Na linha aberta com os dois trabalhos sobre a Mecânica Quântica Relativística do elétron, o Prof. Dirac publica na Nature, em 18 de Outubro de 1930, o seu célebre artigo "The Proton", onde já se identificam os alicerces de seu clássico paper de 29 de Maio de 1931, também publicado nos Proceedings da RSL, "Quantised Singularities in the Electromagnetic Field", no qual, ao longo de suas 13 páginas, o autor apresenta

três resultados de grande porte: prevê a existências dos monopólios magnéticos, propõe uma solução para o fenômeno de quantização da carga elétrica e antecipa a existência da anti-matéria, neste trabalho correspondendo aos pósitrons (descobertos em 1932) e anti-prótons (que viriam a ser descobertos somente em 1956). (Sincronizando-nos com o Prof. Dirac em 1931, as partículas até então conhecidas eram apenas o elétron, o próton e o fóton. O nêutron só viria a ser descoberto em 1932.) Por esta série de trabalhos, com resultados de grande impacto para o estudo de novas formas de matéria, o Prof. Dirac dividiu o Prêmio Nobel de Física de 1933.

Por último, ressaltemos as consequências da equação de Dirac. Na recorrência do nonagésimo aniversário dos trabalhos que assinalam o lançamento da Equação de Dirac, é importante destacar a relevância da mesma em problemas contemporâneos da Física da Matéria Condensada; materiais desenvolvidos mais recentemente, como o grafeno e os isolantes e supercondutores topológicos, vêm-se revelando um notável laboratório para a aplicação de soluções e propriedades da Equação de Dirac. Esta, na verdade, pode ser a chave para uma descrição teórica bem-sucedida da matéria em sua fase dita topológica, abrindo, assim, um amplo horizonte de aplicações tecnológicas para uma equação que, há 90 anos atrás, era apenas extremamente rica de significado para a Física Teórica, sem ainda estar clara qual pudesse ser a sua utilidade em termos de Tecnologia.

O Grupo de Lorentz nos sistematiza a descrição relativística do spin, introduzido por Uhlenbeck e Goudsmit como um atributo exclusivamente quântico. A partir da rotação de Lorentz no espaço-tempo:

$$x^{'\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \tag{4.1}$$

Na forma infinitesimal:

$$x^{'\mu} = \left(\delta^{\mu}_{\ \nu} + \omega^{\mu}_{\ \nu}\right) x^{\nu} + \mathcal{O}(\omega^2) \tag{4.2}$$

ou

$$\delta x^{'\mu} = \omega^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + \mathcal{O}\left(\omega^2\right) \quad \text{onde} \quad \omega^{\mu}{}_{\nu} = -\omega_{\nu}{}^{\mu} \tag{4.3}$$

As representações de $SO(1,3)$ são caracterizadas por um par de números quânticos (j,k). A transformação dos campos, ϕ_i, que pertencem a esta representação, é dada por:

$$\phi_i^{'}(x^{'}) = \exp^{\left[\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}\right]}\, \phi_i(x) \tag{4.4}$$

$$\phi_i^{'}(x^{'}) = \phi_i(x) + \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}\phi_i(x) + \mathcal{O}\left(\omega^2\right) \tag{4.5}$$

ou,

$$\delta_{\text{total}}\phi_i = \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}\phi_i(x) \tag{4.6}$$

Da expressão acima e usando $\delta_{\text{total}} f = \delta_{\text{func}} f + \delta x\, \partial_\mu f(x)$, obtemos

$$\delta_{\text{func}}\phi_i = \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}\phi_i(x) - \omega^{\alpha}{}_{\beta} x^{\beta}\partial_\alpha\phi_i(x) \tag{4.7}$$

A lei de conservação associada à invariância rotacional:

$$\partial_\mu\left[\omega^{\alpha\beta}\delta^{\mu}{}_{\alpha}x_\beta\mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_i}\left(\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}\phi_i(x) - -\omega^{\alpha}{}_{\beta}x^{\beta}\partial_\alpha\phi_i(x)\right)\right] = 0 \tag{4.8}$$

Reescrevendo a equação acima:

$$\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\left[\left(\delta^{\mu}{}_{\alpha}x_\beta - \delta^{\mu}{}_{\beta}x_\alpha\right)\mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_i}\Sigma_{\alpha\beta}\phi_i(x) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_i}\left(x_\beta\partial_\alpha\phi_i(x) - x_\alpha\partial_\beta\phi_i(x)\right)\right] = 0 \tag{4.9}$$

Resulta

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} \Sigma_{\alpha\beta} \phi_i(x) + x_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} \partial_\beta \phi_i(x) - \delta^\mu{}_\beta \mathcal{L} \right) - x_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} \partial_\alpha \phi_i(x) - \delta^\mu{}_\alpha \mathcal{L} \right) \right] = 0 \quad (4.10)$$

Obtemos a expressão da conservação do momento angular:

$$\partial_\mu \Big[x_\alpha T^\mu_\beta - x_\beta T^\mu_\alpha \Big] = 0 \quad (4.11)$$

A expressão acima nos leva à definição de:

1.A densidade de momento angular orbital é:

$$L^\mu_{\alpha\beta} = \Big(x_\alpha T^\mu{}_\beta - x_\beta T^\mu{}_\alpha \Big) \quad (4.12)$$

2. A densidade de momento angular intrínseco ou densidade de corrente de spin

$$S^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} \Sigma_{\alpha\beta} \phi_i \quad (4.13)$$

4.3 Spintrônica de Spin-1

O campo da spintrônica refere-se ao transporte do spin de partículas carregadas, em geral o elétron, em nanoescala. Por exemplo, os chamados gelos de spin são materiais exóticos onde o spin do elétron cria monopólos magnéticos e outras propriedades. Além disso, a spintrônica nos permite criar sensores magnéticos em nanoescala e memórias magnéticas avançadas, bem como aplicações em física da matéria condensada [86].

A respeito de spin-1 e expectativa para a spintrônica estão na busca de uma equação de movimento da forma

$$\begin{aligned} &\partial_\nu F^{\nu\mu} + A_{\mu,\kappa\lambda} \left(\Sigma^{\kappa\lambda}\right)^\mu{}_\rho F^{\rho\nu} + A_{\mu,\kappa\lambda} \left(\Sigma^{\kappa\lambda}\right)^\nu{}_\rho F^{\rho\mu} = 0 \\ &\partial_\nu F^{\nu\mu} = \left(\Sigma^{\alpha\beta}\right)^\rho_\sigma \left(\Sigma^{\lambda\mu}\right)^\sigma_\rho F_{\alpha\beta} A_\lambda + (\Sigma^{\alpha\mu})^\rho_\sigma \left(\Sigma^{\beta\lambda}\right)^\sigma_\rho F_{\alpha\beta} A_\lambda \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde a (4.14) constitui um tipo de equação de Dirac para o spin. Um acoplamento do campo de spin com o campo elétrico e magnético, fornecendo termos do tipo $\vec{B}\cdot\vec{S}$, $\vec{E}\cdot\vec{S}$, $\vec{B}\times\vec{S}$ e $\vec{E}\times\vec{S}$.

Definindo o potencial de campo como $A_{\mu,\kappa\lambda}$ onde o primeiro índice representa a simetria de espaço-tempo $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}x^{\nu}$ e o segundo a simetria de rotação $A'_{\mu} = \left(e^{\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta}}\right)^{\nu}_{\mu}A_{\nu}$, introduz-se como novidade acoplar o campo com o gerador das rotações $A_{\mu,\kappa\lambda}\Sigma^{\kappa\lambda}$, de tale forma que a interação com o spin revele a fisicidade do dipolo elétrico e do dipolo magnético.

Eq.(4.3) é semelhante ao campo de Yang-Mills 'Lie algebra valued' , $A_{\mu} \equiv A_{\mu a}t_a$, onde o gerador de spin $\left(\Sigma_{\mu\nu}\right)^{\alpha}_{\beta}$, é definido da seguinte forma:

$$(\Sigma_{\mu\nu})^{\alpha}_{\beta} = -i\left(\delta^{\alpha}_{\mu}\eta_{\nu\beta} - \delta^{\alpha}_{\nu}\eta_{\mu\beta}\right) \tag{4.15}$$

Uma Lagrangeana que possa nos fornecer a equação de movimento (4.14) é necessária; Para isso, primeiramente devemos ter em mente as seguintes transformações:

$$\begin{aligned}
&(F_{\mu\nu})^{\alpha}_{\beta} = \partial_{\mu}A_{\nu,\kappa\lambda}\left(\Sigma^{\kappa\lambda}\right)^{\alpha}_{\beta} - \partial_{\nu}A_{\mu,\sigma\rho}\left(\Sigma^{\sigma\rho}\right)^{\alpha}_{\beta}\\
&A'_{\mu,\kappa\lambda} = A_{\mu,\kappa\lambda} + a_{\kappa\lambda}\partial_{\mu}\alpha\\
&F_{\mu\nu} \longrightarrow \left(\Sigma_{\mu\nu}\right)_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
&z_{[\mu\nu]} \longrightarrow \left(\Sigma_{\mu\nu}\right)_{\rho\sigma}z^{[\rho\sigma]}\\
&\beta_I S^I_{\mu\nu} \longrightarrow \left(\Sigma_{\mu\nu}\right)_{\rho\sigma}\beta_I S^{I\rho\sigma}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Tendo em mente a forma do gerador de spin, a idéia é acoplá-lo com os tensores intensidade de campo granulares e coletivos.

4.3.1 Termos de Spin

Comecemos por reescrever o termo $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, que é invariante de gauge, da forma:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = (\Sigma^{\mu\nu})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\kappa\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho} F_{\mu\nu}F_{\kappa\lambda} + (\Sigma^{\mu\kappa})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\nu\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho} F_{\mu\nu}F_{\kappa\lambda} \tag{4.18}$$

onde

$$\begin{aligned}(\Sigma^{\mu\nu})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\kappa\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho} F_{\mu\nu}F_{\kappa\lambda} &= -4F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\\ (\Sigma^{\mu\kappa})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\nu\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho} F_{\mu\nu}F_{\kappa\lambda} &= -2F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{4.19}$$

ou seja, o termo $F^2_{\mu\nu}$ recebe duas contribuições através da inclusão do spin. Os termos simétricos granulares

$$\begin{aligned}S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} &= (\Sigma^{\mu\kappa})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\nu\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho} S_{\mu\nu}S_{\kappa\lambda}\\ S^{\alpha}_{\alpha}S^{\beta}_{\beta} &= (\Sigma^{\mu\nu})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma_{\mu\nu}\right)^{\sigma}_{\rho} S^{\kappa}_{\kappa}S^{\lambda}_{\lambda}\end{aligned} \tag{4.20}$$

onde

$$\begin{aligned}(\Sigma^{\mu\nu})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\kappa\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho} S_{\mu\nu}S^{\kappa\lambda} &= 0\\ (\Sigma^{\mu\kappa})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\nu\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho} S_{\mu\nu}S_{\kappa\lambda} &= -2S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} - 2S^{\mu}_{\mu}S^{\nu}_{\nu}\\ (\Sigma_{\mu\nu})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\mu\nu}\right)^{\sigma}_{\rho} S^{\alpha}_{\alpha}S^{\beta}_{\beta} &= -24S^{\mu}_{\mu}S^{\nu}_{\nu}\end{aligned} \tag{4.21}$$

O termo de massa

$$A_{\mu}A^{\mu} = (\Sigma_{\mu\nu})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\mu\nu}\right)^{\sigma}_{\rho} A_{\sigma}A^{\sigma} \tag{4.22}$$

onde

$$
\begin{aligned}
(\Sigma_{\mu\nu})^{\rho}_{\sigma}\,(\Sigma^{\mu\nu})^{\sigma}_{\rho}\,A_{\sigma}A^{\sigma} &= -24A_{\mu}A^{\mu} \\
(\Sigma^{\alpha\gamma})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\beta}{}_{\sigma}\right)^{\sigma}_{\rho}\,A_{\alpha}A_{\beta} &= -6A_{\mu}A^{\mu}
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

Tendo essas transformações em mente, a proposta é escrever uma Lagrangeana com termos de spin explícitos, de modo a se obter a equação de movimento (4.14) desejada:

4.4 Lagrangeana de Spin-1 e Spin-0

O ponto a ser estudado aqui é a comparação com a Lagrangeana de Quatro Campos anterior com a nova proposta de Lagrangeana de spin. Trabalharemos cada setor da Lagrangeana, verificando se existem termos novos.

$$
\mathcal{L}_K^{\text{spin}} = \mathcal{L}_K^{\text{spin}\,A} + \mathcal{L}_K^{\text{spin}\,S} \tag{4.24}
$$

4.4.1 $\mathcal{L}_K^{\text{spin}\,A}$

$$
\mathcal{L}_K^{\text{spin}\,A} = \left(-\frac{1}{4}\,(\Sigma^{\mu\nu})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\kappa\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho} - \frac{1}{2}\,(\Sigma^{\mu\kappa})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\nu\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho}\right)\mathcal{L}_K^{A} \tag{4.25}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_K^{\text{spin}\,A} = &-\frac{1}{4}a_1\,(\Sigma^{\mu\nu})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\kappa\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho}F_{\mu\nu}F_{\kappa\lambda} - \frac{1}{2}a_1\,(\Sigma^{\mu\kappa})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\nu\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho}F_{\mu\nu}F_{\kappa\lambda} + \\
&-\frac{1}{4}a_2\,(\Sigma^{\mu\nu})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\kappa\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho}U_{\mu\nu}U_{\kappa\lambda} - \frac{1}{2}a_2\,(\Sigma^{\mu\kappa})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\nu\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho}U_{\mu\nu}U_{\kappa\lambda} + \\
&-\frac{1}{4}a_3\,(\Sigma^{\mu\nu})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\kappa\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho}V^{+}_{\mu\nu}V^{-}_{\kappa\lambda} - \frac{1}{2}a_3\,(\Sigma^{\mu\kappa})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\nu\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho}V^{+}_{\mu\nu}V^{-}_{\kappa\lambda}
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

Lembrando que:

$$
\begin{aligned}
(\Sigma^{\mu\nu})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\kappa\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho}F_{\mu\nu}F_{\kappa\lambda} &= -4F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
(\Sigma^{\mu\kappa})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\nu\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho}F_{\mu\nu}F_{\kappa\lambda} &= -2F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

$$
\mathcal{L}_K^{\text{spin }A} = a_1 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + a_2 U_{\mu\nu}U^{\mu\nu} + a_3 V^{+}_{\mu\nu}V^{-\mu\nu}
\tag{4.28}
$$

Comparando esse setor $\mathcal{L}_K^{\text{spin }A}$, podemos escrever:

$$
\mathcal{L}_K^{\text{spin }A} = \mathcal{L}_K^{A} + \Delta_K^{A}
\tag{4.29}
$$

onde $\Delta_K^A = 0$, ou seja, não houve mudança no setor cinético antissimétrico.

4.4.2 $\mathcal{L}_K^{\text{spin }S}$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_K^{\text{spin }S} = &\frac{1}{2}(\Sigma^{\mu\kappa})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\nu\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho} b_{(11)} S^{1}_{\mu\nu}S^{1}_{\kappa\lambda} + \frac{1}{2}(\Sigma^{\mu\kappa})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\nu\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho} b_{(22)} S^{2}_{\mu\nu}S^{2}_{\kappa\lambda} + \\
&+ (\Sigma^{\mu\kappa})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\nu\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho} b_{(33)} S^{+}_{\mu\nu}S^{-}_{\kappa\lambda} - \frac{1}{24}(\Sigma_{\kappa\lambda})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\kappa\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho} c_{(11)} S^{\alpha 1}_{\alpha}S^{\beta 1}_{\beta} + \\
&-\frac{1}{24}(\Sigma_{\kappa\lambda})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\kappa\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho} c_{(22)} S^{\alpha 2}_{\alpha}S^{\beta 2}_{\beta} - \frac{1}{12}(\Sigma_{\kappa\lambda})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\kappa\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho} c_{(12)} S^{\alpha 1}_{\alpha}S^{\beta 2}_{\beta} + \\
&-\frac{1}{12}(\Sigma_{\kappa\lambda})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\kappa\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho} c_{(33)} S^{\alpha +}_{\alpha}S^{\beta -}_{\beta},
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

Lembrando que:

$$
\begin{aligned}
(\Sigma^{\mu\kappa})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\nu\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho} S_{\mu\nu}S_{\kappa\lambda} &= 2S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} - 2S^{\alpha}_{\alpha}S^{\beta}_{\beta} \\
\left((\Sigma_{\kappa\lambda})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\kappa\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho}\right) S^{\alpha}_{\alpha}S^{\beta}_{\beta} &= -24 S^{\alpha}_{\alpha}S^{\beta}_{\beta}
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

$$\mathcal{L}_K^{\text{spin}\,S} = +b_{(11)}S^1_{\mu\nu}S^{1\,\mu\nu} - b_{(11)}S^{1\,\alpha}_{\alpha}S^{1\,\beta}_{\beta} + b_{(22)}S^2_{\mu\nu}S^{2\,\mu\nu} - b_{(22)}S^{2\,\alpha}_{\alpha}S^{2\,\beta}_{\beta} +$$
$$+2b_{(33)}S^+_{\mu\nu}S^{-\,\mu\nu} - 2b_{(33)}S^{+\,\alpha}_{\alpha}S^{-\,\beta}_{\beta} +$$
$$+c_{(11)}S^{\alpha 1}_{\alpha}S^{\beta 1}_{\beta} + c_{(22)}S^{\alpha 2}_{\alpha}S^{\beta 2}_{\beta} + 2c_{(12)}S^{\alpha 1}_{\alpha}S^{\beta 2}_{\beta} + 2c_{(33)}S^{\alpha +}_{\alpha}S^{\beta -}_{\beta}, \tag{4.32}$$

Assim temos que:

$$\mathcal{L}_K^{\text{spin}\,S} = \mathcal{L}_K^S + \Delta_K^S$$
$$\Delta_K^S = -b_{(11)}S^{1\,\alpha}_{\alpha}S^{1\,\beta}_{\beta} - b_{(22)}S^{2\,\alpha}_{\alpha}S^{2\,\beta}_{\beta} - 2b_{(33)}S^{+\,\alpha}_{\alpha}S^{-\,\beta}_{\beta} \tag{4.33}$$

e assim:

$$\mathcal{L}_K^{\text{spin}\,S} = b_{(11)}S^1_{\mu\nu}S^{1\,\mu\nu} + b_{(22)}S^2_{\mu\nu}S^{2\,\mu\nu}S^{2\,\beta}_{\beta} + 2b_{(33)}S^+_{\mu\nu}S^{-\,\mu\nu} +$$
$$+\left(b_{(11)} + c_{(11)}\right)S^{\alpha 1}_{\alpha}S^{\beta 1}_{\beta} + \left(b_{(22)} + c_{(22)}\right)S^{\alpha 2}_{\alpha}S^{\beta 2}_{\beta} +$$
$$+2c_{(12)}S^{\alpha 1}_{\alpha}S^{\beta 2}_{\beta} + \left(2b_{(33)} + 2c_{(33)}\right)S^{\alpha +}_{\alpha}S^{\beta -}_{\beta}, \tag{4.34}$$

4.4.3 $\mathcal{L}_{GF}^{\text{spin}}$

$$\mathcal{L}_{GF}^{\text{spin}} = -\frac{1}{96}\left(\Sigma_{\kappa\lambda}\right)^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\kappa\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho}\xi_{(11)}S^{\alpha 1}_{\alpha}S^{\beta 1}_{\beta} - \frac{1}{96}\left(\Sigma_{\kappa\lambda}\right)^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\kappa\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho}\xi_{(22)}S^{\alpha 2}_{\alpha}S^{\beta 2}_{\beta} +$$
$$-\frac{1}{48}\left(\Sigma_{\kappa\lambda}\right)^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\kappa\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho}\xi_{(12)}S^{\alpha 1}_{\alpha}S^{\beta 2}_{\beta} - \frac{1}{48}\left(\Sigma_{\kappa\lambda}\right)^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\kappa\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho}\xi_{(33)}S^{\alpha +}_{\alpha}S^{\beta -}_{\beta}, \tag{4.35}$$

$$\mathcal{L}_{GF}^{\text{spin}} = \frac{1}{4}\xi_{(11)}S^{\rho 1}_{\rho}S^{\sigma 1}_{\sigma} + \frac{1}{4}\xi_{(22)}S^{\rho 2}_{\rho}S^{\sigma 2}_{\sigma} + \frac{1}{2}\xi_{(12)}S^{\rho 1}_{\rho}S^{\sigma 2}_{\sigma} + \frac{1}{2}\xi_{(33)}S^{\rho +}_{\rho}S^{\sigma -}_{\sigma}. \tag{4.36}$$

Escrevendo

$$\mathcal{L}_{GF}^{\text{spin}} = \mathcal{L}_{GF} + \Delta_{GF}$$
$$\Delta_{GF} = 0 \tag{4.37}$$

4.4.4 $\mathcal{L}_m^{\mathbf{spin}}$

$$\mathcal{L}_m^{\text{spin}} = \frac{1}{48}\left(\Sigma_{\kappa\lambda}\right)_\sigma^\rho \left(\Sigma^{\kappa\lambda}\right)_\rho^\sigma \mu_U^2 U_\sigma U^\sigma + \frac{1}{12}\left(\Sigma^{\alpha\lambda}\right)_\sigma^\rho \left(\Sigma^\beta{}_\lambda\right)_\rho^\sigma \mu_U^2 U_\alpha U_\beta +$$
$$+\frac{1}{24}\left(\Sigma_{\kappa\lambda}\right)_\sigma^\rho \left(\Sigma^{\kappa\lambda}\right)_\rho^\sigma \mu_\pm^2 V_\sigma^+ V^{-\sigma} + \frac{1}{6}\left(\Sigma^{\alpha\lambda}\right)_\sigma^\rho \left(\Sigma^\beta{}_\lambda\right)_\rho^\sigma \mu_\pm^2 V_\alpha^+ V_\beta^- \tag{4.38}$$

Lembrando que

$$
\begin{aligned}
&(\Sigma_{\mu\nu})^{\rho}_{\sigma}\,(\Sigma^{\mu\nu})^{\sigma}_{\rho}\,A_{\sigma}A^{\sigma} = -24A_{\mu}A^{\mu}\\
&(\Sigma^{\alpha\gamma})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\beta}{}_{\sigma}\right)^{\sigma}_{\rho}\,A_{\alpha}A_{\beta} = -6A_{\mu}A^{\mu}
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

$$
\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2}\mu_U^2 U_\sigma U^\sigma - \mu_\pm^2 V_\alpha^+ V_\beta^- \tag{4.40}
$$

Escrevendo

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_m^{\text{spin}} = \mathcal{L}_m + \Delta_m\\
&\Delta_m = 0
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

4.4.5 $\mathcal{L}_3^{\text{spin}\,A}$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_3^{\text{spin}\,A} = &\left(-\frac{1}{4}\,(\Sigma^{\mu\nu})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\kappa\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho} - \frac{1}{2}\,(\Sigma^{\mu\kappa})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\nu\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho}\right)\left(4b_1F_{\mu\nu}\,{}^{[12]}z_{[\kappa\lambda]} + 4b_2U_{\mu\nu}\,{}^{[12]}z_{[\kappa\lambda]} + \right.\\
&+4b_1F_{\mu\nu}\,{}^{[+-]}z_{[\kappa\lambda]} + 4b_2U_{\mu\nu}\,{}^{[+-]}z_{[\kappa\lambda]} + 4\beta_1F_{\mu\nu}\,{}^{(+-)}z_{[\kappa\lambda]} + 4\beta_2U_{\mu\nu}\,{}^{(+-)}z_{[\kappa\lambda]} +\\
&\left.+4b_3V_{\mu\nu}^{+}\,{}^{[-1]}z_{[\kappa\lambda]} + 4b_3V_{\mu\nu}^{+}\,{}^{[-2]}z_{[\kappa\lambda]} + 4b_3V_{\mu\nu}^{-}\,{}^{[+1]}z_{[\kappa\lambda]} + 4b_3V_{\mu\nu}^{-}\,{}^{[+2]}z_{[\kappa\lambda]}\right)
\end{aligned}
\tag{4.42}
$$

Realizando as mesmas simplificações que no setor $\mathcal{L}_K^{\text{spin}\,A}$, temos que:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_3^{\text{spin}\,A} = &\,4b_1F_{\mu\nu}\,{}^{[12]}z^{[\mu\nu]} + 4b_2U_{\mu\nu}\,{}^{[12]}z^{[\mu\nu]} + 4b_1F_{\mu\nu}\,{}^{[+-]}z^{[\mu\nu]} + 4b_2U_{\mu\nu}\,{}^{[+-]}z^{[\mu\nu]} +\\
&+4\beta_1F_{\mu\nu}\,{}^{(+-)}z^{[\mu\nu]} + 4\beta_2U_{\mu\nu}\,{}^{(+-)}z^{[\mu\nu]} + 4b_3V_{\mu\nu}^{+}\,{}^{[-1]}z^{[\mu\nu]} + 4b_3V_{\mu\nu}^{+}\,{}^{[-2]}z^{[\mu\nu]} +\\
&+4b_3V_{\mu\nu}^{-}\,{}^{[+1]}z^{[\mu\nu]} + 4b_3V_{\mu\nu}^{-}\,{}^{[+2]}z^{[\mu\nu]}
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

Escrevendo

$$\mathcal{L}_3^{\text{spin}\,A} = \mathcal{L}_3^A + \Delta_3^A$$
$$\Delta_3^A = 0 \tag{4.44}$$

4.4.6 $\mathcal{L}_3^{\text{spin}\,S}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_3^{\text{spin}\,S} &= \Big(\frac{1}{2}\,(\Sigma^{\mu\kappa})_\sigma^\rho\,\big(\Sigma^{\nu\lambda}\big)_\rho^\sigma\Big)\Big(2\beta_1 S^1_{\mu\nu}\ {}^{(11)}z_{\kappa\lambda} + 4\beta_1 S^1_{\mu\nu}\ {}^{(12)}z_{\kappa\lambda} + 2\beta_1 S^1_{\mu\nu}\ {}^{(22)}z_{\kappa\lambda} + 4\beta_1 S^1_{\mu\nu}\ {}^{+-3}z_{\kappa\lambda} + \\
&+2\beta_2 S^2_{\mu\nu}\ {}^{(11)}z_{\kappa\lambda} + 4\beta_2 S^2_{\mu\nu}\ {}^{(12)}z_{\kappa\lambda} + 2\beta_2 S^2_{\mu\nu}\ {}^{(22)}z_{\kappa\lambda} + 4\beta_2 S^2_{\mu\nu}\ {}^{+-3}z_{\kappa\lambda} + \\
&+4\beta_3 S^+_{\mu\nu}\ {}^{(-1)}z_{\kappa\lambda} + 4\beta_3 S^+_{\mu\nu}\ {}^{(-2)}z_{\kappa\lambda} + 4\beta_3 S^-_{\mu\nu}\ {}^{(+1)}z_{\kappa\lambda} + 4\beta_3 S^-_{\mu\nu}\ {}^{(+2)}z_{\kappa\lambda}\Big) + \\
&+\Big(-\frac{1}{24}\,(\Sigma_{\kappa\lambda})_\sigma^\rho\,\big(\Sigma^{\kappa\lambda}\big)_\rho^\sigma\Big)\Big(2\rho_1 S_\mu^{\mu 1}\ {}^{(11)}z_\nu^\nu + 4\rho_1 S_\mu^{\mu 1}\ {}^{(12)}z_\nu^\nu + 2\rho_1 S_\mu^{\mu 1}\ {}^{(22)}z_\nu^\nu + 4\rho_1 S_\mu^{\mu 1}\ {}^{+-3}z_\nu^\nu + \\
&+2\rho_2 S_\mu^{\mu 2}\ {}^{(11)}z_\nu^\nu + 4\rho_2 S_\mu^{\mu 2}\ {}^{(12)}z_\nu^\nu + 2\rho_2 S_\mu^{\mu 2}\ {}^{(22)}z_\nu^\nu + 4\rho_2 S_\mu^{\mu 2}\ {}^{+-3}z_\nu^\nu + \\
&+4\rho_3 S_\mu^{\mu +}\ {}^{(-1)}z_\nu^\nu + 4\rho_3 S_\mu^{\mu +}\ {}^{(-2)}z_\nu^\nu + 4\rho_3 S_\mu^{\mu -}\ {}^{(+1)}z_\nu^\nu + 4\rho_3 S_\mu^{\mu -}\ {}^{(+2)}z_\nu^\nu + \\
&+2\big(\beta_1 + 4\rho_1\big) S_\mu^{\mu 1}\ {}^{(11)}\omega_\nu^\nu + 4\big(\beta_1 + 4\rho_1\big) S_\mu^{\mu 1}\ {}^{(12)}\omega_\nu^\nu + \\
&+2\big(\beta_1 + 4\rho_1\big) S_\mu^{\mu 1}\ {}^{(22)}\omega_\nu^\nu + 4\big(\beta_1 + 4\rho_1\big) S_\mu^{\mu 1}\ {}^{+-3}\omega_\nu^\nu + \\
&+2\big(\beta_2 + 4\rho_2\big) S_\mu^{\mu 2}\ {}^{(11)}\omega_\nu^\nu + 4\big(\beta_2 + 4\rho_2\big) S_\mu^{\mu 2}\ {}^{(12)}\omega_\nu^\nu + \\
&+2\big(\beta_2 + 4\rho_2\big) S_\mu^{\mu 2}\ {}^{(22)}\omega_\nu^\nu + 4\big(\beta_2 + 4\rho_2\big) S_\mu^{\mu 2}\ {}^{+-3}\omega_\nu^\nu + \\
&+4\big(\beta_3 + 4\rho_3\big) S_\mu^{\mu +}\ {}^{(-1)}\omega_\nu^\nu + 4\big(\beta_3 + 4\rho_3\big) S_\mu^{\mu +}\ {}^{(-2)}\omega_\nu^\nu + \\
&+4\big(\beta_3 + 4\rho_3\big) S_\mu^{\mu -}\ {}^{(+1)}\omega_\nu^\nu + 4\big(\beta_3 + 4\rho_3\big) S_\mu^{\mu -}\ {}^{(+2)}\omega_\nu^\nu\Big)
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Aplicando as definições anteriores, temos:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_3^{\text{spin}\,S} = 2\beta_1 S^1_{\mu\nu}\ {}^{(11)}_{}z^{\ \mu\nu} - 2\beta_1 S^{\mu\,1}_{\mu}\ {}^{(11)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + 4\beta_1 S^1_{\mu\nu}\ {}^{(12)}_{}z^{\ \mu\nu} - 4\beta_1 S^{\mu\,1}_{\mu}\ {}^{(12)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + \\
&+2\beta_1 S^1_{\mu\nu}\ {}^{(22)}_{}z^{\ \mu\nu} - 2\beta_1 S^{\mu\,1}_{\mu}\ {}^{(22)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + 4\beta_1 S^1_{\mu\nu}\ {}^{+-3}_{}z^{\ \mu\nu} - 4\beta_1 S^{\mu\,1}_{\mu}\ {}^{+-3}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + \\
&+2\beta_2 S^2_{\mu\nu}\ {}^{(11)}_{}z^{\ \mu\nu} - 2\beta_2 S^{\mu\,2}_{\mu}\ {}^{(11)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + 4\beta_2 S^2_{\mu\nu}\ {}^{(12)}_{}z^{\ \mu\nu} - 4\beta_2 S^{\mu\,2}_{\mu}\ {}^{(12)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + \\
&+2\beta_2 S^2_{\mu\nu}\ {}^{(22)}_{}z^{\ \mu\nu} - 2\beta_2 S^{\mu\,2}_{\mu}\ {}^{(22)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + 4\beta_2 S^{\ 2}_{\mu\nu}\ {}^{+-3}_{}z^{\ \mu\nu} - 4\beta_2 S^{\mu\,2}_{\mu}\ {}^{+-3}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + \\
&+4\beta_3 S^+_{\mu\nu}\ {}^{(-1)}_{}z^{\ \mu\nu} + 4\beta_3 S^+_{\mu\nu}\ {}^{(-2)}_{}z^{\ \mu\nu} + 4\beta_3 S^-_{\mu\nu}\ {}^{(+1)}_{}z^{\ \mu\nu} + 4\beta_3 S^-_{\mu\nu}\ {}^{(+2)}_{}z^{\ \mu\nu} + \\
&-4\beta_3 S^{\mu\,+}_{\mu}\ {}^{(-1)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} - 4\beta_3 S^{\mu\,+}_{\mu}\ {}^{(-2)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} - 4\beta_3 S^{\mu\,-}_{\mu}\ {}^{(+1)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} - 4\beta_3 S^{\mu\,-}_{\mu}\ {}^{(+2)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + \\
&+2\rho_1 S^{\mu 1}_{\mu}\ {}^{(11)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + 4\rho_1 S^{\mu 1}_{\mu}\ {}^{(12)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + 2\rho_1 S^{\mu 1}_{\mu}\ {}^{(22)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + 4\rho_1 S^{\mu 1}_{\mu}\ {}^{+-3}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + \\
&+2\rho_2 S^{\mu 2}_{\mu}\ {}^{(11)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + 4\rho_2 S^{\mu 2}_{\mu}\ {}^{(12)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + 2\rho_2 S^{\mu 2}_{\mu}\ {}^{(22)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + 4\rho_2 S^{\mu 2}_{\mu}\ {}^{+-3}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + \\
&+4\rho_3 S^{\mu +}_{\mu}\ {}^{(-1)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + 4\rho_3 S^{\mu +}_{\mu}\ {}^{(-2)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + 4\rho_3 S^{\mu -}_{\mu}\ {}^{(+1)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + 4\rho_3 S^{\mu -}_{\mu}\ {}^{(+2)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + \\
&+2\big(\beta_1 + 4\rho_1\big) S^{\mu 1}_{\mu}\ {}^{(11)}_{}\omega^{\ \nu}_{\nu} + 4\big(\beta_1 + 4\rho_1\big) S^{\mu 1}_{\mu}\ {}^{(12)}_{}\omega^{\ \nu}_{\nu} + \\
&+2\big(\beta_1 + 4\rho_1\big) S^{\mu 1}_{\mu}\ {}^{(22)}_{}\omega^{\ \nu}_{\nu} + 4\big(\beta_1 + 4\rho_1\big) S^{\mu 1}_{\mu}\ {}^{+-3}_{}\omega^{\ \nu}_{\nu} + \\
&+2\big(\beta_2 + 4\rho_2\big) S^{\mu 2}_{\mu}\ {}^{(11)}_{}\omega^{\ \nu}_{\nu} + 4\big(\beta_2 + 4\rho_2\big) S^{\mu 2}_{\mu}\ {}^{(12)}_{}\omega^{\ \nu}_{\nu} + \\
&+2\big(\beta_2 + 4\rho_2\big) S^{\mu 2}_{\mu}\ {}^{(22)}_{}\omega^{\ \nu}_{\nu} + 4\big(\beta_2 + 4\rho_2\big) S^{\mu 2}_{\mu}\ {}^{+-3}_{}\omega^{\ \nu}_{\nu} + \\
&+4\big(\beta_3 + 4\rho_3\big) S^{\mu +}_{\mu}\ {}^{(-1)}_{}\omega^{\ \nu}_{\nu} + 4\big(\beta_3 + 4\rho_3\big) S^{\mu +}_{\mu}\ {}^{(-2)}_{}\omega^{\ \nu}_{\nu} + \\
&+4\big(\beta_3 + 4\rho_3\big) S^{\mu -}_{\mu}\ {}^{(+1)}_{}\omega^{\ \nu}_{\nu} + 4\big(\beta_3 + 4\rho_3\big) S^{\mu -}_{\mu}\ {}^{(+2)}_{}\omega^{\ \nu}_{\nu}
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_3^{\text{spin}\,S} = \mathcal{L}_3^S + \Delta_3^S \\
&\Delta_3^S = -2\beta_1 S^{1\,\mu}_{\mu}\ {}^{(11)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} - 2\beta_1 S^{1\,\mu}_{\mu}\ {}^{(12)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} - 2\beta_1 S^{1\,\mu}_{\mu}\ {}^{(22)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} - 2\beta_1 S^{1\,\mu}_{\mu}\ {}^{+-3}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + \\
&-2\beta_2 S^{2\,\mu}_{\mu}\ {}^{(11)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} - 2\beta_2 S^{2\,\mu}_{\mu}\ {}^{(12)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} - 2\beta_2 S^{2\,\mu}_{\mu}\ {}^{(22)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} - 2\beta_2 S^{2\,\mu}_{\mu}\ {}^{+-3}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + \\
&-4\beta_3 S^{+\,\mu}_{\mu}\ {}^{(-1)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} - 4\beta_3 S^{+\,\mu}_{\mu}\ {}^{(-2)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} - 4\beta_3 S^{-\,\mu}_{\mu}\ {}^{(+1)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} - 4\beta_3 S^{-\,\mu}_{\mu}\ {}^{(+2)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} +
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

Simplificando, temos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_3^{\text{spin}} &= 2\beta_1 S^1_{\mu\nu}\ {}^{(11)}_{}z^{\ \mu\nu} + 4\beta_1 S^1_{\mu\nu}\ {}^{(12)}_{}z^{\ \mu\nu} + 2\beta_1 S^1_{\mu\nu}\ {}^{(22)}_{}z^{\ \mu\nu} + 4\beta_1 S^1_{\mu\nu}\ {}^{+-3}_{}z^{\ \mu\nu} + \\
&+2\beta_2 S^2_{\mu\nu}\ {}^{(11)}_{}z^{\ \mu\nu} + 4\beta_2 S^2_{\mu\nu}\ {}^{(12)}_{}z^{\ \mu\nu} + 2\beta_2 S^2_{\mu\nu}\ {}^{(22)}_{}z^{\ \mu\nu} + 4\beta_2 S^2_{\mu\nu}\ {}^{+-3}_{}z^{\ \mu\nu} + \\
&+4\beta_3 S^+_{\mu\nu}\ {}^{(-1)}_{}z^{\ \mu\nu} + 4\beta_3 S^+_{\mu\nu}\ {}^{(-2)}_{}z^{\ \mu\nu} + 4\beta_3 S^-_{\mu\nu}\ {}^{(+1)}_{}z^{\ \mu\nu} + 4\beta_3 S^-_{\mu\nu}\ {}^{(+2)}_{}z^{\ \mu\nu} + \\
&+2\big(\rho_1-\beta_1\big) S^{\ \mu 1}_{\mu}\ {}^{(11)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + 4\big(\rho_1-\beta_1\big) S^{\ \mu 1}_{\mu}\ {}^{(12)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + \\
&+2\big(\rho_1-\beta_1\big) S^{\ \mu 1}_{\mu}\ {}^{(22)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + 4\big(\rho_1-\beta_1\big) S^{\ \mu 1}_{\mu}\ {}^{+-3}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + \\
&+2\big(\rho_2-\beta_2\big) S^{\ \mu 2}_{\mu}\ {}^{(11)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + 4\big(\rho_2-\beta_2\big) S^{\ \mu 2}_{\mu}\ {}^{(12)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + \\
&+2\big(\rho_2-\beta_2\big) S^{\ \mu 2}_{\mu}\ {}^{(22)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + 4\big(\rho_2-\beta_2\big) S^{\ \mu 2}_{\mu}\ {}^{+-3}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + \\
&+4\big(\rho_3-\beta_3\big) S^{\ \mu +}_{\mu}\ {}^{(-1)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + 4\big(\rho_3-\beta_3\big) S^{\ \mu +}_{\mu}\ {}^{(-2)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + \\
&+4\big(\rho_3-\beta_3\big) S^{\ \mu -}_{\mu}\ {}^{(+1)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + 4\big(\rho_3-\beta_3\big) S^{\ \mu -}_{\mu}\ {}^{(+2)}_{}z^{\ \nu}_{\nu} + \\
&+2\big(\beta_1+4\rho_1\big) S^{\ \mu 1}_{\mu}\ {}^{(11)}_{}\omega^{\ \nu}_{\nu} + 4\big(\beta_1+4\rho_1\big) S^{\ \mu 1}_{\mu}\ {}^{(12)}_{}\omega^{\ \nu}_{\nu} + \\
&+2\big(\beta_1+4\rho_1\big) S^{\ \mu 1}_{\mu}\ {}^{(22)}_{}\omega^{\ \nu}_{\nu} + 4\big(\beta_1+4\rho_1\big) S^{\ \mu 1}_{\mu}\ {}^{+-3}_{}\omega^{\ \nu}_{\nu} + \\
&+2\big(\beta_2+4\rho_2\big) S^{\ \mu 2}_{\mu}\ {}^{(11)}_{}\omega^{\ \nu}_{\nu} + 4\big(\beta_2+4\rho_2\big) S^{\ \mu 2}_{\mu}\ {}^{(12)}_{}\omega^{\ \nu}_{\nu} + \\
&+2\big(\beta_2+4\rho_2\big) S^{\ \mu 2}_{\mu}\ {}^{(22)}_{}\omega^{\ \nu}_{\nu} + 4\big(\beta_2+4\rho_2\big) S^{\ \mu 2}_{\mu}\ {}^{+-3}_{}\omega^{\ \nu}_{\nu} + \\
&+4\big(\beta_3+4\rho_3\big) S^{\ \mu +}_{\mu}\ {}^{(-1)}_{}\omega^{\ \nu}_{\nu} + 4\big(\beta_3+4\rho_3\big) S^{\ \mu +}_{\mu}\ {}^{(-2)}_{}\omega^{\ \nu}_{\nu} + \\
&+4\big(\beta_3+4\rho_3\big) S^{\ \mu -}_{\mu}\ {}^{(+1)}_{}\omega^{\ \nu}_{\nu} + 4\big(\beta_3+4\rho_3\big) S^{\ \mu -}_{\mu}\ {}^{(+2)}_{}\omega^{\ \nu}_{\nu}
\end{aligned}
\tag{4.48}
$$

4.4.7 $\mathcal{L}_4^{\mathbf{spin}\,A}$

$$\mathcal{L}_4^{\text{spin }A} = \left(-\frac{1}{4}\left(\Sigma^{\mu\nu}\right)_\sigma^\rho\left(\Sigma^{\kappa\lambda}\right)_\rho^\sigma - \frac{1}{2}\left(\Sigma^{\mu\kappa}\right)_\sigma^\rho\left(\Sigma^{\nu\lambda}\right)_\rho^\sigma\right)\mathcal{L}_4^A \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_4^{\text{spin }A} = &\left(-\frac{1}{4}\left(\Sigma^{\mu\nu}\right)_\sigma^\rho\left(\Sigma^{\kappa\lambda}\right)_\rho^\sigma - \frac{1}{2}\left(\Sigma^{\mu\kappa}\right)_\sigma^\rho\left(\Sigma^{\nu\lambda}\right)_\rho^\sigma\right)\left(2\,{}^{[12]}_{[\mu\nu]}z\,{}^{[12]}_{[\kappa\lambda]}z + 2\,{}^{[12]}_{[\mu\nu]}z\,{}^{[21]}_{[\kappa\lambda]}z + \right.\\
&+4\,{}^{[13+]}_{[\mu\nu]}z\,{}^{[13-]}_{[\kappa\lambda]}z + 4\,{}^{[23+]}_{[\mu\nu]}z\,{}^{[23-]}_{[\kappa\lambda]}z + 8\,{}^{[13+]}_{[\mu\nu]}z\,{}^{[23-]}_{[\kappa\lambda]}z + 8\,{}^{[12]}_{[\mu\nu]}z\,{}^{[+-]}_{[\kappa\lambda]}z + \\
&-8\,{}^{(12)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(12)}_{[\kappa\lambda]}\omega - 16\,{}^{(12)}_{[\mu\nu]}\omega\,{}^{(12)}_{[\kappa\lambda]}\omega + 4\,{}^{(13+)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(13-)}_{[\kappa\lambda]}z + 4\,{}^{(23+)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(23-)}_{[\kappa\lambda]}z + \\
&+8\,{}^{(13+)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(23-)}_{[\kappa\lambda]}z - 16\,{}^{(+-)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(+-)}_{[\kappa\lambda]}\omega - 32\,{}^{(+-)}_{[\mu\nu]}\omega\,{}^{(+-)}_{[\kappa\lambda]}\omega + \\
&-4i\,{}^{(13+)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(24-)}_{[\kappa\lambda]}\omega + 4i\,{}^{(13-)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(24+)}_{[\kappa\lambda]}\omega - 4i\,{}^{(23+)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(14-)}_{[\kappa\lambda]}\omega + \\
&+4i\,{}^{(23-)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(14+)}_{[\kappa\lambda]}\omega - 16i\,{}^{(13+)}_{[\mu\nu]}\omega\,{}^{(24-)}_{[\kappa\lambda]}\omega + 16i\,{}^{(13-)}_{[\mu\nu]}\omega\,{}^{(24+)}_{[\kappa\lambda]}\omega + \\
&-2i\,{}^{(14+)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(23-)}_{[\kappa\lambda]}z + 2i\,{}^{(14-)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(23+)}_{[\kappa\lambda]}z + 16i\,{}^{(14+)}_{[\mu\nu]}\omega\,{}^{(23-)}_{[\kappa\lambda]}\omega + \\
&-16i\,{}^{(14-)}_{[\mu\nu]}\omega\,{}^{(23+)}_{[\kappa\lambda]}\omega + 2i\,{}^{(13+)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(24-)}_{[\kappa\lambda]}z - 2i\,{}^{(13-)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(24+)}_{[\kappa\lambda]}z + \\
&\left.+4i\,{}^{(14+)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(23-)}_{[\kappa\lambda]}\omega - 4i\,{}^{(14-)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(23+)}_{[\kappa\lambda]}\omega + 4i\,{}^{(24+)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(13-)}_{[\kappa\lambda]}\omega - 4i\,{}^{(24-)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(13+)}_{[\kappa\lambda]}\omega\right)
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Simplificando, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_4^{\text{spin }A} = &\,2\,{}^{[12]}_{[\mu\nu]}z\,{}^{[12]}z^{[\mu\nu]} + 2\,{}^{[12]}_{[\mu\nu]}z\,{}^{[21]}z^{[\mu\nu]} + 4\,{}^{[13+]}_{[\mu\nu]}z\,{}^{[13-]}z^{[\mu\nu]} + 4\,{}^{[23+]}_{[\mu\nu]}z\,{}^{[23-]}z^{[\mu\nu]} + \\
&+8\,{}^{[13+]}_{[\mu\nu]}z\,{}^{[23-]}z^{[\mu\nu]} + 8\,{}^{[12]}_{[\mu\nu]}z\,{}^{[+-]}z^{[\mu\nu]} - 8\,{}^{(12)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(12)}\omega^{[\mu\nu]} - 16\,{}^{(12)}_{[\mu\nu]}\omega\,{}^{(12)}\omega^{[\mu\nu]} + \\
&+4\,{}^{(13+)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(13-)}z^{[\mu\nu]} + 4\,{}^{(23+)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(23-)}z^{[\mu\nu]} + 4\,{}^{(13+)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(23-)}z^{[\mu\nu]} - 16\,{}^{(+-)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(+-)}\omega^{[\mu\nu]} + \\
&-32\,{}^{(+-)}_{[\mu\nu]}\omega\,{}^{(+-)}\omega^{[\mu\nu]} + 4i\,{}^{(13+)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(24-)}\omega^{[\mu\nu]} + 4i\,{}^{(13-)}z^{[\mu\nu]}\,{}^{(24+)}\omega^{[\mu\nu]} + \\
&-4i\,{}^{(23+)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(14-)}\omega^{[\mu\nu]} + 4i\,{}^{(23-)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(14+)}\omega^{[\mu\nu]} - 16i\,{}^{(13+)}_{[\mu\nu]}\omega\,{}^{(24-)}\omega^{[\mu\nu]} + 16i\,{}^{(13-)}_{[\mu\nu]}\omega\,{}^{(24+)}\omega^{[\mu\nu]} + \\
&-2i\,{}^{(14+)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(23-)}z^{[\mu\nu]} + 2i\,{}^{(14-)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(23+)}z^{[\mu\nu]} + 16i\,{}^{(14+)}_{[\mu\nu]}\omega\,{}^{(23-)}\omega^{[\mu\nu]} - 16i\,{}^{(14-)}_{[\mu\nu]}\omega\,{}^{(23+)}\omega^{[\mu\nu]} + \\
&+2i\,{}^{(13+)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(24-)}z^{[\mu\nu]} - 2i\,{}^{(13-)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(24+)}z^{[\mu\nu]} + 4i\,{}^{(14+)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(23-)}\omega^{[\mu\nu]} - 4i\,{}^{(14-)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(23+)}\omega^{[\mu\nu]} + \\
&+4i\,{}^{(24+)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(13-)}\omega^{[\mu\nu]} - 4i\,{}^{(24-)}_{[\mu\nu]}z\,{}^{(13+)}\omega^{[\mu\nu]}
\end{aligned} \tag{4.51}$$

4.4.8 $\mathcal{L}_4^{\mathbf{spin}\,S}$

$$\mathcal{L}_4^{\text{spin}\,S} = \frac{1}{2}\left(\Sigma^{\mu\kappa}\right)_\sigma^\rho \left(\Sigma^{\nu\lambda}\right)_\rho^\sigma \Big(2\overset{[12]}{z}_{(\mu\nu)}\overset{[12]}{z}_{(\kappa\lambda)} + 2\overset{[12]}{z}_{(\mu\nu)}\overset{[21]}{z}_{(\kappa\lambda)} + 4\overset{[13+]}{z}_{(\mu\nu)}\overset{[13-]}{z}_{(\kappa\lambda)} +$$
$$+4\overset{[23+]}{z}_{(\mu\nu)}\overset{[23-]}{z}_{(\kappa\lambda)} + 8\overset{[13+]}{z}_{(\mu\nu)}\overset{[23-]}{z}_{(\kappa\lambda)} + 4\overset{[+-]}{z}_{(\mu\nu)}\overset{[+-]}{z}_{(\kappa\lambda)} +$$
$$+ \overset{(11)}{z}_{(\mu\nu)}\overset{(11)}{z}_{(\kappa\lambda)} + \overset{(22)}{z}_{(\mu\nu)}\overset{(22)}{z}_{(\kappa\lambda)} + 2\overset{(11)}{z}_{(\mu\nu)}\overset{(22)}{z}_{(\kappa\lambda)} + 4\overset{(12)}{z}_{(\mu\nu)}\overset{(12)}{z}_{(\kappa\lambda)} +$$
$$+2\overset{(11)}{z}_{(\mu\nu)}\overset{(12)}{z}_{(\kappa\lambda)} + 4\overset{(22)}{z}_{(\mu\nu)}\overset{(12)}{z}_{(\kappa\lambda)} + 4\Big(\overset{(11)}{z}_{(\mu\nu)} + \overset{(22)}{z}_{(\mu\nu)}\Big)\overset{+-3}{z}_{(\kappa\lambda)} +$$
$$+4\overset{(11)}{\omega}_{(\mu\nu)}\overset{(11)}{\omega}_{(\kappa\lambda)} + 4\overset{(22)}{\omega}_{(\mu\nu)}\overset{(22)}{\omega}_{(\kappa\lambda)} + 16\overset{(11)}{\omega}_{(\mu\nu)}\overset{(12)}{\omega}_{(\kappa\lambda)} +$$
$$+16\overset{(22)}{\omega}_{(\mu\nu)}\overset{(12)}{\omega}_{(\kappa\lambda)} + 16\overset{(12)}{\omega}_{(\mu\nu)}\overset{(12)}{\omega}_{(\kappa\lambda)} +$$
$$+2\overset{(11)}{z}_{(\mu\nu)}\overset{(11)}{\omega}_{(\kappa\lambda)} + 2\overset{(22)}{z}_{(\mu\nu)}\overset{(22)}{\omega}_{(\kappa\lambda)} + 8\overset{(12)}{z}_{(\mu\nu)}\overset{(11)}{\omega}_{(\kappa\lambda)} +$$
$$+8\overset{(12)}{z}_{(\mu\nu)}\overset{(22)}{\omega}_{(\kappa\lambda)} + 8\overset{(12)}{z}_{(\mu\nu)}\overset{(12)}{\omega}_{(\kappa\lambda)} +$$
$$+4\overset{(13+)}{z}_{(\mu\nu)}\overset{(13-)}{z}_{(\kappa\lambda)} + 4\overset{(23+)}{z}_{(\mu\nu)}\overset{(23-)}{z}_{(\kappa\lambda)} + 8\overset{(13+)}{z}_{(\mu\nu)}\overset{(23-)}{z}_{(\kappa\lambda)} +$$
$$+4i\overset{(13+)}{z}_{(\mu\nu)}\overset{(24-)}{\omega}_{(\kappa\lambda)} - 4i\overset{(13-)}{z}_{(\mu\nu)}\overset{(24+)}{\omega}_{(\kappa\lambda)} +$$
$$+4i\overset{(23+)}{z}_{(\mu\nu)}\overset{(14-)}{\omega}_{(\kappa\lambda)} - 4i\overset{(23-)}{z}_{(\mu\nu)}\overset{(14+)}{\omega}_{(\kappa\lambda)} +$$
$$+16i\overset{(13+)}{\omega}_{(\mu\nu)}\overset{(24-)}{\omega}_{(\kappa\lambda)} - 16i\overset{(13-)}{\omega}_{(\mu\nu)}\overset{(24+)}{\omega}_{(\kappa\lambda)} +$$
$$+2i\overset{(14+)}{z}_{(\mu\nu)}\overset{(23-)}{z}_{(\kappa\lambda)} - 2i\overset{(14-)}{z}_{(\mu\nu)}\overset{(23+)}{z}_{(\kappa\lambda)} +$$
$$-16i\overset{(14+)}{\omega}_{(\mu\nu)}\overset{(23-)}{\omega}_{(\kappa\lambda)} + 16i\overset{(14-)}{\omega}_{(\mu\nu)}\overset{(23+)}{\omega}_{(\kappa\lambda)} +$$
$$-2i\overset{(13+)}{z}_{(\mu\nu)}\overset{(24-)}{z}_{(\kappa\lambda)} + 2i\overset{(13-)}{z}_{(\mu\nu)}\overset{(24+)}{z}_{(\kappa\lambda)} +$$
$$-4i\overset{(14+)}{z}_{(\mu\nu)}\overset{(23-)}{\omega}_{(\kappa\lambda)} + 4i\overset{(14-)}{z}_{(\mu\nu)}\overset{(23+)}{\omega}_{(\kappa\lambda)} +$$
$$-4i\overset{(24+)}{z}_{(\mu\nu)}\overset{(13-)}{\omega}_{(\kappa\lambda)} + 4i\overset{(24-)}{z}_{(\mu\nu)}\overset{(13+)}{\omega}_{(\kappa\lambda)} +$$
$$+8\overset{(12)}{z}_{(\mu\nu)}\overset{+-3}{z}_{(\kappa\lambda)} + 4\overset{+-3}{z}_{(\mu\nu)}\overset{+-4}{z}_{(\kappa\lambda)}\Big) +$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{24}\Big((\Sigma_{\kappa\lambda})^{\rho}_{\sigma}\left(\Sigma^{\kappa\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho}\Big)\Bigg(-4\,{}^{[13+]}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{[13-]}_{\nu}z^{\nu} - 4\,{}^{[23+]}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{[23-]}_{\nu}z^{\nu} - 4\,{}^{[+-]}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{[+-]}_{\nu}z^{\nu} + \\
&-4\,{}^{[13+]}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{[23-]}_{\nu}z^{\nu} + 4\,{}^{[13-]}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{[23+]}_{\nu}z^{\nu} + 4i\,{}^{[13-]}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{[24+]}_{\nu}z^{\nu} - 4i\,{}^{[13+]}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{[24-]}_{\nu}z^{\nu} \\
&+4\,{}^{(13+)}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{(13-)}_{\nu}z^{\nu} + 4\,{}^{(23+)}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{(23-)}_{\nu}z^{\nu} + 4\,{}^{(13+)}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{(23-)}_{\nu}z^{\nu} - 4\,{}^{(13-)}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{(23+)}_{\nu}z^{\nu} + \\
&+8\,{}^{(11)}_{\mu}\omega^{\mu}\,{}^{(22)}_{\nu}\omega^{\nu} + 32\,{}^{(13+)}_{\mu}\omega^{\mu}\,{}^{(13-)}_{\nu}\omega^{\nu} + 32\,{}^{(23+)}_{\mu}\omega^{\mu}\,{}^{(23-)}_{\nu}\omega^{\nu} + 32\,{}^{(13+)}_{\mu}\omega^{\mu}\,{}^{(23-)}_{\nu}\omega^{\nu} - 32\,{}^{(13-)}_{\mu}\omega^{\mu}\,{}^{(23+)}_{\nu}\omega^{\nu} + \\
&+4\,{}^{(11)}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{(22)}_{\nu}\omega^{\nu} + 16\,{}^{(13+)}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{(13-)}_{\nu}\omega^{\nu} + 16\,{}^{(23+)}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{(23-)}_{\nu}\omega^{\nu} + 16\,{}^{(13+)}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{(13-)}_{\nu}\omega^{\nu} - 16\,{}^{(13-)}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{(13+)}_{\nu}\omega^{\nu} + \\
&+8\Big\{ {}^{(11)}_{\mu}z^{\mu} + {}^{(22)}_{\mu}z^{\mu} + 2\,{}^{(11)}_{\mu}\omega^{\mu} + 2\,{}^{(22)}_{\mu}\omega^{\mu} + 2\,{}^{(12)}_{\mu}z^{\mu} + 4\,{}^{(12)}_{\mu}\omega^{\mu}\Big\}\,{}^{+-3}_{\nu}\omega^{\nu} + \\
&-4\,{}^{(+-)}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{(+-)}_{\nu}z^{\nu} + 8\,{}^{+-3}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{+-4}_{\nu}\omega^{\nu} + 16\,{}^{+-3}_{\mu}\omega^{\mu}\,{}^{+-4}_{\nu}\omega^{\nu}\Bigg)
\end{aligned}
\tag{4.52}
$$

Utilizando as definições anteriores, temos:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_4^{\text{spin}\,S} = 2\,{}^{[12]}_{(\mu\nu)}z\,{}^{[12](\mu\nu)}z - 2\,{}^{[12]}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{[12]}_{\nu}z^{\nu} + 2\,{}^{[12]}_{(\mu\nu)}z\,{}^{[21](\mu\nu)}z - 2\,{}^{[12]}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{[21]}_{\nu}z^{\nu} + \\
&+4\,{}^{[13+]}_{(\mu\nu)}z\,{}^{[13-](\mu\nu)}z - 4\,{}^{[13+]}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{[13-]}_{\nu}z^{\nu} + 4\,{}^{[23+]}_{(\mu\nu)}z\,{}^{[23-](\mu\nu)}z - 4\,{}^{[23+]}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{[23-]}_{\nu}z^{\nu} + \\
&+8\,{}^{[13+]}_{(\mu\nu)}z\,{}^{[23-](\mu\nu)}z - 8\,{}^{[13+]}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{[23-]}_{\nu}z^{\nu} + 4\,{}^{[+-]}_{(\mu\nu)}z\,{}^{[+-](\mu\nu)}z - 4\,{}^{[+-]}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{[+-]}_{\nu}z^{\nu} \\
&+\,{}^{(11)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(11)(\mu\nu)}z - \,{}^{(11)}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{(11)}_{\nu}z^{\nu} + \,{}^{(22)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(22)(\mu\nu)}z - \,{}^{(22)}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{(22)}_{\nu}z^{\nu} + \\
&+2\,{}^{(11)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(22)(\mu\nu)}z - 2\,{}^{(11)}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{(22)}_{\nu}z^{\nu} + 4\,{}^{(12)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(12)(\mu\nu)}z - 4\,{}^{(12)}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{(12)}_{\nu}z^{\nu} + \\
&+4\,{}^{(11)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(12)(\mu\nu)}z - 4\,{}^{(11)}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{(12)}_{\nu}z^{\nu} + 4\,{}^{(22)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(12)(\mu\nu)}z - 4\,{}^{(22)}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{(12)}_{\nu}z^{\nu} + \\
&+4\Big({}^{(11)}_{(\mu\nu)}z + \,{}^{(22)}_{(\mu\nu)}z\Big)\,{}^{+-3(\mu\nu)}z - 4\Big({}^{(11)}_{\mu}z^{\mu} + \,{}^{(22)}_{\mu}z^{\mu}\Big)\,{}^{+-3}_{\nu}z^{\nu} + \\
&+4\,{}^{(11)}_{(\mu\nu)}\omega\,{}^{(11)(\mu\nu)}\omega - 4\,{}^{(11)}_{\mu}\omega^{\mu}\,{}^{(11)}_{\nu}\omega^{\nu} + 4\,{}^{(22)}_{(\mu\nu)}\omega\,{}^{(22)(\mu\nu)}\omega - 4\,{}^{(22)}_{\mu}\omega^{\mu}\,{}^{(22)}_{\nu}\omega^{\nu} + \\
&+16\,{}^{(11)}_{(\mu\nu)}\omega\,{}^{(12)(\mu\nu)}\omega - 16\,{}^{(11)}_{\mu}\omega^{\mu}\,{}^{(12)}_{\nu}\omega^{\nu} + 16\,{}^{(22)}_{(\mu\nu)}\omega\,{}^{(12)(\mu\nu)}\omega - 16\,{}^{(22)}_{\mu}\omega^{\mu}\,{}^{(12)}_{\nu}\omega^{\nu} + \\
&+16\,{}^{(12)}_{(\mu\nu)}\omega\,{}^{(12)(\mu\nu)}\omega - 16\,{}^{(12)}_{\mu}\omega^{\mu}\,{}^{(12)}_{\nu}\omega^{\nu} + 2\,{}^{(11)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(11)(\mu\nu)}\omega - 2\,{}^{(11)}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{(11)}_{\nu}\omega^{\nu} + \\
&+2\,{}^{(22)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(22)(\mu\nu)}\omega - 2\,{}^{(22)}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{(22)}_{\nu}\omega^{\nu} + 8\,{}^{(12)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(11)(\mu\nu)}\omega - 8\,{}^{(12)}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{(11)}_{\nu}\omega^{\nu} + \\
&+8\,{}^{(12)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(22)(\mu\nu)}\omega - 8\,{}^{(12)}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{(22)}_{\nu}\omega^{\nu} + 8\,{}^{(12)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(12)(\mu\nu)}\omega - 8\,{}^{(12)}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{(12)}_{\nu}\omega^{\nu} + \\
&+4\,{}^{(13+)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(13-)(\mu\nu)}z - 4\,{}^{(13+)}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{(13-)}_{\nu}z^{\nu} + 4\,{}^{(23+)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(23-)(\mu\nu)}z - 4\,{}^{(23+)}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{(23-)}_{\nu}z^{\nu} + \\
&+8\,{}^{(13+)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(23-)(\mu\nu)}z - 8\,{}^{(13+)}_{\mu}z^{\mu}\,{}^{(23-)}_{\nu}z^{\nu} +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+4i\,{}^{(13+)}_{\ (\mu\nu)}\,{}^{(24-)}_{\ \ \ \ }\omega^{(\mu\nu)} - 4i\,{}^{(13+)}_{\ \mu}\,{}^{(24-)}_{\ \ \ \nu}\omega - 4i\,{}^{(13-)}_{\ (\mu\nu)}\,{}^{(24+)}_{\ \ \ \ }\omega^{(\mu\nu)} + 4i\,{}^{(13-)}_{\ \mu}\,{}^{(24+)}_{\ \ \ \nu}\omega + \\
&+4i\,{}^{(23+)}_{\ (\mu\nu)}\,{}^{(14-)}_{\ \ \ \ }\omega^{(\mu\nu)} - 4i\,{}^{(23+)}_{\ \mu}\,{}^{(14-)}_{\ \ \ \nu}\omega - 4i\,{}^{(23-)}_{\ (\mu\nu)}\,{}^{(14+)}_{\ \ \ \ }\omega^{(\mu\nu)} + 4i\,{}^{(23-)}_{\ \mu}\,{}^{(14+)}_{\ \ \ \nu}\omega + \\
&+16i\,{}^{(13+)}_{\ (\mu\nu)}\,{}^{(24-)}_{\ \ \ \ }\omega^{(\mu\nu)} - 16i\,{}^{(13+)}_{\ \mu}\,{}^{(24-)}_{\ \ \ \nu}\omega - 16i\,{}^{(13-)}_{\ (\mu\nu)}\,{}^{(24+)}_{\ \ \ \ }\omega^{(\mu\nu)} + 16i\,{}^{(13-)}_{\ \mu}\,{}^{(24+)}_{\ \ \ \nu}\omega + \\
&+2i\,{}^{(14+)}_{\ (\mu\nu)}\,{}^{(23-)}_{\ \ \ \ }z^{(\mu\nu)} - 2i\,{}^{(14+)}_{\ \mu}\,{}^{(23-)}_{\ \ \ \nu}z - 2i\,{}^{(14-)}_{\ (\mu\nu)}\,{}^{(23+)}_{\ \ \ \ }z^{(\mu\nu)} + 2i\,{}^{(14-)}_{\ \mu}\,{}^{(23+)}_{\ \ \ \nu}z + \\
&-8i\,{}^{(14+)}_{\ (\mu\nu)}\,{}^{(23-)}_{\ \ \ \ }\omega^{(\mu\nu)} + 8i\,{}^{(14+)}_{\ \mu}\,{}^{(23-)}_{\ \ \ \nu}\omega + 8i\,{}^{(14-)}_{\ (\mu\nu)}\,{}^{(23+)}_{\ \ \ \ }\omega^{(\mu\nu)} - 8i\,{}^{(14-)}_{\ \mu}\,{}^{(23+)}_{\ \ \ \nu}\omega \\
&-2i\,{}^{(13+)}_{\ (\mu\nu)}\,{}^{(24-)}_{\ \ \ \ }z^{(\mu\nu)} + 2i\,{}^{(13+)}_{\ \mu}\,{}^{(24-)}_{\ \ \ \nu}z + 2i\,{}^{(13-)}_{\ (\mu\nu)}\,{}^{(24+)}_{\ \ \ \ }z^{(\mu\nu)} - 2i\,{}^{(13-)}_{\ \mu}\,{}^{(24+)}_{\ \ \ \nu}z + \\
&-4i\,{}^{(14+)}_{\ (\mu\nu)}\,{}^{(23-)}_{\ \ \ \ }\omega^{(\mu\nu)} + 4i\,{}^{(14+)}_{\ \mu}\,{}^{(23-)}_{\ \ \ \nu}\omega + 4i\,{}^{(14-)}_{\ (\mu\nu)}\,{}^{(23+)}_{\ \ \ \ }\omega^{(\mu\nu)} - 4i\,{}^{(14-)}_{\ \mu}\,{}^{(23+)}_{\ \ \ \nu}\omega + \\
&-4i\,{}^{(24+)}_{\ (\mu\nu)}\,{}^{(13-)}_{\ \ \ \ }\omega^{(\mu\nu)} + 4i\,{}^{(24+)}_{\ \mu}\,{}^{(13-)}_{\ \ \ \nu}\omega + 4i\,{}^{(24-)}_{\ (\mu\nu)}\,{}^{(13+)}_{\ \ \ \ }\omega^{(\mu\nu)} - 4i\,{}^{(24-)}_{\ \mu}\,{}^{(13+)}_{\ \ \ \nu}\omega + \\
&+8\,{}^{(12)}_{\ (\mu\nu)}\,{}^{+-3}_{\ \ \ \ }z^{(\mu\nu)} - 8\,{}^{(12)}_{\ \mu}\,{}^{+-3}_{\ \ \ \nu}z + 4\,{}^{+-3}_{\ (\mu\nu)}\,{}^{+-4}_{\ \ \ \ }z^{(\mu\nu)} - 4\,{}^{+-3}_{\ \mu}\,{}^{+-4}_{\ \ \ \nu}z + \\
&-4\,{}^{[13+]}_{\ \mu}\,{}^{[13-]}_{\ \ \ \nu}z - 4\,{}^{[23+]}_{\ \mu}\,{}^{[23-]}_{\ \ \ \nu}z - 4\,{}^{[+-]}_{\ \mu}\,{}^{[+-]}_{\ \ \ \nu}z + \\
&-4\,{}^{[13+]}_{\ \mu}\,{}^{[23-]}_{\ \ \ \nu}z + 4\,{}^{[13-]}_{\ \mu}\,{}^{[23+]}_{\ \ \ \nu}z + 4i\,{}^{[13-]}_{\ \mu}\,{}^{[24+]}_{\ \ \ \nu}z - 4i\,{}^{[13+]}_{\ \mu}\,{}^{[24-]}_{\ \ \ \nu}z + \\
&+4\,{}^{(13+)}_{\ \mu}\,{}^{(13-)}_{\ \ \ \nu}z + 4\,{}^{(23+)}_{\ \mu}\,{}^{(23-)}_{\ \ \ \nu}z + 4\,{}^{(13+)}_{\ \mu}\,{}^{(23-)}_{\ \ \ \nu}z - 4\,{}^{(13-)}_{\ \mu}\,{}^{(23+)}_{\ \ \ \nu}z + \\
&+8\,{}^{(11)}_{\ \mu}\,{}^{(22)}_{\ \ \ \nu}\omega + 32\,{}^{(13+)}_{\ \mu}\,{}^{(13-)}_{\ \ \ \nu}\omega + 32\,{}^{(23+)}_{\ \mu}\,{}^{(23-)}_{\ \ \ \nu}\omega + 32\,{}^{(13+)}_{\ \mu}\,{}^{(23-)}_{\ \ \ \nu}\omega - 32\,{}^{(13-)}_{\ \mu}\,{}^{(23+)}_{\ \ \ \nu}\omega + \\
&+4\,{}^{(11)}_{\ \mu}\,{}^{(22)}_{\ \ \ \nu}z + 16\,{}^{(13+)}_{\ \mu}\,{}^{(13-)}_{\ \ \ \nu}z + 16\,{}^{(23+)}_{\ \mu}\,{}^{(23-)}_{\ \ \ \nu}z + 16\,{}^{(13+)}_{\ \mu}\,{}^{(13-)}_{\ \ \ \nu}z - 16\,{}^{(13-)}_{\ \mu}\,{}^{(13+)}_{\ \ \ \nu}z + \\
&+8\left\{ {}^{(11)}_{\ \mu} + {}^{(22)}_{\ \mu} + 2\,{}^{(11)}_{\ \mu}\omega + 2\,{}^{(22)}_{\ \mu}\omega + 2\,{}^{(12)}_{\ \mu}z + 4\,{}^{(12)}_{\ \mu}\omega \right\} {}^{+-3}_{\ \ \ \nu}\omega + \\
&-4\,{}^{(+-)}_{\ \mu}\,{}^{(+-)}_{\ \ \ \nu}z + 8\,{}^{+-3}_{\ \mu}\,{}^{+-4}_{\ \ \ \nu}\omega + 16\,{}^{+-3}_{\ \mu}\,{}^{+-4}_{\ \ \ \nu}\omega
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

Podemos assim realizar o seguinte estudo:

$$
\mathcal{L}_4^{\text{spin}\,S} = \mathcal{L}_4^S + \Delta_4^S
\tag{4.54}
$$

$$
\Delta_4^S = \Delta_{4\,1}^S + \Delta_{4\,2}^S + \Delta_{4\,3}^S
\tag{4.55}
$$

$$\Delta^S_{41} = -2\,{}^{[12]_\mu}_{\mu}z^{[12]_\nu}_{\nu} - 2\,{}^{[12]_\mu}_{\mu}z^{[21]_\nu}_{\nu} - 4\,{}^{[13+]_\mu}_{\mu}z^{[13-]_\nu}_{\nu} + \\ -4\,{}^{[23+]_\mu}_{\mu}z^{[23-]_\nu}_{\nu} - 8\,{}^{[13+]_\mu}_{\mu}z^{[23-]_\nu}_{\nu} - 4\,{}^{[+-]_\mu}_{\mu}z^{[+-]_\nu}_{\nu} \tag{4.56}$$

$$\Delta^S_{42} = -\,{}^{(11)_\mu}_{\mu}z^{(11)_\nu}_{\nu} - {}^{(22)_\mu}_{\mu}z^{(22)_\nu}_{\nu} - 2\,{}^{(11)_\mu}_{\mu}z^{(22)_\nu}_{\nu} - 4\,{}^{(12)_\mu}_{\mu}z^{(12)_\nu}_{\nu} + \\ -2\,{}^{(11)_\mu}_{\mu}z^{(12)_\nu}_{\nu} - 4\,{}^{(22)_\mu}_{\mu}z^{(12)_\nu}_{\nu} - 4\big({}^{(11)_\mu}_{\mu}z + {}^{(22)_\mu}_{\mu}z\big)\,{}^{+-3_\nu}_{\nu}z - 4\,{}^{(11)_\mu}_{\mu}\omega^{(11)_\nu}_{\nu} + \\ -4\,{}^{(22)_\mu}_{\mu}\omega^{(22)_\nu}_{\nu} - 16\,{}^{(11)_\mu}_{\mu}\omega^{(12)_\nu}_{\nu} - 16\,{}^{(12)_\mu}_{\mu}\omega^{(12)_\nu}_{\nu} - 16\,{}^{(22)_\mu}_{\mu}\omega^{(12)_\nu}_{\nu} + \\ -2\,{}^{(11)_\mu}_{\mu}z^{(11)_\nu}_{\nu} - 4\,{}^{(22)_\mu}_{\mu}\omega^{(22)_\nu}_{\nu} - 8\,{}^{(12)_\mu}_{\mu}z^{(11)_\nu}_{\nu} - 8\,{}^{(12)_\mu}_{\mu}\omega^{(22)_\nu}_{\nu} - 8\,{}^{(12)_\mu}_{\mu}z^{(12)_\nu}_{\nu} + \\ -4\,{}^{(13+)_\mu}_{\mu}z^{(13-)_\nu}_{\nu} - 4\,{}^{(23+)_\mu}_{\mu}z^{(23-)_\nu}_{\nu} - 8\,{}^{(13+)_\mu}_{\mu}z^{(23-)_\nu}_{\nu} \tag{4.57}$$

$$\Delta^S_{43} = -4i\,{}^{(13+)_\mu}_{\mu}z^{(24-)_\nu}_{\nu} + 4i\,{}^{(13-)_\mu}_{\mu}z^{(24+)_\nu}_{\nu} - 4i\,{}^{(23+)_\mu}_{\mu}z^{(14-)_\nu}_{\nu} + 4i\,{}^{(23-)_\mu}_{\mu}z^{(14+)_\nu}_{\nu} + \\ -16i\,{}^{(13+)_\mu}_{\mu}\omega^{(24-)_\nu}_{\nu} + 16i\,{}^{(13-)_\mu}_{\mu}\omega^{(24+)_\nu}_{\nu} - 4i\,{}^{(14+)_\mu}_{\mu}z^{(23-)_\nu}_{\nu} + 4i\,{}^{(14-)_\mu}_{\mu}z^{(23+)_\nu}_{\nu} + \\ +16i\,{}^{(14+)_\mu}_{\mu}\omega^{(23-)_\nu}_{\nu} - 16i\,{}^{(14-)_\mu}_{\mu}\omega^{(23+)_\nu}_{\nu} + 2i\,{}^{(13+)_\mu}_{\mu}z^{(24-)_\nu}_{\nu} - 2i\,{}^{(13-)_\mu}_{\mu}z^{(24+)_\nu}_{\nu} + \\ +4i\,{}^{(14+)_\mu}_{\mu}z^{(23-)_\nu}_{\nu} - 4i\,{}^{(14-)_\mu}_{\mu}z^{(23+)_\nu}_{\nu} + 4i\,{}^{(24+)_\mu}_{\mu}z^{(13-)_\nu}_{\nu} - 4i\,{}^{(24-)_\mu}_{\mu}z^{(13+)_\nu}_{\nu} + \\ -8\,{}^{(12)_\mu}_{\mu}z^{+-3_\nu}_{\nu} - 4\,{}^{+-3_\mu}_{\mu}z^{+-4_\nu}_{\nu} \tag{4.58}$$

Sendo assim:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_4^{\text{spin }S} = 2\,{}^{[12]}_{(\mu\nu)}z\,{}^{[12](\mu\nu)}z + 2\,{}^{[12]}_{(\mu\nu)}z\,{}^{[21](\mu\nu)}z + 4\,{}^{[13+]}_{(\mu\nu)}z\,{}^{[13-](\mu\nu)}z \\
&+4\,{}^{[23+]}_{(\mu\nu)}z\,{}^{[23-](\mu\nu)}z + 8\,{}^{[13+]}_{(\mu\nu)}z\,{}^{[23-](\mu\nu)}z + 4\,{}^{[+-]}_{(\mu\nu)}z\,{}^{[+-](\mu\nu)}z \\
&{}^{(11)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(11)(\mu\nu)}z + {}^{(22)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(22)(\mu\nu)}z + 2\,{}^{(11)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(11)(\mu\nu)}\omega + 2\,{}^{(22)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(22)(\mu\nu)}\omega \\
&+4\,{}^{(11)}_{(\mu\nu)}\omega\,{}^{(11)(\mu\nu)}\omega + 4\,{}^{(22)}_{(\mu\nu)}\omega\,{}^{(22)(\mu\nu)}\omega + 4\,{}^{(11)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(12)(\mu\nu)}z + 4\,{}^{(12)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(22)(\mu\nu)}z \\
&+8\,{}^{(12)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(11)(\mu\nu)}\omega + 8\,{}^{(12)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(22)(\mu\nu)}\omega + 16\,{}^{(11)}_{(\mu\nu)}\omega\,{}^{(12)(\mu\nu)}\omega + 16\,{}^{(12)}_{(\mu\nu)}\omega\,{}^{(22)(\mu\nu)}\omega \\
&+2\,{}^{(11)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(22)(\mu\nu)}z + 4\big({}^{(11)}_{(\mu\nu)}z + {}^{(22)}_{(\mu\nu)}z\big)\,{}^{+-3(\mu\nu)}z + 4\,{}^{(12)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(12)(\mu\nu)}z + \\
&+8\,{}^{(12)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(12)(\mu\nu)}\omega + 16\,{}^{(12)}_{(\mu\nu)}\omega\,{}^{(12)(\mu\nu)}\omega + 4\,{}^{(13+)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(13-)(\mu\nu)}z + \\
&+4\,{}^{(23+)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(23-)(\mu\nu)}z + 8\,{}^{(13+)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(23-)(\mu\nu)}z + 8\,{}^{(12)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{+-3(\mu\nu)}z + \\
&+4\,{}^{+-3}_{(\mu\nu)}z\,{}^{+-4(\mu\nu)}z + 4i\,{}^{(13+)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(24-)(\mu\nu)}\omega - 4i\,{}^{(13-)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(24+)(\mu\nu)}\omega + \\
&+4i\,{}^{(23+)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(14-)(\mu\nu)}\omega - 4i\,{}^{(23-)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(14+)(\mu\nu)}\omega + 16i\,{}^{(13+)}_{(\mu\nu)}\omega\,{}^{(24-)(\mu\nu)}\omega + \\
&-16i\,{}^{(13-)}_{(\mu\nu)}\omega\,{}^{(24+)(\mu\nu)}\omega + 2i\,{}^{(14+)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(23-)(\mu\nu)}z - 2i\,{}^{(14-)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(23+)(\mu\nu)}z + \\
&-16i\,{}^{(14+)}_{(\mu\nu)}\omega\,{}^{(23-)(\mu\nu)}\omega + 16i\,{}^{(14-)}_{(\mu\nu)}\omega\,{}^{(23+)(\mu\nu)}\omega - 2i\,{}^{(13+)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(24-)(\mu\nu)}z + \\
&+2i\,{}^{(13-)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(24+)(\mu\nu)}z - 4i\,{}^{(14+)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(23-)(\mu\nu)}\omega + 4i\,{}^{(14-)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(23+)(\mu\nu)}\omega + \\
&-4i\,{}^{(24+)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(13-)(\mu\nu)}\omega + 4i\,{}^{(24-)}_{(\mu\nu)}z\,{}^{(13+)(\mu\nu)}\omega + \\
&-2\,{}^{[12]}_{\mu}z\,{}^{[12]}_{\nu}z - 2\,{}^{[12]}_{\mu}z\,{}^{[21]}_{\nu}z - 8\,{}^{[13+]}_{\mu}z\,{}^{[13-]}_{\nu}z - 8\,{}^{[23+]}_{\mu}z\,{}^{[23-]}_{\nu}z - 12\,{}^{[13+]}_{\mu}z\,{}^{[23-]}_{\nu}z - 8\,{}^{[+-]}_{\mu}z\,{}^{[+-]}_{\nu}z + \\
&+4\,{}^{[13-]}_{\mu}z\,{}^{[23+]}_{\nu}z + 4i\,{}^{[13-]}_{\mu}z\,{}^{[24+]}_{\nu}z - 4i\,{}^{[13+]}_{\mu}z\,{}^{[24-]}_{\nu}z - {}^{(11)}_{\mu}z\,{}^{(11)}_{\nu}z - {}^{(22)}_{\mu}z\,{}^{(22)}_{\nu}z + \\
&-2\,{}^{(11)}_{\mu}z\,{}^{(22)}_{\nu}z - 4\,{}^{(12)}_{\mu}z\,{}^{(12)}_{\nu}z - 2\,{}^{(11)}_{\mu}z\,{}^{(12)}_{\nu}z - 4\,{}^{(22)}_{\mu}z\,{}^{(12)}_{\nu}z - 4\big({}^{(11)}_{\mu}z + {}^{(22)}_{\mu}z\big)\,{}^{+-3}_{\nu}z + \\
&-4\,{}^{(11)}_{\mu}\omega\,{}^{(11)}_{\nu}\omega - 4\,{}^{(22)}_{\mu}\omega\,{}^{(22)}_{\nu}\omega - 16\,{}^{(11)}_{\mu}\omega\,{}^{(12)}_{\nu}\omega - 16\,{}^{(12)}_{\mu}\omega\,{}^{(12)}_{\nu}\omega - 16\,{}^{(22)}_{\mu}\omega\,{}^{(12)}_{\nu}\omega + \\
&-2\,{}^{(11)}_{\mu}z\,{}^{(11)}_{\nu}\omega - 4\,{}^{(22)}_{\mu}z\,{}^{(22)}_{\nu}\omega - 8\,{}^{(12)}_{\mu}z\,{}^{(11)}_{\nu}\omega - 8\,{}^{(12)}_{\mu}z\,{}^{(22)}_{\nu}\omega - 8\,{}^{(12)}_{\mu}z\,{}^{(12)}_{\nu}\omega + \\
&-4i\,{}^{(13+)}_{\mu}z\,{}^{(24-)}_{\nu}\omega + 4i\,{}^{(13-)}_{\mu}z\,{}^{(24+)}_{\nu}\omega - 4i\,{}^{(23+)}_{\mu}z\,{}^{(14-)}_{\nu}\omega + 4i\,{}^{(23-)}_{\mu}z\,{}^{(14+)}_{\nu}\omega +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-16i\,{}^{(13+)}_{\mu}{}^{\mu}\,{}^{(24-)}_{\nu}{}^{\nu} + 16i\,{}^{(13-)}_{\mu}{}^{\mu}\,{}^{(24+)}_{\nu}{}^{\nu} - 4i\,{}^{(14+)}_{\mu}{}^{\mu}\,{}^{(23-)}_{\nu}{}^{\nu} + 4i\,{}^{(14-)}_{\mu}{}^{\mu}\,{}^{(23+)}_{\nu}{}^{\nu} + \\
&+16i\,{}^{(14+)}_{\mu}{}^{\mu}\,{}^{(23-)}_{\nu}{}^{\nu} - 16i\,{}^{(14-)}_{\mu}{}^{\mu}\,{}^{(23+)}_{\nu}{}^{\nu} + 2i\,{}^{(13+)}_{\mu}{}^{\mu}\,{}^{(24-)}_{\nu}{}^{\nu} - 2i\,{}^{(13-)}_{\mu}{}^{\mu}\,{}^{(24+)}_{\nu}{}^{\nu} + \\
&+4i\,{}^{(14+)}_{\mu}{}^{\mu}\,{}^{(23-)}_{\nu}{}^{\nu} - 4i\,{}^{(14-)}_{\mu}{}^{\mu}\,{}^{(23+)}_{\nu}{}^{\nu} + 4i\,{}^{(24+)}_{\mu}{}^{\mu}\,{}^{(13-)}_{\nu}{}^{\nu} - 4i\,{}^{(24-)}_{\mu}{}^{\mu}\,{}^{(13+)}_{\nu}{}^{\nu} + \\
&+8\,{}^{(11)}_{\mu}{}^{\mu}\,{}^{(22)}_{\nu}{}^{\nu} + 32\,{}^{(13+)}_{\mu}{}^{\mu}\,{}^{(13-)}_{\nu}{}^{\nu} + 32\,{}^{(23+)}_{\mu}{}^{\mu}\,{}^{(23-)}_{\nu}{}^{\nu} + 32\,{}^{(13+)}_{\mu}{}^{\mu}\,{}^{(23-)}_{\nu}{}^{\nu} - 32\,{}^{(13-)}_{\mu}{}^{\mu}\,{}^{(23+)}_{\nu}{}^{\nu} + \\
&+4\,{}^{(11)}_{\mu}{}^{\mu}\,{}^{(22)}_{\nu}{}^{\nu} + 16\,{}^{(13+)}_{\mu}{}^{\mu}\,{}^{(13-)}_{\nu}{}^{\nu} + 16\,{}^{(23+)}_{\mu}{}^{\mu}\,{}^{(23-)}_{\nu}{}^{\nu} + 16\,{}^{(13+)}_{\mu}{}^{\mu}\,{}^{(13-)}_{\nu}{}^{\nu} - 16\,{}^{(13-)}_{\mu}{}^{\mu}\,{}^{(13+)}_{\nu}{}^{\nu} + \\
&+8\left\{ {}^{(11)}_{\mu}{}^{\mu} + {}^{(22)}_{\mu}{}^{\mu} + 2\,{}^{(11)}_{\omega}{}^{\mu} + 2\,{}^{(22)}_{\omega}{}^{\mu} + 2\,{}^{(12)}_{z}{}^{\mu} + 4\,{}^{(12)}_{\omega}{}^{\mu} \right\} {}^{+-3}_{\omega}{}^{\nu} + \\
&-8\,{}^{(12)}_{\mu}{}^{\mu}\,{}^{+-3}_{z}{}^{\nu} - 4\,{}^{+-3}_{z}{}^{\mu}\,{}^{+-4}_{z}{}^{\nu} - 4\,{}^{(+-)}_{z}{}^{\mu}\,{}^{(+-)}_{z}{}^{\nu} + 8\,{}^{+-3}_{z}{}^{\mu}\,{}^{+-4}_{\omega}{}^{\nu} + 16\,{}^{+-3}_{\omega}{}^{\mu}\,{}^{+-4}_{\omega}{}^{\nu}
\end{aligned}
\tag{4.59}
$$

4.4.9 Protótipo da Equação de Movimento

Vamos agora ao ponto principal deste capitulo, que é o de estudar uma possível contribuição à spintrônica obtendo uma equação de movimento similar à (4.14)

Dada o termo de Lagrangeana da forma

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_K &= a_1 \left((\Sigma^{\mu\nu})^{\rho}_{\sigma} \left(\Sigma^{\kappa\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho} + (\Sigma^{\mu\kappa})^{\rho}_{\sigma} \left(\Sigma^{\nu\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho} \right) F_{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} + \\
&+ a_2 \left((\Sigma^{\mu\nu})^{\rho}_{\sigma} \left(\Sigma^{\kappa\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho} + (\Sigma^{\mu\kappa})^{\rho}_{\sigma} \left(\Sigma^{\nu\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho} \right) F_{\mu\nu}\ {}^{[12]}_{z}{}_{[\kappa\lambda]}
\end{aligned}
\tag{4.60}
$$

Teremos uma equação de movimento da seguinte forma:

$$
\partial_\nu \left(a_1 F^{\nu\mu} + a_2\ {}^{[12]}_{z}{}^{[\nu\mu]} \right) = a_2 \gamma_{[12]} \left(F_{\alpha\beta} \left(\Sigma^{\alpha\beta}\right)^{\rho}_{\sigma} \left(\Sigma^{\lambda\mu}\right)^{\sigma}_{\rho} U_\lambda \right) + a_2 \gamma_{[12]} \left(F_{\alpha\beta} \left(\Sigma^{\alpha\mu}\right)^{\rho}_{\sigma} \left(\Sigma^{\beta\lambda}\right)^{\sigma}_{\rho} U_\lambda \right)
\tag{4.61}
$$

que fornece as equações vetoriais, usando a notação $\Sigma^{0i} = \vec{\Sigma}$ e $\Sigma^{ij} = -\epsilon^{ijk}\vec{S}_k$

$$
\vec{\nabla} \cdot \left(a_1 \vec{E}_A + a_2 \vec{e}^{\,[12]} \right) = \rho_{\text{spin}}
\tag{4.62}
$$

onde

$$\rho_{\text{spin}} = a_2\gamma_{[12]}\Bigg(\Big(\vec{\Sigma}\cdot\vec{E}\Big)\Big(\vec{\Sigma}\cdot\vec{U}\Big) + \Big(\vec{S}\cdot\vec{B}\Big)\Big(\vec{\Sigma}\cdot\vec{U}\Big) + \Big(\vec{U}\cdot\vec{B}\Big)\Big(\vec{\Sigma}\cdot\vec{S}\Big) \Bigg) \tag{4.63}$$

$$\vec{\nabla}\times\left(a_1\vec{B}_A + a_2\vec{b}^{[12]}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(a_1\vec{E} + \vec{e}^{\,[12]}\right) = \vec{J}_{\text{spin}} \tag{4.64}$$

onde

$$\vec{J}_{\text{spin}} = a_2\gamma_{[12]}\Bigg(\Big(\vec{\Sigma}\cdot\vec{E}\Big)\phi_U\vec{\Sigma} + \vec{\Sigma}\big(\vec{S}\times\vec{U}\big)\cdot\vec{S} + \Big(\vec{\Sigma}\cdot\vec{U}\Big)\Big(\vec{E}\times\vec{S}\Big) + \\ + \Big(\vec{S}\cdot\vec{B}\Big)\phi_U\vec{\Sigma} + \Big(\vec{\Sigma}\cdot\vec{S}\Big)\phi_U\vec{B}\Bigg) \tag{4.65}$$

Olhando esta equação de movimento, vemos que esta Lagrangeana fornece contribuições para a spintrônica através do acoplamento entre o spin e os campos, como a eq.(4.14) nos mostra. Vemos que apenas tomando um caso particular da Lagrangeana, já obtemos uma grande quantidade de acoplamentos entre o spin e os campos, fornecendo diversos tipos de interações necessárias para o estudo. O estudo da spintrônica de spin-1 será detalhado em um trabalho em desenvolvimento [87].

Resumindo, o Eletromagnetismo não se limita ao discurso da carga elétrica junto a campos EMs. Existe também o acoplamento do momento magnético com os campos eletromagnéticos. O surgimento do spin introduziu essa nova compreensão. Enquanto o Século XIX de Ampère e outros se preocupou com a interação entre cargas positivas e negativas, a interação de spin introduziu o termo $\mu\cdot\vec{B}$, com os esforços de Stern-Gerlach, Goudsmit-Uhlenbeck, Heinsenberg, Schrödinger, Pauli, Dirac.

Capítulo 5

Cenário Eletrofraco

5.1 $U_{em}(1)$ bósons vetoriais

O Eletromagnetismo de Quatro Campos consiste em uma versão $U_{em} \equiv U(1) \times SO(2)$. A sua generalidade é que as partículas mediadoras podem ser quaisquer. A física envolvida relata apenas a troca de cargas. Diferentes partículas podem estar representadas por $\{A_\mu, U_\mu, V_\mu^\pm\}$, tais como:

- A_μ= fóton de spin-1 e fóton de spin-0 (sem massa)

- U_μ = mediador de spin-1 (ρ^0, b_1^0, a_1^0) e mediador de spin-0 (ϕ^0, K^0, a_0^0)

- V_μ^+ = mediador de spin-1 (ρ^+, b_1^+, a_1^+) e mediador de spin-0 (ϕ^+, K^+, a_0^+)

- V_μ^- = mediador de spin-1 (ρ^-, b_1^-, a_1^-) e mediador de spin-0 (ϕ^-, K^-, a_0^-)

Observa-se que, devido à simetria das diferenças que os constrói, qualquer composição de partículas de spin-1 e partículas de spin-0 podem ser constituídos. O modelo é aberto

não apenas quanto à partículas com números quânticos diversos quanto as constantes de acoplamento entre os campos a tri- e quadri-interações serem diversas. Nada se reproduz igualmente. A diversidade predomina. Esse é o lema da simetria das diferenças acolhido.

A Eletrofraca se torna apenas um caso especial. As suas partículas entram como casos particulares da eq.(1.2) onde γ, Z^0, W^0 são partículas elementares e estão associadas à quebra de paridade. O interessante é comparar os termos da eq.(1.2) com os do Modelo Padrão.

5.1.1 Lagrangeano de Bósons Vetoriais do Modelo Padrão

Lagrangeano Cinético

$$\mathcal{L}^{\text{cinético}}_{\text{bosóns vetoriais}} = -\frac{1}{2}W^{+}_{\mu\nu}W^{\mu\nu\,-} - \frac{1}{4}Z^{2}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}F^{2}_{\mu\nu} \tag{5.1}$$

onde

$$W^{\pm}_{\mu\nu} = \partial_\mu W^{\pm}_{\nu} - \partial_\nu W^{\pm}_{\mu}, \quad Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{5.2}$$

Interação: 3-vértices

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\text{tri-vértice}}_{\text{bosóns vetoriais}} &= e\cot\theta\left(W^{+}_{\mu\nu}W^{-\nu} - W^{-}_{\mu\nu}W^{+\nu}\right)Z^{\mu} + ie\left(W^{+}_{\mu\nu}W^{-\nu} - W^{-}_{\mu\nu}W^{+\nu}\right)A^{\mu} + \\ &-ie\cot\theta\left(W^{+\mu}W^{-\nu}\right)Z_{\mu\nu} - ie\cot\theta W^{+\mu}W^{-\nu}F_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{5.3}$$

Interação: 4-vértices

$$\mathcal{L}^{\text{quadri-vértice}}_{\text{bosóns vetoriais}} = -\left(e\cot\theta\right)^2\left(W^+\cdot W^-\right)\left(Z\cdot Z\right) - e^2\left(W^+\cdot W^-\right)\left(A\cdot A\right) +$$
$$-2\left(e\cot\theta\right)^2\left(W^+\cdot W^-\right)\left(A\cdot Z\right) +$$
$$+\left(e\cot\theta\right)^2\left(W^+\cdot Z\right)\left(W^-\cdot Z\right) + e^2\left(W^+\cdot A\right)\left(W^-\cdot A\right) + \left(e\cot\theta\right)^2\left(W^+\cdot Z\right)\left(W^-\cdot A\right) +$$
$$+\left(e\cot\theta\right)^2\left(W^-\cdot Z\right)\left(W^+\cdot A\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{\sin\theta}\right)\left(W^+\cdot W^-\right)\left(W^+\cdot W^-\right) +$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{\sin\theta}\right)\left(W^+\cdot W^+\right)\left(W^-\cdot W^-\right) \tag{5.4}$$

Comparando a Lagrangeana (1.2) com a Lagrangeana podemos notar que:

- Setor cinético, eq. (1.4) possui a mesma constituição do setor cinético dado pela (5.1). Entretanto o setor longitudinal não é levado em conta pelo modelo padrão.

- Os termos de massa são similares, contudo o Modelo Padrão requer a presença de Higgs.

- Setor de interação tri-vértice. Escrevendo a eq. (1.11) da seguinte forma:

$$\mathcal{L}^A_3 = 4b_1\gamma_{[12]}F^{\mu\nu}A_\mu U_\nu - 4i\left(b_1\gamma_{[34]} + \beta_1\gamma_{(34)}\right)F^{\mu\nu}V^+_\mu V^-_\nu +$$
$$+4b_2\gamma_{[12]}U^{\mu\nu}A_\mu U_\nu - 4i\left(b_2\gamma_{[34]} + \beta_2\gamma_{(34)}\right)U^{\mu\nu}V^+_\mu V^-_\nu +$$
$$+4b_3\left(\gamma_{[13]} - i\gamma_{[14]}\right)V^{+\,\mu\nu}A_\mu V^-_\nu + 4b_3\left(\gamma_{[23]} - i\gamma_{[24]}\right)V^{+\,\mu\nu}U_\mu V^-_\nu +$$
$$+4b_3\left(\gamma_{[13]} + i\gamma_{[14]}\right)V^{+\,\mu\nu}A_\mu V^+_\nu + 4b_3\left(\gamma_{[23]} + i\gamma_{[24]}\right)V^{-\,\mu\nu}U_\mu V^+_\nu + \tag{5.5}$$

  podemos notar que além das interações já presentes na eq. (5.3), temos termos onde o campo A_μ está interagindo com o campo U_μ, como em $4b_1\gamma_{[12]}F^{\mu\nu}A_\mu U_\nu$. O modelo Padrão não contém o canal $\gamma - Z_0$

puro. Outra diferença está no fato que, enquanto o Modelo Padrão carrega somente duas constantes de acoplamento, a eq.(5.5) dispõe de oito constantes independentes e não necessariamente ligadas à carga elétrica.

- Setor de 4-vértice. Reescrevendo a eq.(1.14) da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_4 &= \left(\gamma_{(11)}^2 + 2\gamma_{(11)}\tau_{(11)} + 4\tau_{(11)}^2\right) A_\mu A^\mu A_\nu A^\nu + \\
&+ \left(2\gamma_{[12]}^2 + 2\gamma_{(12)}^2 + 4\gamma_{(11)}\tau_{(22)} + 8\tau_{(11)}\tau_{(22)}\right) A_\mu A^\mu U_\nu U^\nu + \\
&+ \left(4\gamma_{(11)}\gamma_{(12)} + 8\gamma_{(12)}\tau_{(11)} + 16\tau_{(11)}\tau_{(12)}\right) A_\mu A^\mu A_\nu U^\nu + \\
&+ \left(4\gamma_{(11)}\gamma_{(22)} + 8\gamma_{(12)}\tau_{(22)} + 16\tau_{(12)}\tau_{(22)}\right) U_\mu U^\mu U_\nu A^\nu + \\
&+ \left(2\gamma_{(22)}^2 + 4\tau_{(22)}^2\right) U_\mu U^\mu U_\nu U^\nu + \\
&+ \left(2\gamma_{[12]}\gamma_{[21]} + 3\gamma_{(11)}\gamma_{(22)} + 8\gamma_{(12)}\tau_{(12)} + 16\tau_{(12)}^2 + 2\gamma_{(12)}^2\right) A_\mu A_\nu U^\mu U^\nu + \\
&+ \left(-4\gamma_{[13]}^2 + 4\gamma_{(11)}\gamma_{(33)} + 4\gamma_{(13)}^2 + 48\gamma_{(13)}\tau_{(13)} + 32\tau_{(13)}^2\right) A_\mu A_\nu V^{+\mu} V^{-\nu} + \\
&+ \left(-4\gamma_{[23]}^2 + 4\gamma_{(22)}\gamma_{(33)} + 4\gamma_{(23)}^2 + 48\gamma_{(23)}\tau_{(23)} + 32\tau_{(23)}^2\right) U_\mu U_\nu V^{+\mu} V^{-\nu} + \\
&+ \left(4\gamma_{[13]}^2 + 4\gamma_{(13)}^2 + 8\gamma_{(11)}\tau_{(33)} + 16\tau_{(11)}\tau_{(33)}\right) A_\mu A^\mu V_\nu^+ V^{-\nu} + \\
&+ \left(4\gamma_{[23]}^2 + 4\gamma_{(23)}^2 + 8\gamma_{(22)}\tau_{(33)} + 16\tau_{(22)}\tau_{(33)}\right) U_\mu U^\mu V_\nu^+ V^{-\nu} + \\
&+ \Bigg(- 4\gamma_{[13]}\gamma_{[23]} - 4i\gamma_{[12]}\gamma_{[34]} - 4i\gamma_{[13]}\gamma_{[24]} + 4\gamma_{(12)}\gamma_{(33)} + 4\gamma_{(13)}\gamma_{(23)} + \\
&+ 32\tau_{(13)}\tau_{(23)} - 4i\gamma_{(13)}\tau_{(24)} + 4i\gamma_{(23)}\tau_{(14)} + 2i\gamma_{(13)}\gamma_{(24)} - 16i\tau_{(13)}\tau_{(24)} - 16i\tau_{(14)}\tau_{(23)} + \\
&- 2i\gamma_{(14)}\gamma_{(23)} + 4i\gamma_{(14)}\tau_{(23)} - 4i\gamma_{(24)}\tau_{(13)} \Bigg) A_\mu U_\nu V^{+\mu} V^{-\nu} + \\
&+ \Bigg(- 4\gamma_{[13]}\gamma_{[23]} + 4i\gamma_{[12]}\gamma_{[34]} + 4i\gamma_{[13]}\gamma_{[24]} + 4\gamma_{(12)}\gamma_{(33)} + 4\gamma_{(13)}\gamma_{(23)} + \\
&+ 32\tau_{(13)}\tau_{(23)} + 4i\gamma_{(13)}\tau_{(24)} - 4i\gamma_{(23)}\tau_{(14)} - 2i\gamma_{(13)}\gamma_{(24)} + 16i\tau_{(13)}\tau_{(24)} + 16i\tau_{(14)}\tau_{(23)} + \\
&+ 2i\gamma_{(14)}\gamma_{(23)} - 4i\gamma_{(14)}\tau_{(23)} + 4i\gamma_{(24)}\tau_{(13)} \Bigg) A_\mu U_\nu V^{-\mu} V^{+\nu} + \\
&+ \Big(8\gamma_{[13]}\gamma_{[23]} + 8\gamma_{(13)}\gamma_{(23)} + 16\gamma_{(12)}\tau_{(33)} + 32\tau_{(12)}\tau_{(33)}\Big) A_\mu U^\mu V_\nu^+ V^{-\nu} + \\
&+ \left(-2\gamma_{[34]}^2 + 2\gamma_{(33)}\gamma_{(44)} + 8\gamma_{(34)}\tau_{(34)} + 16\tau_{(34)}^2\right) V_\mu^+ V_\nu^- V^{+\mu} V^{-\nu} + \\
&+ \Big(2\gamma_{[34]}^2 + 2\gamma_{(33)}\gamma_{(44)} + 8\gamma_{(33)}\tau_{(44)} + 16\tau_{(33)}\tau_{(44)} + \\
&+ 4\gamma_{(34)} + 8\gamma_{(34)}\tau_{(34)} + 16\tau_{(34)}^2\Big) V_\mu^+ V^{-\mu} V_\nu^+ V^{-\nu}
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

podemos notar, comparando com a eq.(5.4), a presença dos mesmos

acoplamentos de campos, com constantes de acoplamentos livres, sem a presença da carga elétrica; além disso, temos acoplamentos entre os campo A_μ sem a presença de campos carregados e a presença de acoplamentos do campos A_μ com a campo U_μ.

Em resumo, diríamos que o Modelo Padrão não nos leva à fotônica. A definição de uma região de predomínio dos fótons através de seu momento, energia, relações de dispersão.

5.2 $\mathbf{U_{em}(1)}$ leptônico

O desafio recebido no século 20 foi o de obter uma formulação única para o eletromagnetismo de Maxwell com a interação fraca. A questão está em unir os setores left e right, assim como ir além da QED e estabelecer a interação do fóton com o Z^0 e $W^\pm$

A proposta aqui está em construir uma teoria de gauge a correlacionar o conjunto de campos $\{e_L; \nu_L; e_R; A_\mu, Z_\mu, W_\mu^\pm\}$. Partindo da simetria de gauge abeliana, integrar os setores left e right junto aos quatro bósons de gauge responsáveis pelo transporte da carga elétrica. Tomando as transformações de gauge mais simples

$$
\begin{aligned}
e_L^{'} &= e^{i\alpha(x)} e_L, \quad e_R^{'} = e^{i\alpha(x)} e_R \\
\nu_L^{'} &= \nu_L
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
A_\mu^{'} &= A_\mu + \partial_\mu \alpha \\
Z_\mu^{0'} &= Z_\mu^0 \\
W_\mu^{'\pm} &= e^{iq\alpha(x)} W_\mu^\pm
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

podemos gerar a seguinte Lagrangeana eletrofraca.

$$
\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{léptons}} + \mathcal{L}_{\text{bósons}} \tag{5.8}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{léptons}} &= \bar{e}_R\, i\gamma^\mu \partial_\mu e_R + \bar{e}_R\, \gamma^\mu e_R\, (eA_\mu + gZ_\mu) + \\
&+ \bar{e}_L\, i\gamma^\mu \partial_\mu e_L + \bar{e}_L\, \gamma^\mu e_L\, (eA_\mu + gZ_\mu) + \\
&+ \bar{\nu}_L\, i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_L + g\, \bar{\nu}_L\, \gamma^\mu \nu_L\, Z_\mu + \\
&+ g_1\, \bar{\nu}_L\, \gamma^\mu e_L W_\mu^+ + g_2 \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L W_\mu^- - m\, (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L)
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

$\mathcal{L}_{\text{bósons}}$ é a expressão dada pela eq.(1.1), onde o fóton e Z^0 são dadas por combinações lineares de A_μ e U_μ, de tal modo o fóton e o Z_0 sejam qualificados através das simetrias decorrentes da eq.(4.1). Quanto ao $W_\mu^\pm$, toma-se $k_3 = k_4 = 0$. A novidade em relação ao Modelo Padrão é a interação direta (vértice na ação) entre o fóton e o Z_0 através de 3- e 4-vértices, possibilitando a investigação sobre estes vértices anômalos[107]. Uma contribuição à Teoria Eletrofraca será detalhada em um trabalho ainda em desenvolvimento [108].

Capítulo 6

Conclusões Críticas e Perspectivas

6.1 Puxando o rabo do gato

A evolução do Eletromagnetismo tem sido fator decisivo ao desenvolvimento da civilização. Procuraremos a analisar dentro do escopo do desenvolvimento histórico. Embora desde os gregos fosse constatada a presença de âmbar e ímã, o eletromagnetismo só foi verdadeiramente revelado através do estudo da carga elétrica. O Século XVII construiu máquinas geradoras de eletricidade, o Século XVIII estabeleceu a lei de Coulomb e a pilha fornecedora de corrente elétrica. O Século XIX descobriu que a carga gerencia campos elétricos e magnéticos. As equações de Maxwell sistematizaram o fluxo eletromagnético. O eletromagnetismo se tornou um fluído a escoar campos eletromagneticos obedecendo a lei de conservação da carga elétrica sob a invariância da luz. Ao próximo desenvolvimento da civilização, um novo EM além de Maxwell é esperado.

– Qual?

A evolução do Eletromagnetismo deve seguir a ciência da carga elétrica. Assim como a massa se apresenta em diferentes facetas, tais como, inércia, energia, atração gravitacional, curvatura do espaço-tempo, a carga elétrica também desenvolve fases de expressão. Selecionamos seis aspectos. A carga elétrica medida pela balança de Cavendish, conduzida por diferentes spins e sabores, a carga de Gellmann-Nishijima dependente de números

quânticos internos, a fracionária dos quarks, a dependente do momento (running coupling constant), e finalmente, a respeito do transporte de carga.

O modo mais natural de estabelecer qualquer compreensão é o de seguir o fluxo de sua história. No caso, a carga elétrica construiu seu transporte através da conservação, interação, condução e transmissão. Essas quatro manifestações determinam a teoria geral da carga elétrica. A tese se volta à transmissão. Desta percepção sistematiza uma nova compreensão do eletromagnetismo. Enquanto o EM atual se resume ao fóton e a carga, a tese concebe o EM formando um sistema. Estuda o EM como um conjunto de três cargas $\{+, 0, -\}$ associadas através de quatro campos.

Escreve-se a Maxwell:

– Os campos EM são gerados por si próprios!

– Sem carga elétrica, como? — ele questiona

A Dissertação vai ter de responder à Maxwell em seu eletromagnetismo baseado na carga elétrica. A compreensão da QED do fóton estar sempre acoplado a partículas carregadas. Não permitem o fóton interagindo com partículas neutras. Também, os 45 modelos além de Maxwell que a literatura apresenta não sinalizam a presença de um eletromagnetismo neutro. Essa é a perspectiva a Dissertação apresentar e convencer. Mostrar que Maxwell representa apenas um regime do eletromagnetismo.

O método para um novo entendimento do Eletromagnetismo está em seguir o fluxo da carga elétrica. Baseado na primeira das suas fisicidades, leis de conservação da carga elétrica e do tensor energia-momento, Maxwell sistematizou o eletromagnetismo do campo eletromagnético. Os estudos anteriores de Volta, Biot-Savart, Ampère, Faraday correspondem a segunda fisicidade, a interação da carga elétrica e a existência de cargas positivas e negativas. Essas duas etapas permitiram com que a condução da carga elétrica e da luz ganhassem leis físicas. O campo eletromagnético tornava-se a variável das equações de Maxwell e a luz sua consequência.

A seguir o Século XX desenvolveu a etapa da condução através do eletromagnetismo microscópico. A descoberta do elétron por Thompson, a medição da carga elétrica por Millikan, a constante de estrutura fina parametrizando o átomo de Bohr estruturarem uma primeira fase da construção microscópica da carga elétrica. Depois, o desenvolvimento dos aceleradores de partículas a partir de 1930 levou à observação da carga elétrica sendo conduzida por partículas com spin $\frac{1}{2}$, spin 0, spin 1. Novas equações surgiram em termos da carga elétrica. O Eletromagnetismo se ampliava em termos de spins e sabores, mostrando novas formas de condução da carga elétrica. Em 1928, Dirac introduziu o eletromagnetismo de spin $\frac{1}{2}$, em 1951, Salam trabalhou o eletromagnetismo de spin 0; em 1963, Lee-Yang com o eletromagnetismo para matéria de spin-1. A terceira fisicidade se alargava, mas igualmente ao Século XIX, a dependência do eletromagnetismo continuava restrita à carga elétrica.

– Continuo certo! -ouve-se Maxwell.

O choque de uma física além da carga elétrica veio em 1933 com a descoberta da interação fraca por Fermi. Propõe, não apenas uma nova interação como a existência de uma nova constante universal, G_F. Mais tarde, em 1967, procurou-se entender a interação eletromagnética e a interação fraca sob uma formulação única a partir do Modelo Padrão. A carga elétrica da balança de Cavendish seria modulada pelo ângulo de Weinberg. Então, o questionamento dessa Dissertação é: 'não existiria um outro caminho a juntar essas duas interações através de um eletromagnetismo escalado, onde a carga elétrica não seja mais a única constante de acoplamento associada ao fóton, embora seu princípio de conservação continue preservado?' A tese intui que o G_F de Fermi seja apenas uma nova extensão de eletromagnetismo e não uma nova interação.

A discussão da carga elétrica como a única constante universal do eletromagnetismo guarda interrogações históricas. A primeira vem do Século XIX quando ondas eletromagnéticas se propagam no vácuo sem a pertinência da carga elétrica. A segunda está na contradição entre a invariância da luz e a geração de campos eletromagnéticos a partir

da carga elétrica, trazendo a questão: 'Luz ou carga elétrica, qual vem primeiro?'. O paradoxo luz-carga elétrica questiona a nossa atual visão de eletromagnetismo. A luz é um sargento seguindo ordens de uma carga oscilante ou um general que através da invariância da luz estabelece novas relações de espaço-tempo e números quânticos oriundos do Grupo de Lorentz?. A terceira é a possibilidade do surgimento de um eletromagnetismo explicitamente neutro dado por $gA_\mu, g\vec{A}\cdot\vec{E}, g\vec{A}\times\vec{B}$, spintrônica.

Desta maneira, a Dissertaçãoapresenta o esforço de entender essa passagem do eletromagnetismo da carga elétrica à luz. Seguindo as aulas do Professor Global aprendemos que da simetria deve-se do rabo mostrar o gato. Assim, a partir das simetrias que constituem a equação de Maxwell, a invariância da luz e conservação da carga elétrica, devemos procurar por novos setores eletromagnéticos. Entende-se por eletromagnetismo qualquer modelo definido a partir dessas duas simetrias. Atualmente existem 45 modelos além de Maxwell [52]. A nossa proposta se resume ao transporte da carga elétrica. Neste argumento resolvemos puxar o rabo do gato.

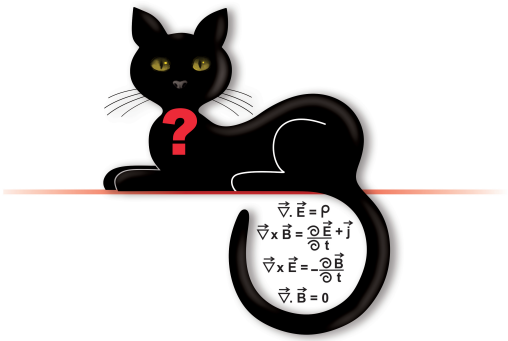


Figura 6.1: Maxwell é apenas um pedaço de um EM maior?

A investigação esquecida por tantos físicos depois de Oscar Klein é a física da troca de cargas. Nela estar a origem de puxar o rabo do gato. Enquanto Maxwell se concentrou na distribuição da carga elétrica, a QED na sua interação, o Eletromagnetismo de Quatro Campos se preocupa em seu transporte. A descoberta de partículas elementares produzindo reações físicas trazendo a transmutação de matéria propícia à existência de três

cargas intercambiando entre si. Apoiado no conceito de criação e aniquilação da teoria de campo e suportado experimentalmente, o Eletromagnetismo de Quatro Campos é um assunto plausível a ser tomado. Ao afirmar que, tanto a teoria como o experimento, não impedem a respeito da circulação da carga elétrica a partir do conjunto de três cargas $\{+, 0, -\}$ associado a quatro campos $\{A_\mu, U_\mu, V_\mu^\pm\}$ quaisquer.

– E qual a cabeça do gato?

Respeitando as simetrias de Maxwell, considerando a troca de cargas, famílias de campos inseridas na mesma representação no Grupo de Lorentz [109] e simetria das diferenças [53] um novo corpo eletromagnético começa a aparecer. Existe um gato no marcador de corrente a ser detectado.

6.2 Eletromagnetismo da Luz

O fenômeno físico do transporte de cargas através de partículas elementares é o tema a ser investigado. Nesta busca por um novo entendimento, preservando o princípio do eletromagnetismo ser uma manifestação da carga elétrica, estuda-se a quarta fisicidade da teoria geral da carga elétrica: a troca entre três cargas interlaçadas $\{+, 0, -\}$ através de quatro campos.

Então, puxando o rabo do gato, o eletromagnetismo deixa ser o fóton e a carga elétrica. Uma rede eletromagnética de campos se torna a responsável pela física da carga elétrica. Uma nova fisicidade da carga elétrica baseada nas duas simetrias de Maxwell é possível. Dela emerge em eletromagnetismo da luz.

O Eletromagnetismo de Quatro Campos estuda esse intercâmbio de três cargas através de quatro campos chamados inicialmente de fóton, fóton massivo e fótons carregados. Três características iniciais são providas [8]. Primeiramente, uma origem aos vetores de polarização e magnetização a partir da simetria da eq.(1.1); a seguir, um eletromagnetismo não-linear onde suas cargas são os próprios campos; terceiro, um além de Maxwell para a transmissão do campo eletromagnético. A transmissão eletromagnética é diversa de Maxwell: ondas não-lineares, vetores de Poynting não lineares e novas relações de dispersão são desenvolvidas [70]. Descobre-se quatros novos setores eletromagnéticos: regimes sistêmico não-maxwelliano, fotônico, spintrônico, eletrofraco. Novos regimes eletromagnéticos trazendo novas escalas de alcance e intensidade.

O gato começa a tomar forma. A simetria sistêmica da eq.(1.1) constrói um corpo eletromagnético. Resulta um eletromagnetismo a promover setores de spin-1 e spin-0 contendo 4 quanta cada. A dizer que, ao lado do fóton usual deva existir um fóton de spin zero. Esse corpo de equações de quanta se desenvolve classicamente num sistema de 17 equações. São 4+4 equações de movimento correspondentes aos quanta de spin-1 e spin-0, 4 equações de Noether, 4 identidades de Bianchi antissimétricas, 1 identidade de Bianchi simétrica. Esse corpo produz uma dinâmica de conjunto trazendo noções de

network, diretriz e circunstância. Há uma nova constituição eletromagnética trazendo campos eletromagnéticos individuais e coletivos, assim como, uma nova interpretação ao fóton.

Surge o eletromagnetismo da luz. O fóton, devido à sua singularidade de conduzir a invariância da luz, é interpretado como o elemento diretivo deste corpo de equações. Para isto, a equação da simetria retratada pelo teorema de Noether é incorporada a sua equação de Euler-Lagrange. Cria-se a equação do fóton diretivo. Uma equação a identificar o fóton como o general do eletromagnetismo. A luz é galgada ao gerenciamento da ciência da carga elétrica.

O eletromagnetismo da luz vai tomando o lugar percursor da carga elétrica. A lei de Coulomb, o fóton está associado exclusivamente a partículas carregadas, vão cedendo a modulação da carga elétrica pela interação fraca, a interação neutra do campo magnético com o spin. E assim, chegamos a um eletromagnetismo da luz onde a carga zero se torna eletromagneticamente ativa. Uma fronteira a ser questionada.

– E minha carga elétrica? – pergunta Maxwell

– A carga age em conjunto $\{+, 0, -\}$ – responde o Eletromagnetismo de Quatro Campos

O Eletromagnetismo de Quatro Campos e seu fóton diretivo rompem a barreira e apresenta propriedades físicas além do comportamento da carga elétrica de Maxwell, QED e Modelo Padrão. A sua não-linearidade faz com que os campos se tornem fontes dos próprios campos, tal como o surgimento de uma carga fotônica dependente dos campos. A carga elétrica não é mais a geradora de seus campos, além de, conviver com a presença de outras constantes de acoplamento. Portanto, existe um novo comportamento eletromagnético além da constante universal da carga elétrica. Embora a lei de conservação da carga elétrica seja preservada, encontra-se a existência de um eletromagnetismo com interações não-dependentes explicitamente sua presença. Primeiramente, pela existência

da carga zero, a seguir, por sua correspondente força de Lorentz não ser mais dependente estritamente da carga elétrica; terceiro, pela presença de regimes além de Maxwell a modular a carga elétrica.

Quatro novos setores são construídos por essa teoria geral da carga elétrica. Maxwell olhou a carga elétrica sob o ângulo da lei da conservação, a Dissertação incorpora conservação, interação, condução e se desenvolve a respeito da troca de carga. O primeiro setor denomina-se regime não-Maxwelliano. Da visão reducionista de Maxwell a carga elétrica passa a uma visão anti-reducionista. Um eletromagnetismo sistêmico devido à circulação da carga elétrica $\{+, 0, -\}$. Uma nova fase física se abre. Da condução estrita via o fóton de Maxwell à transmissão de Quatro Campos uma nova dinâmica sistêmica não-linear se sucede. Conduzidos por um fóton diretivo esse conjunto de campos desenvolve uma nova eletrodinâmica não-linear. A propagação eletromagnética se dá através de ondas eletromagnéticas não-lineares, vetores de Poynting granulares e coletivos, relações de dispersão diversas a Maxwell [94].

Essa fase de eletromagnetismo sistêmico não é associada estritamente às partículas elementares fundamentais. A sua física representa a todos os processos que circulam a carga elétrica. Considera situações onde estão incluídas as partículas compostas por quarks através do eightfoldway de GellMann. Propicia a troca de cargas com constante de acoplamentos ajustáveis associadas partículas de spin-1 e spin-0. Por exemplo, encaixar os famosos píons de César Lattes no seguinte modelo: $A_\mu \equiv (\gamma, \gamma_0)$, $U_\mu \equiv (\rho, \pi_0)$, $V_\mu^+ \equiv (\rho^+, \pi^+)$, $V_\mu^- \equiv (\rho^-, \pi^-)$. Sendo assim, tanto a interação forte desenvolvida por Yukawa em 1935 como a Eletrofraca por Glashow, Salam, Weinberg em 1967, são vistas como casos particulares da eq.(1.2).

O segundo setor é a fotônica. A Dissertação busca dar luz à luz. Propor a existência de um fóton primordial. A presença do campo eletromagnético do fóton sendo gerado por sua própria carga fotônica, de seu campo A_μ aparecendo explicitamente nas equações, auto-interação, interação com outros campos e com $\vec{E} - \vec{B}$. Essas propriedades tornam

possíveis novas análises experimentais e inovações baseadas no fóton. Filosoficamente, introduz a noção de Ubiquous Lux.

A spintrônica introduz um outro tipo de eletromagnetismo neutro associado ao momento magnético da partícula. Em vez da carga elétrica os seus campos eletromagnéticos estão associados ao spin. Em 1922 Stern e Gerlach descobriram o momento angular do átomo, levando à teorização do spin do elétron por Gouldsmit e Uhlenbeck em 1925 [92], Pauli em 1928 e finalmente, Dirac entendeu em 1928 o spin a partir da simetria da luz. Em comemoração aos 90 anos da Equação de Dirac, a proposta aqui é entender a respeito do spin-1. Observar o acoplamento do spin-1 com o campo eletromagnético [93].

O quarto setor a ser considerado é a eletrofraca. O fato da quebra espontânea da simetria transformar a simetria não-Abeliana original em Abeliana, $SU_L(2) \times U_Y(1) \xrightarrow{\text{SSB}} U_{em}(1)$, nos leva a indagar 'porque não iniciar diretamente em um modelo abeliano não-linear?'. Sendo assim, comentamos brevemente no Capítulo V a respeito de uma eletrofraca de quatro campos. A notar sua diferenciação com o Modelo Padrão a respeito da presença de massa sem Higgs, de fóton ubíquo interagindo com o neutrino e da extensão ao setor $\gamma - Z_0$ [88]-[89].

Uma nova perspectiva eletromagnética se abre. Um gato escondido vem à tona. Selecionamos oito tópicos experimentais para revelar esse gato. Seriam a respeito da interação $\gamma - \gamma$, polarização e magnetização, interação do tipo $g\vec{A} \cdot \vec{E}$, o canal $\gamma - Z_0$, o quanta de spin-1 vir acompanhado pela de spin-0 (o fóton ter um parceiro escalar), condução sistêmica da carga elétrica, efeitos do spin-1 na spintrônica e velocidades supraluminais.

A transição a esse eletromagnetismo da luz acontecerá na medição da interação $\gamma - \gamma$. O espalhamento fóton-fóton do LHC [1], o Colisor de Fótons da Alemanha e o SULF de Shanghai (Superintense Ultrafast Laser Facility) [90], projetam medidas a respeito da autointeração fotônica. Por exemplo, em 2017 o SULF chegou a uma potência de 5.3 peta-watts, espera-se, em 2023, fazer experimentos com o laser na faixa de 100 peta-watts. Outro experimento a envolver diretamente o fóton é o PVLS de Padova, na Itália [91].

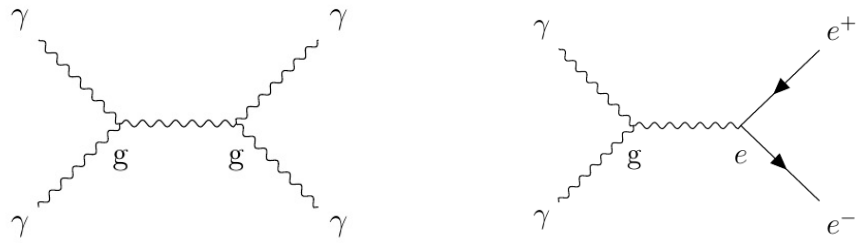
A percepção do eletromagnetismo da luz é a discussão dessa Dissertação. Historicamente, o fóton veio sendo revelado através das equações de Maxwell (1864), do efeito fotoelétrico (1905), da relação onda-partícula (1915), do espalhamento Compton (1925), do fóton não-linear de Vavilov, Halpern, Euler-Heisenberg e Born-Infeld (1928-34), da QED (1949), do Modelo Padrão (1967). A Dissertação sustenta que ainda existem duas propriedades fundamentais a serem conhecidas, o fóton a respeito da sua auto-interação e constante de acoplamento diversa da carga elétrica. Promovem a possibilidade do fóton agir como um conector universal. A possibilidade de um dirigismo fotônico a entrelaçar-se com as demais partículas.

Neste cenário, levanta-se a proposta de um eletromagnetismo além da carga elétrica. Historicamente, tudo começou nos estudos da corrente elétrica e campos eletromagnéticos. A seguir, com a introdução do spin, surge um acoplamento além da carga elétrica através do momento magnético anômalo $\mu \cdot \vec{B}$. A chegada do modelo padrão introduziu a modulação da carga elétrica $e = g \sin\theta$. O passo seguinte que essa Dissertação procura debater esta numa participação do campo eletromagnético sem a presença direta da carga elétrica.

A antiga proposta Ubiquous Lux renasce. A luz ganha uma origem além da carga elétrica para interagir consigo própria e outros campos. A de se tornar uma conectora universal, isto é, compor o Universo a partir da luz. O novo fóton virá da medição dos espalhamentos $\gamma\gamma \longleftrightarrow \gamma\gamma$ e $\gamma\gamma \longleftrightarrow f\bar{f}$. Recapitulando, a eletrodinâmica foi constituída sobre dois princípios, invariância da luz e conservação da carga elétrica. Dois paradigmas a provocarem o paradoxo: carga ou luz, onde está a origem? A Dissertação decifra estar na luz. Para isto, seguiu a história do fluxo da carga elétrica (conservação, interação, condução, transmissão) e, enquanto os três primeiros tópicos baseavam-se na carga, o último desenvolve a luz associada a uma constante de acoplamento diversa da carga, gA_μ.

O delírio da Dissertação está em propor a existência de um Big Bang Fotônico a partir de um fóton que gera a si próprio e as demais partículas. Do fóton de Maxwell, carregador do eletromagnetismo, o fóton se torna um criador, permitindo reações com

mudanças de frequência e criação de matéria. Um fóton gerador de radiação e matéria sem estar necessariamente associado à carga elétrica. Uma perspectiva a introduzir novas assertivas experimentais, como a possibilidade da produção Breit-Wheeler $\gamma\gamma \longrightarrow e^+e^-$ a tree-level e sem depender unicamente da carga elétrica.



(a) Luz gerando luz (b) Luz gerando matéria

Figura 6.2: Gráficos básicos do Big Bang Fotônico

O Universo a partir de um Big Bang Fotônico é a percepção que essa Dissertação instiga. Chegamos ao postulado Ubiquous lux. Uma origem a redefinir os fenômenos físicos a partir da luz. O Século XX foi o do elétron, diversas inovações aconteceram a partir das propriedades do elétron. A civilização transita para a ciência-inovação fotônica. O Século XXI será o do fóton. Estamos diante de uma revolução fotônica. A partir do fóton estudar o efeito Hall [95], diphoton events [96], estados ligados pelo fóton [97], forças magnéticas fotônicas [98], fluidos quânticos de luz [99], laser [100], espalhamento Delbruck [101], níveis de Landau para prótons [102], interação fóton-áxion [103], propagação do fóton sob campo magnético intenso [104], espalhamento não-linear [105], topologia [106], momento magnético do fóton e neutrino [62], nanofotônica [63].

Neste contexto, a Dissertação se conclui, ressaltando a respeito do momento histórico da luz. Após 150 anos, Maxwell e a QED não mais satisfazem. Atualmente existem 45 modelos procurando novas formas de expressar o eletromagnetismo. Neste cenário, o Eletromagnetismo de Quatro Campos é um modelo baseado num conceito inexplorado (troca de cargas), contém consistência interna (localidade, hamiltoniana positiva, renormalizabilidade, unitariedade), provoca fenomenologia (4 regimes eletromagnéticos), experimentos (LHC, Colisor de Fótons, PVLA, Laser de Shanghai) e inovação (telecomunicação fotônica). Uma direção oriunda do faraó Akhenaton a ser investigada cientificamente neste século 21.

Figura 6.3: Egito Antigo fundou o monoteísmo a partir da luz

Estranhamente, muito antes de Maxwell, Michelson-Morley e Einstein, o Egito Antigo prescrevia em Aton o absoluto da luz.

Apêndice A

Lagrangiana N-Campos

O princípio da totalidade, o de descrever as leis físicas a partir da noção de conjunto nos leva a compor uma Lagrangiana contendo N campos vetoriais sob a seguinte transformação de gauge

$$D_\mu \longrightarrow D_\mu^{'} + \partial_\mu \alpha, \quad X_\mu^i \longrightarrow X_\mu^{i'} = X_\mu^i \tag{A.1}$$

Das transformações acima, obtém-se na base construtora a seguinte $L(D, X_i)$ invariante de gauge

$$L(D, X_i) = Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \eta Z_{\mu\nu} \tilde{Z}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_{ij}^2 X_\mu^i X^{\mu j} + \frac{1}{2\alpha} \left[\partial_\mu \left(D^\mu + \sigma_i X^{i\mu} \right) \right]^2 \tag{A.2}$$

onde

$$Z_{\mu\nu} = dD_{\mu\nu} + \alpha_i X_{\mu\nu}^i + \beta_i \Sigma_{\mu\nu}^i + \rho_i g_{\mu\nu} \Sigma_\alpha^{i\alpha} + \gamma_{ij} X_\mu^i X_\nu^j \tag{A.3}$$

com

$$D_{\mu\nu} = \partial_\mu D_\nu - \partial_\nu D_\mu, \quad X_{\mu\nu}^i = \partial_\mu X_\nu^i - \partial_\nu X_\mu^i, \quad \Sigma_{\mu\nu}^i = \partial_\mu X_\nu^i + \partial_\nu X_\mu^i \tag{A.4}$$

Contudo, existe ainda uma outra base de campos $G_{\mu I}$, chamada base de campos físicos. Os campos físicos são aqueles que diagonalizam as equações de movimento. Em termos destes campos que as correspondentes entidades mensuráveis do modelo devem ser definidas, tais como os correspondentes campos elétricos e magnéticos. Introduzindo a matriz Ω, a base dos campos físicos pode ser vista como uma rotação das anteriores:

$$\{D_\mu, X_\mu^i\} \xrightarrow{\Omega} \{G_{\mu I}\} \tag{A.5}$$

ou seja,

$$D_\mu = \Omega_{1I} G^I_\mu, \quad X_{\mu I} G^I_\mu \tag{A.6}$$

Portanto, as transformações de gauge dos campos $G_{\mu I}$ são dadas por:

$$G_{\mu I'} = G_{\mu I} + \left(\Omega^{-1}\right)_{I1} \partial_\mu \alpha \tag{A.7}$$

com a condição de invertibilidade,

$$\Omega_{IK} \left(\Omega^{-1}\right)^K_J = \delta_{IJ} \tag{A.8}$$

Observe que a transformação de cada campo físico é especificada por um peso $(\Omega^{-}1)_{I1}$.

A correspondente Lagrangiana física é dada por:

$$L(D, X_i) = Z_{[\mu\nu]} Z^{[\mu\nu]} + \eta Z_{[\mu\nu]} \tilde{Z}^{[\mu\nu]} + Z_{(\mu\nu)} Z^{(\mu\nu)} + \frac{1}{2} m^2_{ij} G^i_\mu G^{\mu j} + \frac{1}{2\alpha} \Big(\sigma_I \partial_\mu \mu G^{\mu I}\Big)^2 \tag{A.9}$$

onde

$$Z_{[\mu\nu]} = b_I G^I_{\mu\nu} + z_{[\mu\nu]}, \quad Z_{(\mu\nu)} = \beta_i S^I_{\mu\nu} + z_{(\mu\nu)} + \rho_i g_{\mu\nu} S^{\alpha I}_\alpha + g_{\mu\nu} \omega^\alpha_\alpha \tag{A.10}$$

com

$$\begin{aligned} &G^I_{\mu\nu} = \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu \quad \mathcal{G}^I_{\mu\nu} = \partial_\mu G^I_\nu - \partial_\nu G^I_\mu \\ &z_{[\mu\nu]} = \gamma_{[IJ]} G^I_\mu G^J_\nu \quad z_{(\mu\nu)} = \gamma_{(IJ)} G^I_\mu G^J_\nu \quad w_{(\mu\nu)} = \tau_{[IJ]} G^I_\mu G^J_\nu \end{aligned} \tag{A.11}$$

sendo parametrizada pelos coeficientes livres:

$$\begin{aligned} &b_I = d\Omega_{1I} + \alpha_i \Omega^i_I, \quad \beta_I = \beta_i \Omega_{iI}, \quad \rho_i = \rho_i \Omega^i_I, \\ &\gamma_{[IJ]} = \gamma_{[ij]} \Omega^i_I \Omega^i_J, \quad \gamma_{(IJ)} = \gamma_{(ij)} \Omega^i_I \Omega^i_J, \quad \tau_{(IJ)} = \tau_{ij} \Omega^i_I \Omega^i_J \end{aligned} \tag{A.12}$$

Diferentemente da QED, o termo $Z_{[\mu\nu]} \tilde{Z}^{[\mu\nu]}$ não é exatamente uma derivada total. Resulta,

$$Z_{\mu\nu} \tilde{Z}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Big\{ 2\alpha_I \Big[\partial_\mu \left(G^I_\nu Z_{[\rho\sigma]} \right) - G^I_\nu \partial_\mu z_{\rho\sigma} \Big] + z_{[\mu\nu]} Z_{[\rho\sigma]} \Big\} \tag{A.13}$$

As correspondentes N-equações de movimento para os campos $G_{\mu I}$ são:

$$b_I \partial_\mu Z^{[\mu\nu]} + \frac{1}{2} m_I^2 G_I^\nu = J_I^\nu(G) \tag{A.14}$$

onde

$$\begin{aligned} J_I^\nu(G) &= \gamma_{[IJ]} G_\mu^J Z^{[\mu\nu]} + \gamma_{(IJ)} G_\mu^J Z^{(\mu\nu)} + \tau_{(IJ)} G_\nu^J Z_\nu^\nu - \beta_i \partial_\mu Z^{(\mu\nu)} \\ &- \rho_i \partial_\nu Z_{(\mu}{}^{\mu)} + \eta b_I \epsilon^{\nu\mu\rho\sigma} \partial_\mu z_{[\rho\sigma]} + \eta \gamma_{[IJ]} \epsilon^{[\nu\mu\rho\sigma]} G_\mu^J Z_{[\rho\sigma]} \end{aligned} \tag{A.15}$$

a produzir um sistema de N-equações acopladas. Considerando a identidade cinética

$$\partial_\nu G^{\nu\mu I} = \partial_\nu \mathcal{G}^{\nu\mu I} - \partial^\mu \mathcal{G}_{(\nu}{}^{\nu)} \tag{A.16}$$

O lema de Poincaré, associado com a derivada covariante $\mathcal{D}_{\mu I} = b_I \partial_\mu + \gamma_{[IJ]} G_\mu^J$, produz

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\nu J} \mathcal{D}_{\mu I} Z^{[\mu\nu]} &= \left(b_J \gamma_{JL} - b_I \gamma_{[JL]}\right) \partial_\nu \left(G_\mu^L Z^{[\mu\nu]}\right) + \gamma_{[JL]} b_I \left(\partial_\nu G_\mu^L\right) Z^{[\mu\nu]} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\gamma_{[JL]} \gamma_{[IL]} - \gamma_{[JL]} \gamma_{[IK]}\right) G_\nu^K G_\mu^L Z^{[\mu\nu]} \end{aligned} \tag{A.17}$$

As identidades de Bianchi são

$$\partial_\mu G_{\nu\rho}^I + \partial_\nu G_{\rho\mu}^I + \partial_\rho G_{\mu\nu}^I = 0 \tag{A.18}$$

$$\partial_\mu z_{[\nu\rho]} + \partial_\nu z_{[\rho\mu]} + \partial_\rho z_{[\mu\nu]} = \gamma_{[IJ]} G_\nu^I G_{\mu\rho}^J + \gamma_{[IJ]} G_\rho^I G_{\nu\mu}^J + \gamma_{[IJ]} G_\mu^I G_{\rho\nu}^J \tag{A.19}$$

$$\partial_\mu z_{(\nu\rho)} + \partial_\nu z_{(\rho\mu)} + \partial_\rho z_{(\mu\nu)} = \gamma_{(IJ)} G_\nu^I G_{\mu\rho}^J + \gamma_{(IJ)} G_\rho^I G_{\nu\mu}^J + \gamma_{(IJ)} G_\mu^I G_{\rho\nu}^J \tag{A.20}$$

$$\partial_\mu \omega_{(\nu}{}^{\nu)} + 2 \partial_\nu \omega_{(\mu}{}^{\nu)} = \tau_{(IJ)} G_\mu^I G_\nu^{J\nu} + \tau_{(IJ)} G_\mu^I G_\nu^{J\nu} \tag{A.21}$$

As três identidades de Noether são:

$$\partial_\mu J_N^\mu = 0, \tag{A.22}$$

$$\Omega_{l1} \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu G_{\nu_I}} + J_N^\mu = 0 \tag{A.23}$$

$$\Omega_{l1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu G_{\nu_I}} \partial_\mu \partial_\nu \alpha(x) = 0 \tag{A.24}$$

Sumarizando, a relação entre o todo e as partes através de uma transformação de gauge sistêmica promovida pela eq. (3.4) produz uma estrutura clássica com $2N + 7$ equações,

a identificar o comportamento das partes dentro de um todo. O novo fato físico a ser observado dessas $2N + 7$ equações a respeito da sua lógica sistêmica onde as partes aparecem inseridas dentro de um todo. Observe que, as partes estão descritas em termos das variáveis $G_{\mu I}$ definidas em termos de coeficientes livres globais. Portanto, as variáveis que conduzem essas $2N + 7$ equações já possuem um caráter sistêmico. Essas equações de caráter reducionista são: as N-equações de movimento associadas a cada campo $G_{\mu I}$; três novas identidades algébricas correspondentes a observáveis coletivos; uma identidade cinética relacionando os setores antissimétricos e simétricos; e finalmente, está o teorema de Noether que acresce mais três equações de natureza global. Essas equações estão produzindo um conjunto sistêmico onde as partes (campos físicos $G_{\mu I}$) são definidas em termos do conjunto (campos associados $\{G_{\mu I}\}$). Levantando um determinismo sistêmico onde o individual, o coletivo e o todo se relacionam. O que nos leva a uma nova situação a ser explorada. Diferentemente do caso usual onde as partes somente interagem entre si, encontra-se um panorama onde se inserem entre si. Um contexto em que as partes são funções sistêmicas e estão interligadas entre si.

Apêndice B

Campos Coletivos

Ao lado dos usuais campos granulares surgem novos campos coletivos definidos por:

$$\begin{aligned} z_{\mu\nu} &= \gamma_{IJ} G^I_\mu G^J_\nu \\ &= \gamma_{11} G^1_\mu G^1_\nu + \gamma_{12} G^1_\mu G^2_\nu + \gamma_{13} G^1_\mu G^3_\nu + \gamma_{14} G^1_\mu G^4_\nu + \\ &+ \gamma_{21} G^2_\mu G^1_\nu + \gamma_{22} G^2_\mu G^2_\nu + \gamma_{23} G^2_\mu G^3_\nu + \gamma_{24} G^2_\mu G^4_\nu + \\ &+ \gamma_{31} G^3_\mu G^1_\nu + \gamma_{32} G^3_\mu G^2_\nu + \gamma_{33} G^3_\mu G^3_\nu + \gamma_{34} G^3_\mu G^4_\nu + \\ &+ \gamma_{41} G^4_\mu G^1_\nu + \gamma_{42} G^4_\mu G^2_\nu + \gamma_{43} G^4_\mu G^3_\nu + \gamma_{44} G^4_\mu G^4_\nu \end{aligned} \tag{B.1}$$

Os tensores antissimétricos são da forma

$$z_{[\mu\nu]} = \begin{pmatrix} 0 & z^{[1,2]} & z^{[1,+]} & z^{[1,-]} \\ -z^{[1,2]} & 0 & z^{[2,+]} & z^{[2,-]} \\ -z^{[+,1]} & -z^{[+,2]} & 0 & z^{[+,-]} \\ -z^{[-,1]} & -z^{[-,2]} & -z^{[-,+]} & 0 \end{pmatrix} \tag{B.2}$$

e com mais de 10 tensores simétricos

$$z_{(\mu\nu)} = \begin{pmatrix} z^{(1,1)} & z^{(1,2)} & z^{(1,+)} & z^{(1,-)} \\ z^{(1,2)} & z^{(2,2)} & z^{(2,+)} & z^{(2,-)} \\ z^{(1,+)} & z^{(2,+)} & z^{(+,+)} & z^{(+,-)} \\ z^{(1,-)} & z^{(2,-)} & z^{(+,-)} & z^{(-,-)} \end{pmatrix} \tag{B.3}$$

Considerando o conjunto $\{A_\mu, U\mu, V_\mu^{\pm}\}$ define-se os seguintes campos coletivos:

$$
\begin{aligned}
&{}^{(11)}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \gamma_{(11)} A^\mu A^\nu, \quad {}^{(22)}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \gamma_{(22)} U^\mu U^\nu, \quad {}^{(12)}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \gamma_{(12)} A^\mu U^\nu, \\
&{}^{(21)}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \gamma_{(21)} U^\mu A^\nu \quad {}^{(11)}_{z}{}^{\mu}_{\mu} = \gamma_{(11)} A_\mu A^\mu, \quad {}^{(22)}_{z}{}^{\mu}_{\mu} = \gamma_{(22)} U_\mu U^\mu, \\
&{}^{(12)}_{z}{}^{\mu}_{\mu} = \gamma_{(12)} A_\mu U^\mu, \quad {}^{[12]}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \gamma_{[12]} A^\mu U^\nu, \quad {}^{[21]}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \gamma_{[21]} U^\mu A^\nu, \\
&{}^{(13+)}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \gamma_{(13)} A^\mu V^{\nu+}, \quad {}^{(13-)}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \{{}^{(13+)}_{z}{}^{\mu\nu}\}^* = \gamma_{(13)} A^\mu V^{\nu-}, \\
&{}^{(14+)}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \gamma_{(14)} A^\mu V^{\nu+}, \quad {}^{(14-)}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \{{}^{(14+)}_{z}{}^{\mu\nu}\}^* = \gamma_{(14)} A^\mu V^{\nu-}, \\
&{}^{[13+]}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \gamma_{[13]} A^\mu V^{\nu+}, \quad {}^{[13-]}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \{{}^{[13+]}_{z}{}^{\mu\nu}\}^* = \gamma_{[13]} A^\mu V^{\nu-}, \\
&{}^{[14+]}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \gamma_{[14]} A^\mu V^{\nu+}, \quad {}^{[14-]}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \{{}^{[14+]}_{z}{}^{\mu\nu}\}^* = \gamma_{[14]} A^\mu V^{\nu-}, \\
&{}^{(23+)}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \gamma_{(23)} U^\mu V^{\nu+}, \quad {}^{(23-)}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \{{}^{(23+)}_{z}{}^{\mu\nu}\}^* = \gamma_{(23)} U^\mu V^{\nu-}, \\
&{}^{(24+)}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \gamma_{(24)} U^\mu V^{\nu+}, \quad {}^{(24-)}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \{{}^{(24+)}_{z}{}^{\mu\nu}\}^* = \gamma_{(24)} U^\mu V^{\nu-}, \\
&{}^{[23+]}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \gamma_{[23]} U^\mu V^{\nu+}, \quad {}^{[23-]}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \{{}^{[23+]}_{z}{}^{\mu\nu}\}^* = \gamma_{[23]} U^\mu V^{\nu-}, \\
&{}^{[24+]}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \gamma_{[24]} U^\mu V^{\nu+}, \quad {}^{[24-]}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \{{}^{[24+]}_{z}{}^{\mu\nu}\}^* = \gamma_{[24]} U^\mu V^{\nu-}, \\
&{}^{+-3}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \gamma_{(33)} V^{\mu+} V^{\nu-}, \quad {}^{-+3}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \{{}^{+-3}_{z}{}^{\mu\nu}\}^* = \gamma_{(33)} V^{\mu-} V^{\nu+}, \\
&{}^{+-4}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \gamma_{(44)} V^{\mu+} V^{\nu-}, \quad {}^{-+4}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \{{}^{+-4}_{z}{}^{\mu\nu}\}^* = \gamma_{(44)} V^{\mu-} V^{\nu+}, \\
&{}^{(+-)}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv -i\gamma_{(34)} V^{\mu+} V^{\nu-}, \quad {}^{(-+)}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \{{}^{(+-)}_{z}{}^{\mu\nu}\}^* = i\gamma_{(34)} V^{\mu-} V^{\nu+}, \\
&{}^{[+-]}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv -i\gamma_{[34]} V^{\mu+} V^{\nu-}, \quad {}^{[-+]}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \{{}^{[+-]}_{z}{}^{\mu\nu}\}^* = i\gamma_{[34]} V^{\mu-} V^{\nu+}, \\
&{}^{(+1)}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \big(\gamma_{(13)} + i\gamma_{(14)}\big) A^\mu V^{\nu+}, \quad {}^{(-1)}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \{{}^{(+1)}_{z}{}^{\mu\nu}\}^*, \\
&{}^{(+2)}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \big(\gamma_{(23)} + i\gamma_{(24)}\big) U^\mu V^{\nu+}, \quad {}^{(-2)}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \{{}^{(+2)}_{z}{}^{\mu\nu}\}^*, \\
&{}^{[+1]}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \big(\gamma_{[13]} + i\gamma_{[14]}\big) A^\mu V^{\nu+}, \quad {}^{[-1]}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \{{}^{[+1]}_{z}{}^{\mu\nu}\}^*, \\
&{}^{[+2]}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \big(\gamma_{[23]} + i\gamma_{[24]}\big) U^\mu V^{\nu+}, \quad {}^{[-2]}_{z}{}^{\mu\nu} \equiv \{{}^{[+2]}_{z}{}^{\mu\nu}\}^*.
\end{aligned}
\tag{B.4}
$$

Similarmente, definimos os campos ω pela troca, nas definições acima, z por ω e γ por τ. Por exemplo:

$$
\begin{aligned}
&{}^{(11)}_{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha} \equiv \tau_{(11)} A^\alpha A_\alpha, \quad {}^{(22)}_{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha} \equiv \tau_{(22)} U^\alpha U_\alpha, \quad {}^{(12)}_{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha} \equiv \tau_{(12)} A^\alpha U_\alpha, \\
&{}^{+-3}_{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha} \equiv \tau_{(33)} V^{\alpha+} V_{\alpha-}, \quad {}^{(+1)}_{\omega}{}^{\alpha}_{\alpha} \equiv \big(\tau_{(13)} + i\tau_{(14)}\big) A^\alpha V^+_\alpha,
\end{aligned}
\tag{B.5}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
z_{[\mu\nu]} &= \gamma_{[12]}\left(A_\mu U_\nu - A_\nu U_\mu\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\gamma_{[13]} + i\gamma_{[14]}\right)\left(A_\mu V_\nu^+ - A_\nu V_\mu^+\right) + \\
&+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\gamma_{[13]} - i\gamma_{[14]}\right)\left(A_\mu V_\nu^- - A_\nu V_\mu^-\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\gamma_{[23]} + i\gamma_{[24]}\right)\left(U_\mu V_\nu^+ - U_\nu V_\mu^+\right) + \\
&+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\gamma_{[23]} + i\gamma_{[24]}\right)\left(U_\mu V_\nu^- - U_\nu V_\mu^-\right) - \gamma_{[34]}\left(V_\mu^+ V_\nu^- - V_\mu^- V_\nu^+\right)
\end{aligned} \tag{B.6}
$$

ou

$$
z_{[\mu\nu]} = 2\,{}^{[12]}_{[\mu\nu]}z + \sqrt{2}\,{}^{[+1]}_{[\mu\nu]}z + \sqrt{2}\,{}^{[-1]}_{[\mu\nu]}z + 2\,{}^{[+2]}_{[\mu\nu]}z + \sqrt{2}\,{}^{[-2]}_{[\mu\nu]}z + {}^{[+-]}_{[\mu\nu]}z \tag{B.7}
$$

representa o termo coletivo antissimétrico. E,

$$
\begin{aligned}
z_{(\mu\nu)} &= \gamma_{11}A_\mu A_\nu + \gamma_{22}U_\mu U_\nu + \frac{1}{2}\left(\gamma_{33} - \gamma_{44}\right)\left(V_\mu^+ V_\nu^- + V_\mu^- V_\nu^+\right) + \\
&+\frac{1}{2}\left(\gamma_{33} + \gamma_{44}\right)\left(V_\mu^+ V_\nu^- + V_\mu^- V_\nu^+\right) + \gamma_{(12)}\left(A_\mu U_\nu + U_\mu A_\nu\right) + \\
&+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\gamma_{(13)} + i\gamma_{(14)}\right)\left(A_\mu V_\nu^+ + A_\nu V_\mu^+\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\gamma_{(13)} - i\gamma_{(14)}\right)\left(A_\mu V_\nu^- + A_\nu V_\mu^-\right) + \\
&+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\gamma_{(23)} + i\gamma_{(24)}\right)\left(U_\mu V_\nu^+ + U_\nu V_\mu^+\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\gamma_{(23)} - i\gamma_{(24)}\right)\left(U_\mu V_\nu^- + U_\nu V_\mu^-\right) + \\
&+i\gamma_{(34)}\left(V_\mu^+ V_\nu^- + V_\mu^- V_\nu^+\right)
\end{aligned} \tag{B.8}
$$

o termo coletivo simétrico.

Apêndice C

Força de Lorentz

Esta seção irá lidar com o significado de força. Relatividade especial define forças através da equação $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = f^\nu$ o que significa uma troca de energia e momento entre dois sistemas feitos por campos e fontes externas. O acoplamento entre campos com forças externas na sua forma mais simples é da forma $G^{\mu I} j_{\mu I}$ onde a fonte $j_{\mu I}$ não necessariamente corresponde à carga elétrica. Isso leva à Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + G^{\mu I} j_{\mu I} \tag{C.1}$$

As correspondentes equações de campo levam a

$$\partial_\mu \big(G_I^{\nu\mu} + b_I z^{[\nu\mu]}\big) + \frac{1}{2} m_I^2 G_I^\mu = J_I^\mu + j_I^\mu \tag{C.2}$$

como um resultado, a equação de força é derivada da equação (C.1). Sendo assim, podemos realizar a separação

$$f^\nu = f_L^\nu + f_M^\nu + f_E^\nu \tag{C.3}$$

com

$$f_L^\nu = 4 G^{\nu\mu} j_{\mu I}, \quad f_L^\nu = -2 m_I^2 G_I^\nu \big(\partial^\mu G_{\mu\, I}\big), \quad f_E^\nu = 4 G^{\nu I} \big(\partial^\mu J_{\mu\, I}(G)\big) \tag{C.4}$$

Eq. (C.3) é a equação fundamental. Além do tipo usual de Lorentz, dá início à uma natureza massiva e dependente do ambiente. Note que as Eqs.(C.4) estão introduzindo

uma força global comvariáveis como fontes externas, campos potenciais, densidades e equações de continuidade.

Para um entendimento melhor, devemos descrever estas novas forças em termos de componentes

$$f^0 = 4\vec{j_I} \cdot \vec{E}^I + 4\phi_I\big(\frac{\partial}{\partial t}\rho^I(G) + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}^I(G)\big) - 2m_I^2\phi_I\big(\frac{\partial}{\partial t}\phi^I(G) + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}^I\big) \tag{C.5}$$

e

$$\vec{f} = \vec{f_L} + \vec{f_M} + \vec{f_E} \tag{C.6}$$

com

$$\vec{f_L} = 4\rho_I\vec{E}^I + 4\vec{j_I} \times \vec{B}^I \tag{C.7}$$

$$\vec{f_M} = 4m_I^2\vec{A}_I\big(\frac{\partial}{\partial t}\phi^I + \nabla \cdot \vec{A}^I\big) \tag{C.8}$$

$$\vec{f_E} = 4\vec{A}_I\big(\frac{\partial}{\partial t}\rho^I(A) + \nabla \cdot \vec{J}^I(A)\big) \tag{C.9}$$

Note que as intensidades são proporcionais à cargas, massas e acoplamentos. Além do setor granular associado às cargas teste existe uma dinâmica de rede. Um novo significado de força aparece. Eq.(C.6) contém diferentes fontes para transmissão de momento. Partículas podem ser defletidas não apenas por cargas de teste, como na eq.(C.7). Uma força pode ser originada de de um dado campo $G_{\mu I}$ interagindo com a sua própria massa como na eq.(C.8). Eq.(C.9) mostra uma força vianda do meio onde as variáveis $\rho_I(G)$ e $\vec{J}_I(G)$ não atuam como objetos individuais, mas sobre conglomerados invariantes de gauge de campos potenciais. É uma força derivada de um aspecto cooperativo de campos.

Apêndice D

Coeficientes da Lagrangeana

Termo Cinético

$$
\begin{aligned}
&a_{11} = 2a_1, \quad b_{11} = -2a_1, \quad a_{22} = 2a_2, \quad b_{22} = -2a_2 \\
&a_{33} = 2a_3, \quad b_{33} = -2a_3, \\
&c_{11} = 2b_{(11)}, \quad d_{11} = 2b_{(11)}, \quad c_{22} = 2b_{(22)}, \quad d_{22} = 2b_{(22)} \\
&c_{33} = 4b_{(33)}, \quad d_{33} = 4b_{(33)}, e_{11} = 4c_{(11)}, \quad e_{22} = 4c_{(22)}, \\
&e_{11} = 4c_{(11)}, \quad e_{22} = 4c_{(22)}, \quad e_{12} = 8c_{(12)}, \quad e_{33} = 8c_{(33)}
\end{aligned}
\tag{D.1}
$$

Termo de Massa

$$
m_{22}^2 = -\frac{1}{2}\mu_U^2, \quad m_{33}^2 = -\mu_V^2 \tag{D.2}
$$

Gauge Fixing

$$
\psi_{11} = \xi_{(11)}, \quad \psi_{22} = \xi_{(22)}, \quad \psi_{12} = 2\xi_{(12)}, \quad \psi_{33} = 2\xi_{(33)} \tag{D.3}
$$

LI3A

$$
\begin{aligned}
&a_{112} = 4b_1\gamma_{[12]}, \quad a_{121} = -4b_1\gamma_{[12]}, \quad a_{212} = 4b_2\gamma_{[12]}, \quad a_{221} = -4b_2\gamma_{[12]},\\
&a_{134} = 4i\big(b_1\gamma_{[34]} + \beta_1\gamma_{(34)}\big), \quad a_{143} = -4i\big(b_1\gamma_{[34]} + \beta_1\gamma_{(34)}\big),\\
&a_{234} = 4i\big(b_2\gamma_{[34]} + \beta_2\gamma_{(34)}\big), \quad a_{243} = -4i\big(b_2\gamma_{[34]} + \beta_2\gamma_{(34)}\big)\\
&a_{314} = 4b_3\big(\gamma_{[13]} - i\gamma_{[14]}\big), \quad a_{341} = -4b_3\big(\gamma_{[13]} - i\gamma_{[14]}\big)\\
&a_{324} = 4b_3\big(\gamma_{[23]} - i\gamma_{[24]}\big), \quad a_{342} = -4b_3\big(\gamma_{[23]} - i\gamma_{[24]}\big)\\
&a_{413} = 4b_3\big(\gamma_{[13]} + i\gamma_{[14]}\big), \quad a_{431} = -4b_3\big(\gamma_{[13]} + i\gamma_{[14]}\big)\\
&a_{423} = 4b_3\big(\gamma_{[23]} + i\gamma_{[24]}\big), \quad a_{432} = -4b_3\big(\gamma_{[23]} + i\gamma_{[24]}\big)
\end{aligned}
\tag{D.4}
$$

LI3S

$$
\begin{aligned}
&b_{111} = 4\beta_1\gamma_{(11)}, \quad b_{122} = 4\beta_1\gamma_{(22)}, \quad b_{112} = 4\beta_1\gamma_{(12)},\\
&b_{121} = 4\beta_1\gamma_{(12)}, \quad b_{134} = 4\beta_1\gamma_{(33)}, \quad b_{143} = 4\beta_1\gamma_{(33)}\\
&b_{211} = 4\beta_2\gamma_{(11)}, \quad b_{222} = 4\beta_2\gamma_{(22)}, \quad b_{212} = 4\beta_2\gamma_{(12)},\\
&b_{221} = 4\beta_2\gamma_{(12)}, \quad b_{234} = 4\beta_2\gamma_{(33)}, \quad b_{243} = 4\beta_2\gamma_{(33)}\\
&b_{314} = 4\beta_3\big(\gamma_{(13)} - i\gamma_{(14)}\big), \quad b_{341} = 4\beta_3\big(\gamma_{(13)} - i\gamma_{(14)}\big)\\
&b_{324} = 4\beta_3\big(\gamma_{(23)} - i\gamma_{(24)}\big), \quad b_{342} = 4\beta_3\big(\gamma_{(23)} - i\gamma_{(24)}\big)\\
&b_{413} = 4\beta_3\big(\gamma_{(13)} + i\gamma_{(14)}\big), \quad b_{431} = 4\beta_3\big(\gamma_{(13)} + i\gamma_{(14)}\big)\\
&b_{423} = 4\beta_3\big(\gamma_{(23)} + i\gamma_{(24)}\big), \quad b_{432} = 4\beta_3\big(\gamma_{(23)} + i\gamma_{(24)}\big)\\
&c_{111} = 4\Big(\rho_1\gamma_{(11)} + \tau_{(11)}\big(\beta_1 + 4\rho_1\big)\Big)\\
&c_{122} = 4\Big(\rho_1\gamma_{(22)} + \tau_{(22)}\big(\beta_1 + 4\rho_1\big)\Big)\\
&c_{112} = 8\Big(\rho_1\gamma_{(12)} + \tau_{(12)}\big(\beta_1 + 4\rho_1\big)\Big)\\
&c_{134} = 8\Big(\rho_1\gamma_{(33)} + \tau_{(33)}\big(\beta_1 + 4\rho_1\big)\Big)\\
&c_{211} = 4\Big(\rho_2\gamma_{(11)} + \tau_{(11)}\big(\beta_2 + 4\rho_2\big)\Big)\\
&c_{222} = 4\Big(\rho_2\gamma_{(22)} + \tau_{(22)}\big(\beta_2 + 4\rho_2\big)\Big)\\
&c_{212} = 8\Big(\rho_2\gamma_{(12)} + \tau_{(12)}\big(\beta_2 + 4\rho_2\big)\Big)\\
&c_{234} = 8\Big(\rho_2\gamma_{(33)} + \tau_{(33)}\big(\beta_2 + 4\rho_2\big)\Big)\\
&c_{314} = 8\Big(\rho_3\left(\gamma_{(13)} - i\gamma_{(14)}\right) + \left(\tau_{(13)} - i\tau_{(14)}\right)\left(\beta_3 + 4\rho_3\right)\Big)\\
&c_{324} = 8\Big(\rho_3\left(\gamma_{(23)} - i\gamma_{(24)}\right) + \left(\tau_{(23)} - i\tau_{(24)}\right)\left(\beta_3 + 4\rho_3\right)\Big)\\
&c_{413} = 8\Big(\rho_3\left(\gamma_{(13)} + i\gamma_{(14)}\right) + \left(\tau_{(13)} + i\tau_{(14)}\right)\left(\beta_3 + 4\rho_3\right)\Big)\\
&c_{423} = 8\Big(\rho_3\left(\gamma_{(23)} + i\gamma_{(24)}\right) + \left(\tau_{(23)} + i\tau_{(24)}\right)\left(\beta_3 + 4\rho_3\right)\Big)
\end{aligned}
\tag{D.5}
$$

LI4A

$$b_{1112} = \left(2\gamma_{[12]}^2\right), b_{1122} = \left(2\gamma_{[12]}\gamma_{[21]}\right), b_{1134} = \left(-4\gamma_{[13]}^2\right), b_{2234} = \left(-4\gamma_{[23]}^2\right)$$
$$b_{1314} = \left(4\gamma_{[13]}^2\right), b_{2324} = \left(4\gamma_{[23]}^2\right), b_{1324} = \left(8\gamma_{[13]}\gamma_{[23]}\right), b_{3434} = \left(-2\gamma_{[34]}^2\right), b_{3443} = \left(2\gamma_{[34]}^2\right)$$
$$b_{1234} = \left(-4\gamma_{[13]}\gamma_{[23]} - 4i\gamma_{[12]}\gamma_{[34]} - 4i\gamma_{[12]}\gamma_{[24]}\right), b_{1243} = \left(-4\gamma_{[13]}\gamma_{[23]} + 4i\gamma_{[12]}\gamma_{[34]} + 4i\gamma_{[12]}\gamma_{[24]}\right) \tag{D.6}$$

LI4S

$$
\begin{aligned}
&c_{1111} = \left(\gamma_{(11)}^2 + 2\gamma_{(11)}\tau_{(11)} + 4\tau_{(11)}^2\right), c_{2222} = \left(\gamma_{(22)}^2 + 2\gamma_{(22)}\tau_{(22)} + 4\tau_{(22)}^2\right)\\
&c_{1112} = \left(4\gamma_{(11)}\gamma_{(12)} + 8\tau_{(11)}\gamma_{(12)} + 16\tau_{(11)}\tau_{(12)}\right)\\
&c_{2221} = \left(4\gamma_{(12)}\gamma_{(22)} + 8\gamma_{(12)}\tau_{(22)} + 16\tau_{(12)}\tau_{(22)}\right)\\
&c_{1212}\left(2\gamma_{(12)}^2 + 4\gamma_{(11)}\tau_{(22)} + 8\tau_{(11)}\tau_{(22)}\right)\\
&c_{1122} = \left(2\gamma_{(11)}\gamma_{(22)} + 8\gamma_{(12)}\tau_{(12)} + 16\tau_{(12)}^2 + 2\gamma_{(12)}^2\right)\\
&c_{1134} = \left(4\gamma_{(11)}\gamma_{(33)} + 4\gamma_{(13)}^2 + 16\gamma_{(13)}\tau_{(13)} + 32\tau_{(13)}^2\right)\\
&c_{2234} = \left(4\gamma_{(22)}\gamma_{(33)} + 4\gamma_{(23)}^2 + 16\gamma_{(23)}\tau_{(23)} + 32\tau_{(23)}^2\right)\\
&c_{1314} = \left(4\gamma_{(13)}^2 + 8\gamma_{(11)}\tau_{(33)} + 16\tau_{(11)}\tau_{(33)}\right)\\
&c_{2324} = \left(4\gamma_{(23)}^2 + 8\gamma_{(22)}\tau_{(33)} + 16\tau_{(22)}\tau_{(33)}\right)\\
&c_{1324} = \left(8\gamma_{(13)}\gamma_{(23)} + 16\gamma_{(12)}\tau_{(33)} + 32\tau_{(12)}\tau_{(33)}\right)\\
&c_{1234} = \Bigg(4\gamma_{(12)}\gamma_{(33)} + 4\gamma_{(13)}\gamma_{(23)} + 32\tau_{(13)}\tau_{(23)} - 4i\gamma_{(13)}\tau_{(24)} + 4i\gamma_{(23)}\tau_{(14)} + 2i\gamma_{(13)}\gamma_{(24)} +\\
&-2i\gamma_{(14)}\gamma_{(23)} - 16i\tau_{(13)}\tau_{(24)} + 16i\tau_{(14)}\tau_{(23)} + 4i\gamma_{(14)}\tau_{(23)} - 4i\gamma_{(24)}\tau_{(13)}\Bigg)\\
&c_{1243} = \Bigg(4\gamma_{(12)}\gamma_{(33)} + 4\gamma_{(13)}\gamma_{(23)} + 32\tau_{(13)}\tau_{(23)} + 4i\gamma_{(13)}\tau_{(24)} - 4i\gamma_{(23)}\tau_{(14)} - 2i\gamma_{(13)}\gamma_{(24)} +\\
&+2i\gamma_{(14)}\gamma_{(23)} + 16i\tau_{(13)}\tau_{(24)} - 16i\tau_{(14)}\tau_{(23)} - 4i\gamma_{(14)}\tau_{(23)} + 4i\gamma_{(24)}\tau_{(13)}\Bigg)\\
&c_{3434} = \left(2\gamma_{(33)}\gamma_{(44)} + 8\gamma_{(34)}\tau_{(34)} + 16\tau_{(34)}^2\right)\\
&c_{3443} = \left(2\gamma_{(33)}\gamma_{(44)} + 8\gamma_{(33)}\tau_{(44)} + 16\tau_{(33)}\tau_{(44)} + 4\gamma_{(34)}^2 + 8\gamma_{(34)}\tau_{(34)} + 16\tau_{(34)}^2\right)
\end{aligned}
\tag{D.7}
$$

LI4

$$
\begin{aligned}
a_{1111} &= \left(\gamma_{(11)}^2 + 2\gamma_{(11)}\tau_{(11)} + 4\tau_{(11)}^2\right) \\
a_{2222} &= \left(\gamma_{(22)}^2 + 2\gamma_{(22)}\tau_{(22)} + 4\tau_{(22)}^2\right) \\
a_{1112} &= \left(4\gamma_{(11)}\gamma_{(12)} + 8\tau_{(11)}\gamma_{(12)} + 16\tau_{(11)}\tau_{(12)}\right) \\
a_{2221} &= \left(4\gamma_{(12)}\gamma_{(22)} + 8\gamma_{(12)}\tau_{(22)} + 16\tau_{(12)}\tau_{(22)}\right) \\
a_{1212} &= \left(2\gamma_{[12]}^2 + 2\gamma_{(12)}^2 + 4\gamma_{(11)}\tau_{(22)} + 8\tau_{(11)}\tau_{(22)}\right) \\
a_{1122} &= \left(2\gamma_{[12]}\gamma_{[21]} + 2\gamma_{(11)}\gamma_{(22)} + 8\gamma_{(12)}\tau_{(12)} + 16\tau_{(12)}^2 + 2\gamma_{(12)}^2\right) \\
a_{1134} &= \left(-4\gamma_{[13]}^2 + 4\gamma_{(11)}\gamma_{(33)} + 4\gamma_{(13)}^2 + 16\gamma_{(13)}\tau_{(13)} + 32\tau_{(13)}^2\right) \\
a_{2234} &= \left(-4\gamma_{[23]}^2 + 4\gamma_{(22)}\gamma_{(33)} + 4\gamma_{(23)}^2 + 16\gamma_{(23)}\tau_{(23)} + 32\tau_{(23)}^2\right) \\
a_{1314} &= \left(4\gamma_{[13]}^2 + 4\gamma_{(13)}^2 + 8\gamma_{(11)}\tau_{(33)} + 16\tau_{(11)}\tau_{(33)}\right) \\
a_{2324} &= \left(4\gamma_{[23]}^2 + 4\gamma_{(23)}^2 + 8\gamma_{(22)}\tau_{(33)} + 16\tau_{(22)}\tau_{(33)}\right) \\
a_{1324} &= \Big(8\gamma_{[13]}\gamma_{[23]} + 8\gamma_{(13)}\gamma_{(23)} + 16\gamma_{(12)}\tau_{(33)} + 32\tau_{(12)}\tau_{(33)}\Big) \\
a_{1234} &= +\Bigg(- 4\gamma_{[13]}\gamma_{[23]} - 4i\gamma_{[12]}\gamma_{[34]} - 4i\gamma_{[12]}\gamma_{[24]} + 4\gamma_{(12)}\gamma_{(33)} + 4\gamma_{(13)}\gamma_{(23)} + \\
&+32\tau_{(13)}\tau_{(23)} - 4i\gamma_{(13)}\tau_{(24)} + 4i\gamma_{(23)}\tau_{(14)} + 2i\gamma_{(13)}\gamma_{(24)} + \\
&-2i\gamma_{(14)}\gamma_{(23)} - 16i\tau_{(13)}\tau_{(24)} + 16i\tau_{(14)}\tau_{(23)} + 4i\gamma_{(14)}\tau_{(23)} - 4i\gamma_{(24)}\tau_{(13)}\Bigg) \\
a_{1243} &= \Bigg(- 4\gamma_{[13]}\gamma_{[23]} + 4i\gamma_{[12]}\gamma_{[34]} + 4i\gamma_{[12]}\gamma_{[24]} + 4\gamma_{(12)}\gamma_{(33)} + 4\gamma_{(13)}\gamma_{(23)} + \\
&+32\tau_{(13)}\tau_{(23)} + 4i\gamma_{(13)}\tau_{(24)} - 4i\gamma_{(23)}\tau_{(14)} - 2i\gamma_{(13)}\gamma_{(24)} + \\
&+2i\gamma_{(14)}\gamma_{(23)} + 16i\tau_{(13)}\tau_{(24)} - 16i\tau_{(14)}\tau_{(23)} - 4i\gamma_{(14)}\tau_{(23)} + 4i\gamma_{(24)}\tau_{(13)}\Bigg) \\
a_{3434} &= \left(-2\gamma_{[34]}^2 + 2\gamma_{(33)}\gamma_{(44)} + 8\gamma_{(34)}\tau_{(34)} + 16\tau_{(34)}^2\right) \\
a_{3443} &= \left(2\gamma_{[34]}^2 + 2\gamma_{(33)}\gamma_{(44)} + 8\gamma_{(33)}\tau_{(44)} + 16\tau_{(33)}\tau_{(44)} + 4\gamma_{(34)}^2 + 8\gamma_{(34)}\tau_{(34)} + 16\tau_{(34)}^2\right)
\end{aligned}
\tag{D.8}
$$

Apêndice E

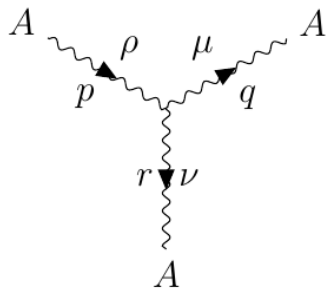
Regras de Feynman

Os tri-vértices bosônicos aparecem em três estruturas. Resulta em gráficos com três campos diferentes, dois campos iguais interagindo e com todos os campos iguais. Reescrevendo a equação equação (3.12),(3.14) como

$$\mathcal{L}_3 = a_{IJK}\eta_{\nu\rho}(\partial_\mu A_I^\rho)A_J^\mu A_K^\nu + b_{IJK}\eta_{\nu\rho}(\partial_\mu A_I^\rho)A_J^\rho A_K^\nu \tag{E.1}$$

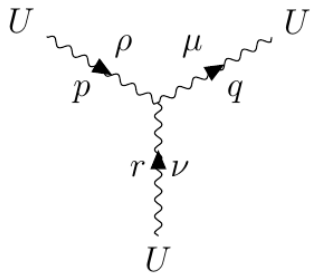
onde $A_{\mu I} \equiv \left\{A_\mu, U_\mu, V_\mu^\pm\right\}$ pode-se obter as seguintes regras de Feynman.

E.1 Três Campos Iguais



$$= -\left(b_{111} + 2c_{111}\right)\left(\eta_{\mu\nu}p_\rho + \eta_{\nu\rho}q_\mu + \eta_{\mu\rho}r_\nu\right)$$

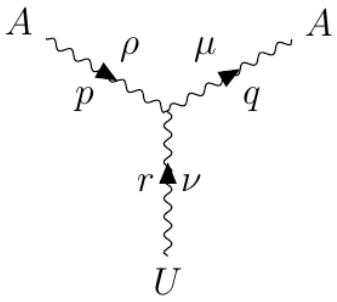
$$\text{com} \quad p + q + r = 0 \tag{E.2}$$



$$= -\left(b_{222} + 2c_{222}\right)\left(\eta_{\mu\nu}p_\rho + \eta_{\nu\rho}q_\mu + \eta_{\mu\rho}r_\nu\right)$$

$$\text{com} \quad p + q + r = 0 \tag{E.3}$$

E.2 Dois Campos Iguais

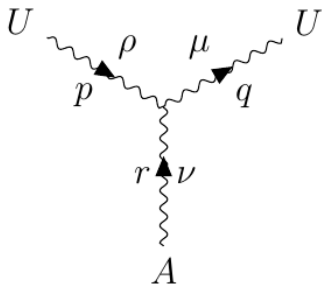


$$= \left(a_{112} + b_{112}\right)\left(\eta_{\nu\rho}p_\mu + \eta_{\mu\nu}q_\rho\right) + \left(a_{121} + b_{121}\right)\left(p_\mu + r_\mu\right)\eta_{\nu\rho} +$$

$$+ \left(b_{211}\right)\left(\eta_{\nu\rho}p_\mu + \eta_{\mu\nu}q_\rho\right) + c_{112}\left(\eta_{\mu\nu}p_\rho + \eta_{\rho\nu}q_\mu\right) +$$

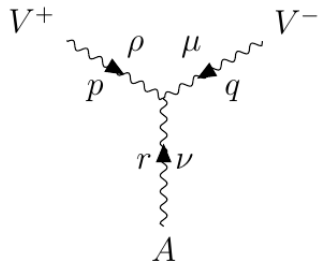
$$+ c_{121}\left(\eta_{\mu\nu}p_\rho + \eta_{\mu\rho}r_\nu\right) + 2c_{211}\eta_{\mu\nu}p_\rho$$

$$\text{com} \quad p + q + r = 0 \tag{E.4}$$

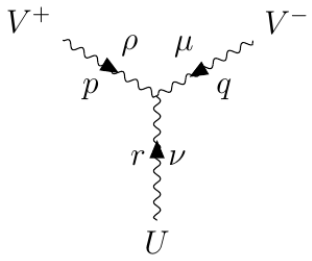


$$= (a_{221} + b_{221})(\eta_{\nu\rho} p_\mu + \eta_{\mu\nu} q_\rho) + (a_{212} + b_{212})(p_\mu + r_\mu)\eta_{\nu\rho} +$$
$$+ (b_{122})(\eta_{\nu\rho} p_\mu + \eta_{\mu\nu} q_\rho) + c_{221}(\eta_{\mu\nu} p_\rho + \eta_{\rho\nu} q_\mu) +$$
$$+ c_{212}(\eta_{\mu\nu} p_\rho + \eta_{\mu\rho} r_\nu) + 2c_{122}\eta_{\mu\nu} p_\rho$$
$$\text{com} \quad p + q + r = 0 \tag{E.5}$$

E.3 Três Campos Diferentes



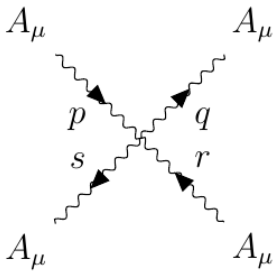
$$= (a_{134} + a_{143} + b_{134} + b_{143})\eta_{\nu\rho} p_\mu + (c_{134} + c_{143})\eta_{\nu\rho} p_\mu$$
$$\text{com} \quad p + q + r = 0 \tag{E.6}$$



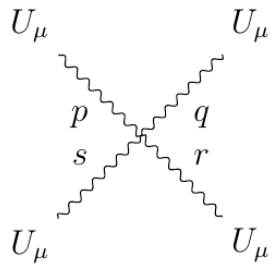
$$= (a_{234} + a_{243} + b_{234} + b_{243})\,\eta_{\nu\rho}p_\mu + (c_{234} + c_{243})\,\eta_{\nu\rho}p_\mu$$

$$\text{com} \quad p + q + r = 0 \tag{E.7}$$

E.4 Quatro Campos Iguais

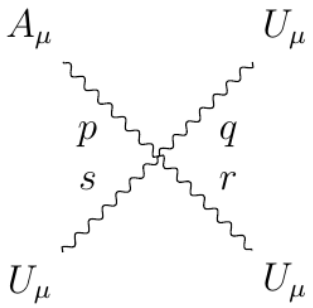


$$= -8i\,a_{1111}\,(\eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\lambda} + \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\lambda} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\lambda}) \qquad \text{com} \quad p + q + r = 0 \tag{E.8}$$

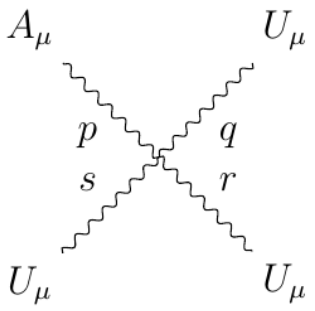


$$= -8i\, a_{2222}\left(\eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\lambda} + \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\lambda} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\lambda}\right) \qquad \text{com} \quad p+q+r=0 \tag{E.9}$$

E.5 Três Campos Iguais e Um Diferente

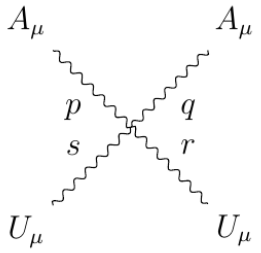


$$= -2i\, a_{1112}\left(\eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\lambda} + \eta_{\nu\mu}\eta_{\rho\lambda} + \eta_{\nu\lambda}\eta_{\mu\rho}\right) \qquad \text{com} \quad p+q+r=0 \tag{E.10}$$

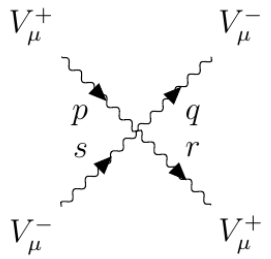


$$= -2i\, a_{2221}\left(\eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\lambda} + \eta_{\nu\mu}\eta_{\rho\lambda} + \eta_{\nu\lambda}\eta_{\mu\rho}\right) \qquad \text{com} \quad p+q+r=0 \tag{E.11}$$

E.6 Dois Campos Iguais

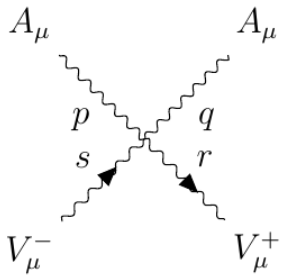


$$= -4i\,\left(a_{1122} + a_{1212}\right)\eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\lambda} - 2i\, a_{1122}\eta_{\nu\lambda}\eta_{\mu\rho} \qquad \text{com} \quad p+q+r=0 \tag{E.12}$$

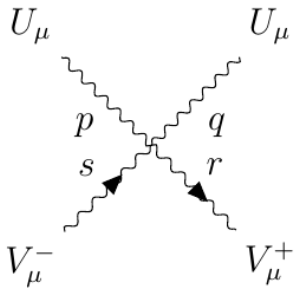


$$= -4i\ (a_{3344} + a_{3434})\,\eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\lambda} - 2i\,a_{3344}\eta_{\nu\lambda}\eta_{\mu\rho} \qquad \text{com} \quad p+q+r=0 \tag{E.13}$$

E.7 Dois Campos Iguais e Dois Diferentes

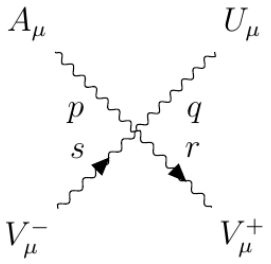


$$= -i\ (a_{1314} + a_{1134})\,\eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\lambda} - i\,a_{1134}\eta_{\nu\lambda}\eta_{\mu\rho} \qquad \text{com} \quad p+q+r=0 \tag{E.14}$$



$$= -i\ (a_{2324} + a_{1134})\, \eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\lambda} - i\, a_{2234}\eta_{\nu\lambda}\eta_{\mu\rho} \qquad \text{com} \quad p+q+r=0 \tag{E.15}$$

E.8 Quatro Campos Diferentes



$$= -i\, a_{1234}\eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\lambda} \quad \text{com} \quad p+q+r=0 \tag{E.16}$$

Referências Bibliográficas

[1] Hill E. G. Pike O. J., Mackenroth F. and Rose S.J. A photon-photon collider in a vacuum hohlraum. Nature Photonics, 8:434-436, 2017; John Ellis and Nick E. Mavromatos and Tevong You, PRL 118, 261802(2017); Robert Karplus and Maurice Neuman. The scattering of light by light. Phys. Rev,. 83:776-784, Aug 1951.

[2] G. Breit and John A. Wheeler. Collison of two light quanta. Phys. Rev., 46:1087-1091, Dec 1934.

[3] S.L. Adler, Ann. Phys 67 (1971)

[4] M. Delbruck, Zeits. Physik PR 36 (1930) 1590;84 (1933) 144

[5] S.L. Glashow, Nucl.Phys.22, 573(1961); S. Weinberg Phys. Rev. Lett. 19, 1264 (1967; A. Salam, in Elementary Particle Theory, The Nobel Symposium number 8, edited by N. Svartholm, (Almqvist and Wiks-kell, Stockholm,1968) pg 367; M. Srednicki, Quantum Field Theory, Cambridge University Press (2007)

[6] W. Heisenberg, H. Euler, Zeits. Physik 98,714(1936); H. Euler, Ann der Phys. 418(1936); H. Kleivert, arXiv: physics/0605038 [phys.hist-ph] (2006)

[7] M. Born and L. Infeld. Electromagnetic mass. Nature, 132:970, 1932.; M. Born and L. Infeld. Foundations of the new field theory. Proceedings of

the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 144(852):425-451, 1934.

[8] J. Chauca, R.Doria, I. Soares JAP Vol 10 No1 2605 (2015)

[9] A. A. Michelson and E.W. Morley, Philos. Mag. S.5, 24 (151), 449-463 (1887)

[10] M. Agostini, et al, PRL 115, 231802 (2015)

[11] J.Chauca, R.Doria, J.L.M.Valle, Rev.Mex.Fis Vol.58 no.2 (2012); J. Chauca, R. Doria. JBAP, Vol.2, Iss.4, 253-264 (2013)

[12] J. C. Maxwell. London Edinburgh Dublin Phys. Mag and J. Sc. Series IV, 21, 161 (1861).

[13] Hertz, Annalen der Physik und Chemie 1887 - 1890

[14] R.A Millikan, On the Elementary Electric charge and the Avogadro Constant, Phys. Rev 2 (2): 109-143, 1913

[15] P.A.M Dirac, The Proton, Nature 605, 1930; P.A.M Dirac, Proc. Roy. Soc. A 133,60

[16] C. Anderson, The Positive Electron, Phys. Rev. 43(1933) 491

[17] O. Klein, Z. Phys. , 37 (1926) pp. 895–906; W. Gordon, Z. Phys. , 40 (1926–1927) pp. 117–133; W. Pauli, V. Weisskopf, "Ueber die Quantisierung der skalaren relativistischen Wellengleichung"Helv. Phys. Acta , 7 (1934) pp. 709–731

[18] P.A.M Dirac, The Quantum Theory of the Electron, Roy. Soc. Proc.(1928)

[19] W. Gordon, Z. Phys. 50 (1928) 630; R. L. Mallett, Phys. Rev. D13 (1976) 2691; R. L. Mallett, Phys. Rev. D16 (1977) 295.

[20] J. Schwinger, Selected Papers on Quantum Electrodynamics Dowe Publications (1958); P.A.M Dirac. A theory of electrons and protons PRSL, 26(1930) 361; P.A.M Dirac. On quantum electrodynamics. Physikdische Zeitschrift der Sowieturian 2(1933) 468

[21] H.C. Corben and Julian Schwinger. The electromagnetic properties of mesotrons. Phys. Rev. , 58:953-968, Dec 1940

[22] A. Komar and Abdus Salam. Renormalization problem for vector meson theories. Nuclear Physics, 21:624 - 630, 1960

[23] T. D. Lee and C. N. Yang. Theory of charged vector mesons interacting with the electromagnetic field. Phys. Rev., 128:885-898, Oct 1962.

[24] Abdus Salam. Renormalizable electrodynamics of vector mesons. Phys. Rev., 130:1287-1290, May 1963

[25] K. H. Tzou. Il Nuovo Cimento, 33:286, 1964

[26] Abdus Salam and Robert Delbourgo. Renormalizable electrodynamics of scalar and vector mesons. ii. Phys. Rev., 135:B1398-B1427, Sep 1964.

[27] Giorgio Velo and and Daniel Zwanzinger. Noncausality and other defects of interactions lagrangians for particles with spin one and higher. Phys. Rev., 188:2218-2222, Dec 1969.

[28] Harmon Aronson. Spin-1 electrodynamics with an electric quadrupole moment. Phys. Rev., 186:1434-1441, Oct 1969.

[29] M. Kuroda, J. Maalampi, K.H. Schwarzer, and D. Schildknecht. Non-standard self-interactions of the weak vector bosons and their phenomenological implications. Nuclear Physics B, 284:271 - 298, 1987.

[30] I. Kuss and D. Schildknecht. Discovering non-abelian weak couplings and an anomalous magnetic dipole moment of the ω_{-}^{+} at lep2. Physics Letters B, 383(4):470 - 474, 1996.

[31] M. Bilenky, J.L. Kneur, F.M. Renard, and D. Schildknecht. Trilinear couplings among the electroweak vector bosons and their determination at lep 2. Nuclear Physics B, 409(1):22 - 68, 1993.

[32] Bert Schorer. Peculiarities of massive vector and their zero mass limits. The European Physical Journal C, 75(8):365, Aug 2015.

[33] Peter W. Higgs. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. Phys. Rev. Lett., 13:508-509, Oct 1964; J. Goldstone. Field theories with superconductor solutions. Il Nuovo Cimento (1955-1965), 19(1):154-164, 1961.; F. Englert and R. Brout. Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons. Phys. Rev. Lett., 13:321-323, Aug 1964; G.S. Guralnik, C.R. Hagen, and T.W.B. Kibble. Global conservation laws and massless particles. Phys. Rev. Lett., 13:585-587, Nov 1964; Francois Englert. Nobel lecture: The beh mechanism and its scalar bosons. Rev. Mod. Phys., 86:843-850, Jul 2014.

[34] Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. 115 (1959) 48.

[35] Y. Aharonov and A. Casher, Phys. Rev. Lett. 53 (1984) 319; Y. Aharonov, P. Pearle and L. Vaidman, Phys. Rev. A37 (1988) 4052.

[36] G. Rosenberg and M. Franz, Phys. Rev. B82 (2010) 035105; F. S. Nogueira, A. Sudbo and I. Eremin, Phys. Rev. B92 (2015) 224507.

[37] J. P. Goedloeb, R. Keppens and S. Poedts, "Advanced Magnetohydrodynamics, with Applications to Laboratory and Astrophysical Plasmas", Cambridge University Press, 2010.

[38] R. Ruffini, G. Vereshchagin and S.-S. Xuea, Phys. Rep. 487 (2010) 1.

[39] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics (Third Edition, 1998), Cap. 4, 5 e 6.

[40] Tatsumi Aoyama, Masashi Hayakawa, Toichiro Kinoshita, and Makiko Nio PR D91, 033006 (2015)

[41] The ACME Collaboration:, Order of Magnitude Smaller Limit on the Electric Dipole Moment of the Electron, arXiv:1310.7534v2 [physics.atom-ph] 7 Nov 2013

[42] A. Sommerfeld, Annalen der Physik [4] 51, 1-167, 1916

[43] E. Fermi, Tentativo di umma Teoria de ll' Emissione dei Raggi-Beta, Ric. Scientifica 4(2) (1933) 491

[44] D. J. Gross, "Oskar Klein and Gauge Theory", A Review of the Conference "New Theories in Physics held in Warsaw, 1938, arXiv: hep-th/9411233.

[45] P.A.M Dirac, Proc. Roy. Soc A, 114, 243, 710 (1927); P. Jordan and E. P. Wigner, Zeit.f.Phys.47, 631(1928); W.Heisenberg and W. Pauli, Zs.f.Phys.56,1(1929)

[46] R. Doria, Physics of Light, AIP Conf. Proc. 1483, 95-117 (2012)

[47] J. Chauca, R. Doria, and I. Soares, Electric charge transmission through four bosons. JAP, 13(1):4535-4592, 2017.

[48] J. Chauca, R. Doria, W.Soares, Non-Linear abelian gauge model, AIP Conf. Proc. 1483, 342-351 (2012)

[49] J. Chauca, R. Doria, W.Soares, A whole origin for polarization and magnetization, AIP Conf. Proc. 1483, 395-399 (2012)

[50] J. Chauca, R. Doria, W.Soares, Gauge invariance for a whole abelian model, AIP Conf. Proc. 1483, 400-406 (2012)

[51] J. Chauca, R. Doria, W.Soares, Electromagnetic fields from two potencial fields, AIP Conf. Proc. 1483, 377-382 (2012)

[52] J. Helayel Neto, http://www.professorglobal.com.br/fisica-pos-graduacao-2017/eletromagnetismo/videos

[53] R. Doria, F.A. Rabelo de Carvalho, Petrópolis preprint (1989)

[54] R. Doria, W. Werneck de Oliveira, Rev. Bras. Fís,1, pl 20 (1990)

[55] J.A. Helayel-Neto, Patricio Gaete, A note on nonlinear electrodynamics, EPL, 119(5) DOI: 10.1209/0295-5075/119/51001

[56] Mario Novello e Erico Goulart, Eletrodinamica Nao Linear: Causalidade e Efeitos Topologicos, Livraria da Fisica, 2010.

[57] J. Plebanski. 'Lectures On Non-Linear Electrodynamics' (1970); G. Boillat, JMP, Vol 11, N3, (1970); G.Boillat, Lettere Al Nuovo Cimento, Vol4, N7 (1972)

[58] J. Chauca, R. Doria, W.Soares, Lorentz transformations for whole electromagnetic fields, AIP Conf. Proc. 1483, 383-387 (2012)

[59] R. Doria JAP, Vol17, N3, 1840-1896 (2015)

[60] P. S. Pershan, "Magneto-optical effects,"J. Appl. Phys. 38, 1482-1490 (1967).

[61] John Kerr and his Effects Found in 1878 and 1879"Philos. Magaz. Letters, December 2008, doi.org/10.1080/09500830802526604.

[62] A.G. Beda, Gemma Experiment: The results of Neutrino Magnetic Moment Search, 2013. T.10, N2(179). C-217-223; A.B. Balantekin, Neutrino Magnetic Moment, arXiv:hep-ph/0601113; H. Pérez Rojas, E. Rodríguez Querts, The photon magnetic moment problem revisited ,European Physical Journal C, EPJC-14-04-042, (2014)

[63] Nanophotonics, nano-optics and nanospectroscopy A. J. Meixner (Ed.) Thematic Series in the Open Access Beilstein Journal of Nanotechnology

[64] J. Chauca, R. Doria, W.Soares, On vectorial fields as Lorentz specie, AIP Conf. Proc. 1483, 371-376 (2012)

[65] S. Machado, I. Soares, D. Leite, R. Doria, Non-Linear Abelian Scenarios and Yang-Mills Theory, JAP Vol 13, N10 (2017)

[66] L. de Broglie, Recherches sur la théorie des quanta, Thesis (Paris), 1924; L. de Broglie, Ann. Phys. (Paris) 3, 22 (1925); C. Davisson, L.H. Germer (1927). ≪Reflection of electrons by a crystal of nickel≫. Nature. 119: 558–560.

[67] J.A. Helayel Neto, http://www.professorglobal.com.br/fisica-pos-graduacao-ii/campos-classicos-quanticos

[68] B. Podolsky, Phys. Rev 62,68 (1942); B. Podolsky, P. Schmed, Rev.Mod.Phys 20,40 (1948); T.D.Lee, G.C.Wick, Nucl. Phys. B9,209(1969), Phys-Rev.D2,1033(1970).

[69] M.Kalb, P. Rammond, Phys. Rev. D9 (1974) 2273; E. Cremmer,J.Scherk,Nucl.Phys.B72(1974) 117.

[70] I.Soares, et al, em desenvolvimento

[71] Emergence of Non-Abelian Magnetic Monopoles in a Quantum Impurity Problem, E. Yakaboylu et al., PRL 119 (2017) 235301.

[72] C. Castelnovo, R. Moessner, S. L. Sondhi, Nature 451, 42-45 (3 January 2008); H. -B. Braun et al. Nature Physics 10 (19 JAN 2014) 88; M. W. Ray et al. Nature Physics 505 (30 JAN 2014) 657.

[73] G. Sharf, From Electrostatics to Optics, Springer-Verlag (1994)

[74] S. Vavilov, Journ Rus. Phys. Chen. 60 (1928) 555; Phys.Rev 36 (1930) 1590

[75] O. Halpern, Phys.Rev. 44 (1933) 855; Phys. Rev. 44 (1934) 855

[76] J. Chauca, R. Doria, W.Soares, Feynman rules for a whole abelian model, AIP Conf. Proc. 1483, 388-394 (2012)

[77] I.Soares, et al, em desenvolvimento

[78] Daoxin Dai, Jared Bauters and John E Bowers, Passive technologies for future large-scale photonic integrated circuits on silicon: polarization handling, light non-reciprocity and loss reduction,, Light: Science and Applications (2012) 1, e1; doi:10.1038/lsa.2012.1

[79] Sin-Itiro Tomonaga, "The Story of Spin", Chicago University Press, 1998.

[80] Gerlach, W.; Stern, O. (1922). "Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld". Zeitschrift für Physik. 9: 349–352; Gerlach, W.; Stern, O. (1922). "Das magnetische Moment des Silberatoms". Zeitschrift für Physik. 9: 353–355; Gerlach, W.; Stern, O. (1922). "Der experimentelle Nachweis des magnetischen Moments des Silberatoms". Zeitschrift für Physik. 8: 110–111.

[81] S. Goudsmit e G. E. Uhlenbeck, Physica (Utrecht) 5 (1925) 266; S. Goudsmit e G. E. Uhlenbeck, Nature 117 (1926) 264; G. E. Uhlenbeck, Physics Today, June 1976, p. 43.

[82] W. Heisenberg, Zeitschrift für Physik 33 (1925) 879.

[83] E. Schrödinger, Phys. Rev. 28 (1926) 1049.

[84] W. Pauli, Zeitschrift für Physik 43 (1927) 601.

[85] E. Cartan, "Theory of Spinors", Dover Publications Inc., New York, 1981.

[86] Observation of isolated monopoles in a quantum field, M. W. Ray et al., Science 348 (2015) 544.

[87] I.Soares, et al, em desenvolvimento

[88] C. P. Burgess et al.,Bounding Anomalous Gauge-Boson Couplings, Phys. Rev. D50 (1994) 7011.

[89] P. S. Dervan et al., Anomalous Triple and Quartic and Gauge-Boson Couplings, J. Phys. G26 (2000) 7.

[90] E. Cartlidge, Physicists are planning to build lasers so powerful they could rip apart empty space, 10.1126/science.aat0939, January, 24 (2018) ; Opportunities in Intense Ultrafast Lasers: Reaching for the

Brightest Light, https://www.nap.edu/catalog/24939/opportunities-in-intense-ultrafast-lasers-reaching-for-the-brightest-light

[91] F.Valle et al., PVLAS experiment, Eur.Phys.J.C 76,24 (2016)

[92] E. I. Rashba, Cyclotron and combined resonances in a perpendicular field, Sov. Phys. Solid State 2, 1109 -1122 (1960); Linder, Jacob; Robinson, Jason W. A. (2 April 2015). "Superconducting spintronics". Nature Physics. 11 (4): 307–315. arXiv:1510.00713; M. Eschrig, "Spin-polarized supercurrents for spintronics"Physics Today 64 (2011) 43.

[93] Não há referência de spintronica spin-1

[94] I.Soares, et al, em desenvolvimento

[95] O. Zilberberg1 et al, Photonic topological boundary pumping as a probe of 4D quantum Hall physics, Nature 59, Vol 553, (2018)

[96] The ATLAS collaboration, Search for resonances in diphoton events at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector, doi:10.1007/JHEP09(2016)001

[97] M. F. Maghrebi, et al, Coulomb Bound States of Strongly Interacting Photons, Phys. Rev. Lett, 115, 123601 (2015)

[98] J. Otterbach, et al, Effective Magnetic Fields for Stationary Light, PRL 104, 033903 (2010); J. Otterbach, J. Ruseckas, R. G. Unanyan, G. Juzeliunas, M. Fleischhauer, Effective magnetic fields for stationary light, arXiv:0909.4219

[99] I. Carusotto, C. Ciuti, Quantum fluids of light, arXiv: 1205.6500 v3 (2012)

[100] Noam Matzliah et al, Laser light can strech and squeeze a whole cloud of atoms with a collective force, Phys. Rev. Lett. 119 (2017) 163201

[101] J. K. Koga, T. Hayakawa, Possible precise measurement of Delbrück scattering using polarizated photon beams, Phys. Rev. Lett. 118 (2017) 204801

[102] Nathan S. Albert R., Andrei Gromov, Synthetic Landau levels for photons, Nature 534, 671–675 (30 June 2016)

[103] CAST Collaboration, New CAST limit on the axion-photon interaction, DOI: 10.1038/NPHYS4109

[104] P. Berceau, Propagation de photons sous champs magnetíques intenses, Toulouse III,(2012)

[105] M. Fuchs, et al, Anomalous nonlinear X-ray Compton scattering, Nature Physics 11, 964–970 (2015)

[106] M. Hafezi, J. Taylor, Topological Physics with Light, Physics Today 67, 5, 68 (2014)

[107] Electroweak interactions and unified theories"52nd Rencontres de Moriond, La Thuile - Italy, March 2017 https://home.cern/scientists/updates/2017/03/wealth-precise-new-results-moriond

[108] I.Soares, et al, em desenvolvimento

[109] R.Doria, S.Machado, Yang-Mills Families, JAP Vol13, N 6 (2017)