

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS - CBPF/MCTIC
COORDENAÇÃO DE FÍSICA DE ALTAS ENERGIAS - COHEP

TESE DE DOUTORADO

**Transições de Fase em Sistemas Sujeitos a Campos
Magnéticos e definidos em Espaços com Topologia
Toroidal**

EMERSON B. S. CORRÊA

RIO DE JANEIRO - RJ
JUNHO DE 2017

EMERSON B. S. CORRÊA

**Transições de Fase em Sistemas Sujeitos a Campos Magnéticos e
definidos em Espaços com Topologia Toroidal**

Tese de Doutorado submetida ao Programa de
Pós-Graduação do Centro Brasileiro de Pesqui-
sas Físicas, como parte dos requisitos necessários
à obtenção do título de Doutor em Física.

Orientadores:

Prof. Dr. Adolfo P. C. Malbouisson

Prof. Dr. César A. Linhares

RIO DE JANEIRO - RJ
JUNHO DE 2017

Em memória de
Ademir Silva Jr.,
Maria do Socorro, e
Eliana Costa.

*Suas vidas foram interrompidas,
mas nossa amizade jamais perecerá.*

AGRADECIMENTOS

- Aos meus pais, Vidal e Lenice, pela torcida de sempre e por tudo.
- À minha amada, Michelli, por fazer parte da minha vida.
- À minha irmã, Mônica, pela convivência e ternura.
- Aos meus parças, Odirley, Mateus e Jorge Everaldo, pela amizade.
- Aos meus orientadores, Adolfo Malbouisson e César Linhares, pelos ensinamentos, pela mansidão, pela confiança depositada e por nossas tertúlias, sempre muito enriquecedoras.
- À professora Silvana Perez, por ter me incentivado a vir estudar no Sudeste e por ter me dado a oportunidade de conhecer o professor Adolfo.
- Aos professores, Luiz Sampaio, Flávio Garcia, José Helayël, César Linhares e Carlos Farina, por terem contribuído para minha formação através dos seus cursos de alto nível.
- Aos companheiros de grupo de pesquisa, Erich Cavalcante e José André, pelas discussões, nos mais variados assuntos e pela solicitude.
- À Sônia, à Awena e à Elisabete da CFC do CBPF, por todos os esclarecimentos, auxílios com a burocracia e cordialidade diária.
- À FAFIS-UNIFESSPA, pela liberação total, a partir da segunda metade deste doutorado.
- À CAPES/PRODOTORAL/PROPIT-UNIFESSPA pelo suporte financeiro.
- A todos que contribuíram direta ou indiretamente para a execução desta tese.

*“A noite fria me ensinou a amar mais o meu dia
E pela dor eu descobri o poder da alegria
E a certeza de que tenho coisas novas
Coisas novas pra dizer”
Belchior*

RESUMO

Nesta tese de doutorado investigamos efeitos de campo magnético externo, limitação espacial, potencial químico e temperatura finita em sistemas bosônicos e fermiônicos que sofrem transições de fase de primeira e segunda ordens. Fazemos correções em primeira ordem nas constantes de acoplamento, no parâmetro de massa do sistema, além de utilizar os desenvolvimentos recentes da Teoria Quântica de Campos definida em espaços com topologias toroidais. Nossos sistemas estão definidos em um espaço euclidiano D -dimensional. Compactificamos duas das D dimensões, a saber: o tempo imaginário τ e a coordenada espacial z , dando origem à temperatura β^{-1} e à limitação espacial L , respectivamente. Nestas condições, examinamos a estrutura de fase dos sistemas.

Palavras Chaves: Temperatura Finita, Campo Magnético, Tamanho Finito.

ABSTRACT

In this thesis we investigate effects coming from an external magnetic field, size restriction, chemical potential and finite temperature on bosonic as well as fermionic systems that undergo first- and second-orders phase transitions. We make corrections at first order in the coupling constants, on the mass parameter of the system; besides that we use recents developments of Quantum Field Theory defined on a space with a toroidal topology. Our systems are defined on a D -dimensional Euclidean space. We compactify just two dimensions, namely: the imaginary time τ and the spatial coordinate z , which gives the temperature β^{-1} and the spatial restriction L , respectively. Under these conditions, we investigate the phase structure of the systems.

Key-Words: Finite Temperature, Magnetic Field, Finite Size.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 – Integral de trajetória Euclidiana sobre os campos bosônicos.	26
Figura 2.2 – Topologia do espaço-tempo em uma TQC com temperatura. O raio do cilindro é igual a $\beta/2\pi$	26
Figura 3.1 – Contribuições para o potencial efetivo. Em (a) diagrama girino, e em (b) diagrama cadaço.	35
Figura 3.2 – Temperatura crítica reduzida em função do inverso da espessura reduzida do sistema para $D = 4$. Usamos $\delta_0 = 3,5$; $\lambda = 0,5$; $\eta = 0,05$; $\gamma = 0,0$ (curva contínua); $\gamma = 0,45$ (curva tracejada-pontilhada) e $\gamma = 0,9$ (curva pontilhada).	40
Figura 3.3 – Região da Fig. 3.2 que independe do potencial químico. Os dados são os mesmos da Fig. 3.2, i.e., $\delta_0 = 3,5$; $\lambda = 0,5$; $\eta = 0,05$; $\gamma = 0,0$ (curva contínua), $\gamma = 0,45$ (curva tracejada-pontilhada) e $\gamma = 0,9$ (curva pontilhada).	40
Figura 3.4 – Forma bulk da Fig. 3.2 mostrando a influência do potencial químico do sistema sobre a transição de primeira ordem. Os dados são os mesmos da Fig. 3.2, ou seja, $\delta_0 = 3,5$; $\lambda = 0,5$; $\eta = 0,05$; $\gamma = 0,0$ (curva contínua); $\gamma = 0,45$ (curva tracejada-pontilhada) e $\gamma = 0,9$ (curva pontilhada).	41
Figura 3.5 – Temperatura crítica em função do inverso do comprimento reduzido do sistema com $\delta_0 = 0,75$. Usamos novamente $\gamma = 0,0$ (curva contínua), $\gamma = 0,45$ (curva tracejada-pontilhada) e $\gamma = 0,9$ (curva pontilhada).	41
Figura 3.6 – Temperatura crítica em função do inverso do comprimento reduzido do sistema com $\delta_0 = 4,5$. Nas curvas tracejada e pontilhada, usamos $\gamma = 0,0$ e $\gamma = 0,9$, respectivamente, além das constantes $\lambda = 2,0$ e $\eta = 1,0$. Nas curvas tracejada-pontilhada e contínua, fixamos $\gamma = 0,0$ e $\gamma = 0,9$, respectivamente e constantes de acoplamento $\lambda = 4,0$ e $\eta = 2,0$	42
Figura 4.1 – Diagrama de fase para o plano $(\xi \times t_c)$. Fixamos $\delta = 8,0$; $\lambda = 2,0$ e os valores de potencial químico reduzido: $\gamma = 0,0$; $0,35$ e $0,7$, correspondendo às curvas contínua, tracejada-pontilhada e pontilhada, respectivamente.	49
Figura 4.2 – Temperatura crítica reduzida em função do inverso do tamanho do sistema. Fixamos $\gamma = 0,0$; $\lambda = 1,0$ e os valores de campo magnético: $\delta = 0,0$; $0,3$; $2,0$ e $7,0$, nas curvas contínua, tracejada, tracejada-pontilhada e pontilhada, respectivamente.	50

Figura 4.3 – <i>Influência da constante de acoplamento na transição do modelo no plano ($\xi \times t_c$). Fixamos $\gamma = 0,35$ e $\delta = 5,0$. As constantes de acoplamento foram escolhidas de acordo com os valores: $\lambda = 0,5$ (curva contínua); $1,0$ (curva tracejada); $2,0$ (curva tracejada-pontilhada)</i>	50
Figura 4.4 – <i>Densidade de energia livre tipo Ginzburg–Landau para os valores fixados: $\xi = 0,001$; $\gamma = 0,35$; $\delta = 7,0$ e $\lambda = 2,0$. A curva pontilhada mostra a fase desordenada, a qual tem temperatura igual a $1,7$. A criticalidade é obtida à temperatura $t_c \approx 0,95$ (curva tracejada-pontilhada). A fase ordenada é obtida abaixo de t_c. Na curva contínua, temos $t = 0,01$.</i>	51
Figura 4.5 – <i>Temperatura crítica reduzida em função do inverso do tamanho do sistema. Fixamos $\gamma = 0,5$; $\lambda = 2,0$ e $\eta = 1,0$. Usamos $\delta = 1,5$ (curva tracejada); $\delta = 3,0$ (curva tracejada-pontilhada); $\delta = 4,5$ (curva contínua).</i>	54
Figura 4.6 – <i>Influência do potencial químico sobre a transição de primeira ordem. Usamos $\lambda = 2,0$; $\eta = 1,0$ e $\delta = 3,0$. Temos $\gamma = 0,0$ na curva tracejada e $\gamma = 0,75$ na curva contínua.</i>	55
Figura 4.7 – <i>Quebra inversa de simetria. Existem duas temperaturas críticas para os mesmos valores de $(\gamma, \delta, \lambda, \eta)$. Fixamos $\gamma = 0,5$; $\lambda = 4,0$ e $\eta = 2,0$, além de $\delta = 1,5$.</i>	55
Figura 4.8 – <i>Densidade de energia na forma bulk (parte mais interna da Fig. 4.7). Notamos uma quebra de simetria usual. Fixamos $\gamma = 0,5$; $\lambda = 4,0$; $\eta = 2,0$ e $\delta = 1,5$. Na curva contínua, temos $t = 1,4$. A criticalidade ocorre em $t_c \approx 0,76$ (curva tracejada). Abaixo de t_c, temos a fase com quebra de simetria (na curva pontilhada, temos $t = 0,3$).</i>	56
Figura 4.9 – <i>Densidade de energia na forma bulk (parte externa da Fig. 4.7). Observamos uma quebra inversa de simetria. Fixamos $\gamma = 0,5$, $\lambda = 4,0$, $\eta = 2,0$ e $\delta = 1,5$. Na curva contínua, temos $t = 1,65$. A criticalidade é obtida em $t_c \approx 1,71$ (curva tracejada). Mesmo acima de t_c, encontramos uma região com simetria quebrada, ou seja, uma fase ordenada (na curva pontilhada, temos $t = 1,80$).</i>	56

SUMÁRIO

Lista de ilustrações	
Sumário	
1	INTRODUÇÃO 17
2	O FORMALISMO DE MATSUBARA 23
2.1	Analogia entre mecânica estatística e mecânica quântica 23
2.2	TQC a temperatura finita 25
2.3	Frequências de Matsubara 27
2.4	O formalismo de Matsubara generalizado 29
3	TRANSIÇÕES DE FASE EM SISTEMAS BOSÔNICOS 31
3.1	Efeitos de campo magnético externo em nosso modelo à temperatura zero 31
3.2	Potencial efetivo corrigido 34
3.2.1	Cálculo do diagrama <i>girino</i> 35
3.2.2	Cálculo do diagrama <i>cadarço</i> 38
3.2.3	Temperatura crítica 39
3.3	Estrutura de fases 39
4	TRANSIÇÕES DE FASE EM SISTEMAS FERMIÔNICOS 45
4.1	Transições de fase de segunda ordem sujeitas a um campo magnético externo 45
4.1.1	O modelo e o formalismo de Matsubara generalizado 46
4.1.2	Estrutura de fases 48
4.1.3	Comentário 51
4.2	Transições de fase de primeira ordem sujeitas a um campo magnético externo 52
4.2.1	O modelo estendido e o formalismo de Matsubara generalizado 52
4.2.2	Estrutura de fases 53
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS 57
	APÊNDICES 59
	APÊNDICE A – NOTAÇÃO E CONVENÇÕES 61
A.1	Rotação de Wick 61

APÊNDICE B	–	MÉTODO DE RITUS	65
B.1		Propagador bosônico livre	65
B.2		Propagador bosônico em um campo magnético	66
B.3		Propagador fermiônico livre	68
B.4		Propagador fermiônico em um campo magnético	68
APÊNDICE C	–	RELAÇÃO ENTRE OS COEFICIENTES DA EXPANSÃO DA ENERGIA LIVRE NA CRITICALIDADE PARA UMA TRANSIÇÃO DE PRIMEIRA ORDEM	73
C.1		Dedução da Eq. (3.14)	73
APÊNDICE D	–	CONTINUAÇÃO ANALÍTICA DA FUNÇÃO ZETA DE EPSTEIN– HURWITZ BI-DIMENSIONAL INOMOGÊNEA	75
D.1		Continuação analítica	75
Bibliografia			79

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Quando o estado de um sistema em equilíbrio sofre uma mudança devido à variação de algum parâmetro controlável (por exemplo, temperatura, pressão, campo magnético, campo elétrico, etc.), podemos ter uma transição de fase. As transições de fase podem ser de dois tipos: *transições de fase de primeira ordem* e *transições de fase de segunda ordem*. Na transição de fase de primeira ordem, ocorre coexistência entre as fases em equilíbrio, e devido à descontinuidade na primeira derivada da energia livre de Gibbs (ou seja, na entropia do sistema), esta transição é acompanhada de um calor latente [1]. Temos, pois, que as transições de primeira ordem são as transições usuais da termodinâmica e que elas admitem estados metaestáveis. Por exemplo, na transição líquido-gás da água, há coexistência de líquido e vapor. A energia livre de Gibbs é contínua na interface entre essas fases, mas ao atravessarmos esta interface, notamos uma mudança brusca na estrutura da água, e, *no ponto crítico*, a 218 atm e 647 K, gotas de água e bolhas de vapor se confundem de modo que a diferença entre as suas densidades desaparece, e a fase torna-se esbranquiçada, fenômeno conhecido como opalescência crítica [2].

Contudo, nas transições de segunda ordem, não há coexistência entre as fases. Neste caso, a energia livre de Gibbs sofre uma descontinuidade em sua segunda derivada (ou seja, no calor específico, na magnetização, etc...). Neste tipo de transição, não há ocorrência de estados metaestáveis e tampouco troca de calor. Um exemplo deste tipo de transição é a que ocorre no Hélio líquido a 2,186 K. Nesta temperatura, ocorre uma descontinuidade em forma de λ em seu calor específico. Landau, na década de 1930, descreveu esse fenômeno como uma transição de fase de segunda ordem, na qual as duas fases, chamadas He I (Hélio líquido normal) e He II (Hélio líquido superfluido) existem acima e abaixo do ponto λ , respectivamente, sem tal transição ser acompanhada de interface [3–6].

Outros exemplos de transições de segunda ordem são a transição de fase condutor-supercondutor e a transição de fase para-ferromagnética. Nesta última, o ferromagneto a uma temperatura $T > T_c$ (T_c é a temperatura crítica) não possui magnetização $\mathbf{M}$, pois os spins ficam distribuídos aleatoriamente no magneto, em virtude de sua agitação térmica. Porém, a uma temperatura $T < T_c$, o sistema adquire magnetização $\mathbf{M} \neq 0$ devido aos momentos magnéticos de spin dos elétrons possuírem uma orientação em comum, em média, graças às interações entre eles. A grandeza que descreve a transição e que sofre alteração conforme a temperatura seja maior ou

menor que a temperatura crítica, é chamada de *parâmetro de ordem*. Assim, no caso da transição para-ferromagnética, o parâmetro de ordem é a magnetização $\mathbf{M}$ [7].

Na transição para-ferromagnética, do ponto de vista da simetria, em $T > T_c$, dizemos que o sistema encontra-se na fase desordenada (simétrica) e o funcional *hamiltoniano* do sistema é invariante em torno de qualquer eixo de rotação, devido à distribuição aleatória dos spins. Contrariamente, em temperaturas inferiores a T_c , dizemos que o sistema está na fase ordenada (a simetria foi quebrada) e o hamiltoniano do sistema torna-se invariante apenas por rotações em torno do eixo paralelo à magnetização.

Quanto à descrição matemática das transições de fase, destacam-se o modelo fenomenológico de Ginzburg–Landau (GL) [6–8] e a Teoria Quântica de Campos (TQC) a Temperatura Finita [1, 8, 9]. O modelo GL pressupõe a existência de um parâmetro de ordem ϕ de tal modo que $\phi \rightarrow 0$ à medida que a temperatura T tende a T_c . Vale ressaltar que, neste modelo, a temperatura é introduzida através do coeficiente do termo quadrático do hamiltoniano do sistema. A importância do modelo GL não se limita à sua aplicação na supercondutividade, mas também na inspiração para trabalhos relativamente recentes, como no modelo GL com N componentes dado em [10, 11]. Por outro lado, os métodos da TQC a temperatura finita tem sido bastante usados na descrição das transições de fase com um aspecto adicional: a compactificação de coordenadas espaciais. Este novo ingrediente vem sendo largamente empregado na literatura recente, pois sistemas definidos em espaços-tempo com compactificação são de interesse em física da matéria condensada e física de partículas elementares[12]. O trabalho pioneiro em relação às compactificações foi o trabalho de Matsubara [13], o qual deu origem ao chamado *formalismo do tempo imaginário* [1, 14]. Os trabalhos listados nas referências [15–18] deram ao formalismo de Matsubara uma interpretação topológica, qual seja: quando introduzimos a temperatura no sistema, em um espaço euclidiano definido em uma variedade $\mathbf{R}^D$, estamos, na verdade, compactificando uma das dimensões da variedade, o tempo imaginário. Assim, ficamos com uma teoria escrita em uma variedade de topologia $\mathbf{\Gamma}_D^1 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}^{D-1}$, onde $\mathbf{S}^1$ é um círculo de raio $\beta/2\pi$ e $\beta = 1/k_B T$. Com efeito, uma teoria de campos que é escrita à temperatura zero em $1 + 3$ dimensões - uma dimensão temporal e três dimensões espaciais - torna-se, no formalismo de Matsubara, uma teoria de campos a temperatura finita em três dimensões espaciais.

Podemos estender a idéia da compactificação para coordenadas espaciais em um espaço-tempo com N dimensões espaciais [19]. Nesta nova perspectiva, as coordenadas espaciais compactificadas ficam limitadas a larguras L_i , onde o subíndice i refere-se a cada coordenada espacial que foi compactificada entre planos paralelos. Por exemplo, sistemas com $N = 3$, confinados a certas regiões do espaço, assumem a forma de filmes, fios e grãos, com seções transversais cartesianas, conforme executamos 1, 2 e 3 compactificações espaciais, respectivamente [1]. Os aspectos formais para a introdução tanto de temperatura quanto de compactificação espacial de uma maneira unificada foram estabelecidos apenas recentemente¹ em [1, 21]. Sob este ponto de vista unificado, qualquer conjunto de dimensões da variedade $\mathbf{R}^D$ pode ser compactificado, com D representando tanto coordenadas temporais quanto espaciais. Escrevemos então a teoria de campos em uma topologia $\mathbf{\Gamma}_D^d = (\mathbf{S}^1)^d \times \mathbf{R}^{D-d}$ com $1 \leq d \leq D$, sendo d o número de dimensões compactificadas. Cada dimensão compactificada possui a topologia de um círculo. Logo, a

¹ Estas idéias foram apresentadas em [20], de modo pouco formal, no contexto da quebra/restauração de simetria induzida por temperatura e tamanho finito do sistema.

compactificação de duas dimensões leva à topologia de um *torus*. Por isso, denominamos de modo geral, Γ_D^d como uma *topologia toroidal* [12]. Essa abordagem unificada vem sendo empregada por nosso grupo em muitos trabalhos recentes que investigaram aspectos das transições de fase tanto em sistemas bosônicos quanto fermiônicos [22–26]. Porém, os efeitos de tamanho finito foram considerados por outros autores em diferentes contextos, por exemplo: no plasma de quark-glúons formado em colisões de íons pesados [27–29]; no estudo da transição de fase quiral [30–34]; no estudo das propriedades da matéria hadrônica [35–38]; na espectroscopia da física de partículas [39] e em sistemas de matéria condensada, especificamente, cadeias de spin e supercondutores [40, 41].

Em um cenário no qual a matéria interage via força forte, a teoria que descreve a dinâmica dos graus de liberdade fundamentais (quarks e glúons) é a Cromodinâmica Quântica (QCD). Efeitos de tamanho finito também foram empregados considerando as propriedades da matéria fortemente interagente via QCD [42–44] e QCD na rede [33, 45]. Levando em conta a QCD, os hádrons seriam estados ligados dos graus de liberdade fundamentais da teoria em energias intermediárias, nas quais a expansão perturbativa torna-se sem validade. Por isso, a utilização de métodos não-perturbativos como a QCD na rede e modelos efetivos como o modelo de Nambu–Jona-Lasinio (NJL) [46, 47] e o modelo de Gross-Neveu (GN) [48] são bastante úteis.

No contexto do modelo NJL, existem vários artigos na literatura que investigam os efeitos de tamanho finito sobre a transição de fase do sistema sob consideração. Estes trabalhos levam em conta, sabores, laços de Polyakov, quebra de simetria quiral e o possível uso de escala de tamanho finito em colisões relativísticas de íons pesados [23, 24, 31, 32, 34, 49–54].

O modelo de GN, em especial, vem sendo largamente utilizado ao longo dos anos tanto em física da matéria condensada como na física hadrônica [55–66], inclusive com efeitos de tamanho finito [67]. Esta aplicabilidade é devida à relativa facilidade do uso do modelo de GN (já que os graus de liberdade dos glúons são desprezados) em relação à QCD. Tem-se portanto, em sua versão original, que o modelo GN representa uma teoria com quatro campos fermiônicos interagentes. Do mesmo modo que no caso bosônico com interação $\eta\phi^6$, o modelo GN não é renormalizável para $D = 4$. Entretanto, a necessidade de se construir modelos efetivos que reproduzam algumas características (como a liberdade assintótica) de uma teoria mais completa, faz com que a renormalizabilidade em D arbitrário não seja uma exigência absoluta [68–71].

A introdução de um campo magnético externo no sistema pode trazer resultados interessantes na análise das transições de fase, tanto em sistemas bosônicos quanto fermiônicos. Por exemplo, em colisões de íons ultra-relativísticos, campos magnéticos fortes ($B \approx 10^{18} \text{ G}$) podem ser criados perpendicularmente ao plano de colisão. Além disso, um campo mais débil ($B \approx 10^{15} \text{ G}$), poderia influenciar a transição de fase na matéria hadrônica densa em uma estrela de nêutrons [72].

Com um campo magnético externo aplicado a sistemas carregados, surgem os chamados *níveis de Landau* - as partículas carregadas adquirem níveis de energia quantizados no plano perpendicular ao campo. No contexto da teoria eletrofraca, os níveis de Landau foram tema de divergências recentes na literatura. De fato, nas referências [73, 74], os autores usaram o nível de Landau mais baixo ($\ell = 0$) em virtude de considerarem campos magnéticos fortes. Contudo, os autores de [75] contestaram estes resultados ao mostrarem que os níveis de Landau seguintes apresentavam igual contribuição, no mesmo contexto. Por isso, ao incluirmos todos os níveis de Landau nos propagadores, estaremos nos aproximando de um entendimento mais refinado

das transições de fase sujeitas a um campo magnético de fundo. Além disso, a inclusão de um campo externo seguiria uma tendência de trabalhos como [76–78], desenvolvidos pelo grupo.

Considerando as motivações elencadas acima e o fato de que uma investigação das transições de fase de primeira e segunda ordens sujeitas a um campo magnético externo com efeitos de tamanho e potencial químico finitos constituiriam um tema de pesquisa instigante e relevante, propomos nesta tese, investigar se, e como, estas transições são alteradas neste cenário. Em outros termos, investigaremos a dependência da temperatura crítica com a espessura do sistema (na forma de um filme) sujeito a um campo magnético externo, constante e homogêneo. Em essência, os assuntos abordados nesta tese foram publicados por nosso grupo de pesquisa nas Refs. [79–81].

Este trabalho está dividido da seguinte maneira: No capítulo 2, fazemos uma descrição do formalismo de Matsubara. Usaremos o formalismo de integral de trajetória para estabelecer a relação entre a descrição físico-estatística de um sistema e sua descrição sob o ponto de vista da TQC em um espaço euclidiano. Calcularemos as frequências de Matsubara e mostraremos explicitamente que os campos bosônicos (fermiônicos) estão sujeitos a frequências que são múltiplos pares (ímpares) de π/β . Ainda no capítulo 2, porém no final dele, discutiremos a generalização do formalismo de Matsubara para coordenadas espaciais. Por analogia com a coordenada τ , usaremos condições periódicas (antiperiódicas) para campos bosônicos (fermiônicos) calculados em $z = 0$ e $z = L$.

No capítulo 3 investigamos como os efeitos devidos à presença de campo magnético, potencial químico e tamanho finitos influenciam uma transição de fase de primeira ordem em um sistema bosônico. Estabelecemos a energia livre do modelo e usaremos a técnica do potencial efetivo para calcular correções (em primeira ordem nas constantes de acoplamento) a um e dois laços em seu parâmetro de massa. Finalizamos o capítulo analisando as curvas que relacionam a temperatura crítica do sistema em função de sua espessura para vários valores de campo magnético externo e constantes de acoplamento.

O capítulo 4 está dedicado a sistemas fermiônicos; especificamente, usamos um modelo tipo GN massivo para descrever férmions sujeitos a transições de primeira e segunda ordens em um campo magnético de fundo, a temperatura, tamanho e potencial químico finitos. Analisamos a estrutura de fases do sistema de férmions levando em conta os parâmetros do modelo. Estimamos, baseados em nossos resultados numéricos, a temperatura de desconfinamento de um méson com e sem campo magnético.

No capítulo 5 concluímos a tese com alguns comentários adicionais e apresentamos alguns trabalhos em andamento e em perspectiva.

No apêndice A mostramos as convenções e notação utilizada neste trabalho, além de discutir a rotação de Wick. Estas convenções são particularmente importantes quando utilizamos campos fermiônicos no espaço euclidiano.

É conveniente lembrar que, para calcularmos as correções no parâmetro de massa, o qual carrega a informação da transição de fase, precisamos do propagador de Feynman sujeito ao campo magnético externo. Por essa razão, no apêndice B, os propagadores bosônico e fermiônico são obtidos através do Método de Ritus, com todos os níveis de Landau no espaço-tempo de Minkowski e no espaço euclidiano.

Em transições de fase de primeira ordem, os coeficientes da energia livre do sistema estão relacionados através de uma equação peculiar. Esta equação é demonstrada no apêndice [C](#).

Na análise feita nesta tese sobre as transições de fase de primeira e segunda ordens, encontramos a *função zeta de Epstein–Hurwitz* (tanto para bósons quanto para férmions) e usamos sua continuação analítica. Por essa razão, no apêndice [D](#), demonstramos a expressão da continuação analítica da função zeta de Epstein–Hurwitz bi-dimensional inomogênea usada no texto.

CAPÍTULO 2

O FORMALISMO DE MATSUBARA

Neste capítulo vamos apresentar o formalismo de Matsubara. Começaremos o capítulo comparando a função de partição da mecânica estatística com o propagador de Feynman da teoria quântica, escrito no formalismo de integrais de trajetória. Após estabelecermos esta analogia, e usarmos a definição de matriz densidade, encontraremos as frequências nas quais os campos devem oscilar quando a coordenada temporal é compactificada, dando origem a temperatura no sistema. Finalizando o capítulo, estenderemos o formalismo de Matsubara a uma dimensão espacial. Usamos o sistema de unidades natural.

2.1 Analogia entre mecânica estatística e mecânica quântica

Existe uma relação interessante entre mecânica estatística quântica e mecânica quântica. Considere, por exemplo, o comportamento estatístico de um sistema quântico em equilíbrio com um reservatório à temperatura β^{-1} . As propriedades termodinâmicas deste sistema podem ser descritas através da matriz densidade $\rho(\beta)$,

$$\rho(\beta) = \exp(-\beta\mathcal{H}), \quad (2.1)$$

onde $\mathcal{H} = H - \mu N$. Na Eq. (2.1), H é o hamiltoniano do sistema, μ o potencial químico e N o operador número de partículas para o *ensemble grande canônico*. Se estivermos descrevendo um *ensemble canônico*, então $\mathcal{H} = H$. Seja qual for o ensemble utilizado¹, a média termodinâmica de qualquer quantidade observável A é dada por

$$\langle A \rangle_\beta = \left(\frac{1}{Z(\beta)} \right) \text{Tr}(\rho A), \quad (2.2)$$

onde $Z(\beta)$ é a função de partição do sistema, e é escrita como

$$Z(\beta) = \text{Tr}(\rho) = \text{Tr}(\exp(-\beta\mathcal{H})). \quad (2.3)$$

O traço na expressão acima não especifica a base que está sendo usada para calcular a função de partição. Podemos, então, usar uma base contínua unidimensional, tal que

$$Z(\beta) = \int dq \langle q | \exp(-\beta\mathcal{H}) | q \rangle. \quad (2.4)$$

¹ Para simplificar, consideraremos nas demonstrações das próximas seções, um ensemble canônico. Na seção 2.4, generalizaremos os resultados obtidos para um ensemble grande canônico.

Por outro lado, podemos considerar uma partícula transitando entre dois estados de coordenadas, ditos *inicial*, e *final*. Assim, a amplitude de transição entre os estados de coordenada q_i e q_f , no formalismo de Heisenberg, é dada por

$$\langle t_f, q_f | t_i, q_i \rangle = \langle q_f | \exp(-i(t_f - t_i)H) | q_i \rangle \equiv K(t_f, q_f; t_i, q_i), \quad (2.5)$$

onde a quantidade $K(t_f, x_f; t_i, x_i)$ é chamada de propagador.

O propagador K pode ser calculado de várias formas [82]. No *formalismo da integrais de trajetória*, ele é dado por

$$K(t_f, q_f; t_i, q_i) \equiv \mathcal{N} \int \mathcal{D}q \exp(iS(q)), \quad (2.6)$$

sendo $S(q)$ o funcional *ação* do sistema e $\mathcal{N}$ uma constante de normalização. Daqui em diante, todas as constantes multiplicativas irrelevantes para as discussões serão representadas apenas por $\mathcal{N}$. O símbolo $\mathcal{D}q$ indica que devemos somar sobre todas as trajetórias que conectam os pontos $q(t_i) \equiv q_i$ e $q(t_f) \equiv q_f$.

Voltando à Eq. (2.5), se identificarmos

$$t_f - t_i \equiv -i\beta; \quad q_f = q_i \equiv q, \quad (2.7)$$

então o propagador dado na Eq. (2.5) se assemelhará ao integrando da função de partição do sistema à temperatura β^{-1} , dada pela Eq. (2.4). Com efeito, podemos escrever²

$$Z(\beta) = \text{Tr}(\exp(-\beta\mathcal{H})) = \int dq K(t_f - t_i = -i\beta, q, q). \quad (2.8)$$

A expressão (2.8) é uma forma alternativa de calcular a função de partição de um sistema e, conseqüentemente, suas propriedades termodinâmicas. Para exemplificar, vamos calcular a função de partição de um oscilador harmônico unidimensional de massa m_{osc} , frequência ω_{osc} e funcional lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}m_{osc}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m_{osc}\omega_{osc}^2 x^2.$$

O propagador deste sistema é dado por [83, 84]

$$\begin{aligned} K(t_f - t_i, x_i, x_f) &= \sqrt{\frac{m_{osc}\omega_{osc}}{2\pi i \sin(\omega_{osc}(t_f - t_i))}} \\ &\times \exp \left\{ \frac{im_{osc}\omega_{osc}}{2 \sin(\omega_{osc}(t_f - t_i))} [(x_i^2 + x_f^2) \cos(\omega_{osc}(t_f - t_i)) - 2x_i x_f] \right\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Substituindo a Eq. (2.9) na Eq. (2.8), e levando em conta a Eq. (2.7), encontramos, após executarmos uma integração Gaussiana,

$$Z(\beta) = \frac{1}{2 \sinh(\beta\omega_{osc}/2)},$$

o que leva à energia interna do oscilador à temperatura β^{-1} ,

$$\langle H \rangle_\beta = U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = \frac{\omega_{osc}}{2} + \frac{\omega_{osc}}{\exp(\beta\omega_{osc}) - 1}.$$

² Estamos usando o fato de o propagador ser invariante por translações temporais, já que, por hipótese, H não depende do tempo.

No limite de baixas temperaturas, $\beta \rightarrow \infty$, temos: $\langle H \rangle_\beta \approx \omega_{osc}/2$ e para altas temperaturas, $\beta \rightarrow 0$, encontramos o resultado clássico: $\langle H \rangle_\beta \approx T$.

As ideias desenvolvidas nesta seção podem ser estendidas a um conjunto com N partículas. Neste caso, as coordenadas de cada partícula seriam indexadas. Este índice varreria todas as partículas do sistema, a saber: $q_a(t)$, onde $a = 1, 2, \dots, N$.

2.2 TQC a temperatura finita

No limite em que o número de partículas de um sistema vai para infinito, e a distância relativa entre elas vai a zero, teremos um sistema contínuo, com infinitos graus de liberdade, isto é, um *campo*. Neste limite, a variável dinâmica (um campo *bosônico* ou *fermiônico*) passa a ser $\Phi = \Phi(t, \vec{x})$. A propagação de distúrbios do campo é interpretada, no formalismo de integrais de trajetória, como a propagação das partículas associadas ao campo.

Uma quantidade imprescindível em TQC é o funcional gerador das funções de correlação, $Z(J)$. Especificamente, para um campo de spin zero, com lagrangiano $\mathcal{L}$, temos [85, 86]

$$Z(J) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}(\phi) + J\phi) \right], \quad (2.10)$$

onde

$$\int d^4x \mathcal{L}(\phi) = \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m_0^2}{2} \phi^2 - V(\phi) \right). \quad (2.11)$$

A fonte externa depende de x^μ , i.e., $J = J(x)$. Para assegurar a convergência da integral de trajetória, é comum a escrevermos no espaço euclidiano, fazendo $t \rightarrow -i\tau$. Este procedimento, conhecido como rotação de Wick, é apresentado no apêndice A. Logo, a ação fica escrita como

$$\int d^4x \mathcal{L}(\phi) = i \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E(\phi), \quad (2.12)$$

com

$$\mathcal{L}_E(\phi) = \frac{1}{2} \partial_{\mu_E} \phi \partial_{\mu_E} \phi + \frac{m_0^2}{2} \phi^2 + V(\phi). \quad (2.13)$$

O parâmetro τ é conhecido como tempo imaginário. Usando a Eq. (2.7), a rotação de Wick e o valor fixado $t_i \equiv 0$, temos que o parâmetro τ assumirá, nos extremos, os valores

$$\tau_i = 0 ; \quad \tau_f = \beta.$$

Com efeito,

$$Z(J) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \int d^3x (\mathcal{L}_E(\phi) - J\phi) \right]. \quad (2.14)$$

Observe que a Eq. (2.14) descreve uma TQC em 3 dimensões espaciais, no tempo imaginário, τ . Caso fôssemos estudar as propriedades termodinâmicas deste sistema, deveríamos analisar as propriedades estáticas de uma TQC a temperatura finita, i.e., obter sua inerente função de partição. Neste caso, considerando a correspondência dada pela Eq. (2.7), escrevemos a representação da função de partição, no formalismo de integrais de trajetória, como [87]

$$Z(\beta) = \text{Tr} [\exp(-\beta \mathcal{H})] = \mathcal{N} \int_{\phi(0)=\phi(\beta)} \mathcal{D}\phi \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E(\phi) \right], \quad (2.15)$$

onde a dependência espacial dos campos foi omitida, para simplificar a notação.

Na Fig. 2.1, visualizamos alguns possíveis caminhos que são computados na integral de trajetória euclidiana dada pela Eq. (2.15).

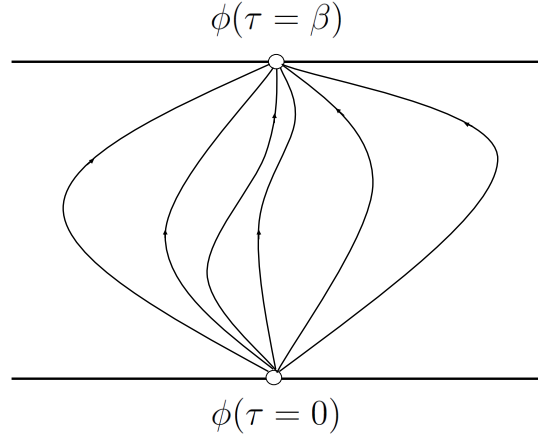


Figura 2.1 – Integral de trajetória Euclidiana sobre os campos bosônicos.

A descrição de um sistema quântico estatístico em equilíbrio térmico com um reservatório, através de uma integral de trajetória euclidiana, é conhecida como *formalismo de Matsubara*.

Até aqui, executamos os seguintes passos:

TQC minkowskiana em $1 + 3$ dimensões $\rightarrow$ TQC euclidiana em 4 dimensões $\rightarrow$ Sistema quântico à temperatura β^{-1} em 3 dimensões espaciais.

Neste caso, a topologia do espaço-tempo torna-se $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}^3$. Isto é, a topologia “deixa” de ser plana e podemos representá-la pictoricamente como na Fig. 2.2.

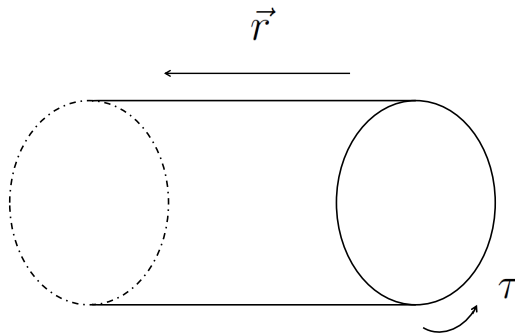


Figura 2.2 – Topologia do espaço-tempo em uma TQC com temperatura. O raio do cilindro é igual a $\beta/2\pi$.

2.3 Frequências de Matsubara

Por conveniência, vamos investigar as propriedades da *função de Green* térmica para bósons e férmions. Vamos definir o operador de *ordenamento temporal imaginário* [88]

$$\mathcal{T}_\tau \left(A(\tau, \vec{x}) A^\dagger(\tau', \vec{y}) \right) = \theta(\tau - \tau') A(\tau, \vec{x}) A^\dagger(\tau', \vec{y}) \pm \theta(\tau' - \tau) A^\dagger(\tau', \vec{y}) A(\tau, \vec{x}), \quad (2.16)$$

onde o sinal “+” (“−”) será usado caso o operador A represente um campo bosônico (fermiônico). A função de Green bosônica será

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{T}_\tau \left(A(\tau, \vec{x}) A^\dagger(0, \vec{y}) \right) \right\rangle_\beta &= Z^{-1} \text{Tr} \left(e^{-\beta \mathcal{H}} \mathcal{T}_\tau \left(A(\tau, \vec{x}) A^\dagger(0, \vec{y}) \right) \right), \\ &= Z^{-1} \text{Tr} \left(e^{-\beta \mathcal{H}} \left(A(\tau, \vec{x}) A^\dagger(0, \vec{y}) \right) \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Usando a propriedade de ciclicidade do traço e a desigualdade $0 < \tau < \beta$, temos³

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{T}_\tau \left(A(\tau, \vec{x}) A^\dagger(0, \vec{y}) \right) \right\rangle_\beta &= Z^{-1} \text{Tr} \left(A^\dagger(0, \vec{y}) e^{-\beta \mathcal{H}} A(\tau, \vec{x}) \right), \\ &= Z^{-1} \text{Tr} \left(e^{-\beta \mathcal{H}} e^{+\beta \mathcal{H}} A^\dagger(0, \vec{y}) e^{-\beta \mathcal{H}} A(\tau, \vec{x}) \right), \\ &= Z^{-1} \text{Tr} \left(e^{-\beta \mathcal{H}} A^\dagger(\beta, \vec{y}) A(\tau, \vec{x}) \right), \\ &= Z^{-1} \text{Tr} \left(e^{-\beta \mathcal{H}} \mathcal{T}_\tau \left(A(\tau, \vec{x}) A^\dagger(\beta, \vec{y}) \right) \right), \\ &= + \left\langle \mathcal{T}_\tau \left(A(\tau, \vec{x}) A^\dagger(\beta, \vec{y}) \right) \right\rangle_\beta. \end{aligned} \quad (2.18)$$

A Eq. (2.18) representa as chamadas *condições Kubo-Martin-Schwinger* (KMS) para bósons, escritas no espaço euclidiano.

Portanto, o campo bosônico possui período β :

$$A^\dagger(0, \vec{y}) = A^\dagger(\beta, \vec{y}) \Rightarrow \phi(0, \vec{y}) = \phi(\beta, \vec{y}).$$

A função de Green para campos bosônicos a temperatura finita é *periódica* no tempo imaginário.

Por outro lado, se considerarmos que o campo $A(\tau, \vec{x})$ representa um campo fermiônico, e tendo em vista o operador de ordenamento temporal imaginário definido acima, é fácil mostrar que o campo fermiônico é *anti-periódico*:

$$A^\dagger(0, \vec{y}) = -A^\dagger(\beta, \vec{y}) \Rightarrow \psi(0, \vec{y}) = -\psi(\beta, \vec{y}).$$

Com efeito, a função de Green a temperatura finita, será periódica (antiperiódica) conforme a natureza bosônica (fermiônica) do campo, isto é:

$$\left\langle \mathcal{T}_\tau \left(A(\tau) A^\dagger(\tau') \right) \right\rangle_\beta \equiv G_\beta(\tau, \tau') = \pm G_\beta(\tau + \beta, \tau'). \quad (2.19)$$

Vamos prosseguir com o cálculo das frequências a que os campos estão sujeitos no formalismo de Matsubara. A série de Fourier de um campo bosônico ou fermiônico, $\Phi(\tau, \vec{x})$, com período β é dada por

$$\Phi(\tau, \vec{x}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(\vec{x}) \exp(-i\omega_n \tau), \quad (2.20)$$

³ A partir do formalismo de Heisenberg e da rotação de Wick, obtemos $A(t) = e^{i\mathcal{H}t} A(0) e^{-i\mathcal{H}t} \rightarrow A(\beta) = e^{\beta \mathcal{H}} A(0) e^{-\beta \mathcal{H}}$.

com $\tau \in [0, \beta]$ e $n \in Z$. Tendo em vista a natureza do campo, podemos escrever

$$\Phi(\tau, \vec{x}) = \pm \Phi(\tau + \beta, \vec{x}). \quad (2.21)$$

Usando a definição dada na Eq. (2.20), é fácil mostrar que

$$\pm \exp(-i\omega_n\beta) = 1. \quad (2.22)$$

Assim, devemos usar as seguintes prescrições

$$\text{frequências relativas a campos bosônicos: } \omega_n = (2n)\pi/\beta;$$

$$\text{frequências relativas a campos fermiônicos: } \omega_n = (2n+1)\pi/\beta,$$

tal que em ambos os casos, $n \in Z$.

Levando em conta os possíveis valores que as frequências ω_n assumem, temos a relação de ortogonalidade:

$$\int_0^\beta d\tau \exp(+i\omega_m\tau) \exp(-i\omega_n\tau) = \beta \delta_{n,m}. \quad (2.23)$$

É fácil mostrar que os coeficientes c_m são dados por

$$c_m(\vec{x}) = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau \Phi(\tau, \vec{x}) \exp(+i\omega_m\tau). \quad (2.24)$$

Considerando as Eqs. (2.20) e (2.24), podemos escrever o campo $\Phi(\tau, \vec{x})$ como

$$\Phi(\tau, \vec{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega_n\tau) \tilde{\Phi}(\vec{x}). \quad (2.25)$$

De um ponto de vista prático, considerando as relações demonstradas nos apêndices A e B desta tese e o formalismo de Matsubara, podemos sintetizar estas ideias da seguinte forma

Transformada de Fourier do propagador do campo bosônico:

$$\int \frac{dk^0}{(2\pi)} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{k^2 - m_0^2 + i\epsilon} \rightarrow \int \frac{dk_\tau}{(2\pi)} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k_E^2 + m_0^2} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k_E^2 + m_0^2},$$

onde realizamos a rotação de Wick no espaço dos momenta, isto é, $k^0 \rightarrow ik_\tau$. Além disso, $k_E^2 = \omega_n^2 + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ e $\omega_n = (2n)\pi/\beta$.

Transformada de Fourier do propagador do campo fermiônico:

$$\int \frac{dk^0}{(2\pi)} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i(\not{k} + m_0)}{k^2 - m_0^2 + i\epsilon} \rightarrow \int \frac{dk_\tau}{(2\pi)} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(\not{k}_E - m_0)}{k_E^2 + m_0^2} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(\not{k}_E - m_0)}{k_E^2 + m_0^2},$$

onde $\not{k} = \gamma^\mu k_\mu$, $k_E^2 = \omega_n^2 + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$, $\omega_n = (2n+1)\pi/\beta$ e, na passagem intermediária, usamos $\not{k} = -\not{k}_E$, conforme é discutido no apêndice A.

2.4 O formalismo de Matsubara generalizado

A aplicação do formalismo de Matsubara para coordenadas espaciais segue o procedimento desenvolvido na seção anterior e pode ser encontrado em [1, 12, 19, 21]. Suponhamos que temos um modelo definido em um espaço euclidiano quadri-dimensional. Como sabemos, podemos compactificar uma dessas dimensões - a coordenada τ do quadri-vetor $x_E^\mu = (\tau, x, y, z)$ - e introduzir a temperatura β^{-1} no sistema. Além disso, podemos introduzir um potencial químico μ no modelo. Neste caso, teremos simplesmente que adicionar o termo $-i\mu$ na componente temporal do momentum [88]. Adicionalmente, podemos compactificar uma direção espacial (por exemplo, a direção z), teríamos, portanto, um modelo limitado espacialmente e definido no intervalo $0 < z \leq L$. Como vimos na última seção, as condições KMS revelam condições de contorno periódicas (anti-periódicas) para o campo bosônico (fermiônico), o que engendra valores bem definidos para a componente temporal da transformada de Fourier do propagador do referido campo. Contudo, em princípio, não há restrição sobre suas componentes espaciais. Assim, por analogia com as condições KMS, nesta tese vamos usar condições de contorno periódicas (anti-periódicas) para a componente z da transformada de Fourier do propagador do campo bosônico (fermiônico). Em essência, temos as modificações

Campos Bosônicos

$$\int \frac{dk_\tau}{(2\pi)} \int \frac{dk_z}{(2\pi)} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{k_E^2 + m_0^2} \rightarrow \frac{1}{\beta L} \sum_{n_\tau=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_z=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{k_E^2 + m_0^2}, \quad (2.26)$$

onde $k_E^2 = \omega_{n_\tau}^2 + \omega_{n_z}^2 + k_x^2 + k_y^2$ e

$$\omega_{n_\tau} = \left(2n_\tau - \frac{i\mu\beta}{\pi}\right) \frac{\pi}{\beta}; \quad \omega_{n_z} = (2n_z) \frac{\pi}{L}. \quad (2.27)$$

Campos Fermiônicos

$$\int \frac{dk_\tau}{(2\pi)} \int \frac{dk_z}{(2\pi)} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(k_E - m_0)}{k_E^2 + m_0^2} \rightarrow \frac{1}{\beta L} \sum_{n_\tau=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_z=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(k_E - m_0)}{k_E^2 + m_0^2}, \quad (2.28)$$

onde $k_E^2 = \omega_{n_\tau}^2 + \omega_{n_z}^2 + k_x^2 + k_y^2$ e neste caso,

$$\omega_{n_\tau} = \left(2n_\tau + 1 - \frac{i\mu\beta}{\pi}\right) \frac{\pi}{\beta}; \quad \omega_{n_z} = (2n_z + 1) \frac{\pi}{L}. \quad (2.29)$$

com $n_\tau, n_z \in Z$. Este é o *formalismo de Matsubara generalizado*. Nos próximos capítulos, aplicaremos esse formalismo ao estudo de transições de fase de primeira e segunda ordens, ambas sujeitas a um campo magnético de fundo.

CAPÍTULO 3

TRANSIÇÕES DE FASE EM SISTEMAS BOSÔNICOS

Os resultados apresentados neste capítulos foram publicados por nosso grupo na Ref. [79]. Inspirados no modelo GL, usaremos o potencial $V(\phi) = -\lambda_0\phi^4 + \eta_0\phi^6$, com $\lambda_0 > 0, \eta_0 > 0$ para descrever um sistema no qual ocorre uma transição de fase de primeira ordem. Na seção 3.1 faremos a definição do modelo bosônico que vamos usar e o investigaremos, à temperatura zero, na presença de um campo magnético. Na seção 3.2 aplicaremos o formalismo de Matsubara generalizado ao sistema bosônico para descrever uma transição de fase de primeira ordem sujeita a um campo magnético, potencial químico e tamanho finitos. Mostraremos a relação que os parâmetros do modelo devem obedecer na criticalidade e calcularemos as correções a um e dois laços no potencial efetivo da teoria. Compactificaremos duas das D dimensões do sistema, a saber: o tempo imaginário e uma dimensão espacial. Analisaremos a estrutura de fases do sistema mediante a solução numérica da equação que envolve a espessura do sistema em função de sua temperatura na seção 3.3. Concluiremos o capítulo observando que deve existir uma espessura mínima do sistema, independentemente do potencial químico, abaixo da qual a transição de fase deixa de existir.

3.1 Efeitos de campo magnético externo em nosso modelo à temperatura zero

No modelo GL, a temperatura é introduzida através do parâmetro de massa m_0^2 presente no hamiltoniano do sistema e o modelo é válido para temperaturas próximas à temperatura crítica. Trabalhos recentes envolvendo o modelo GL em um campo magnético externo, no contexto da supercondutividade, são listados nas referências [10, 89]. Entretanto, na presente tese, usaremos a Teoria Quântica de Campos a Temperatura Finita. Especificamente, introduziremos a temperatura β^{-1} e a limitação espacial L (a espessura do filme aquecido) no sistema, através do formalismo de Matsubara generalizado. Portanto, partiremos de uma teoria euclidiana em D dimensões e compactificaremos d delas. Nesta perspectiva, o parâmetro de massa m_0^2 se resume a um parâmetro fixo do modelo e as temperaturas abrangidas não se limitam à região crítica,

mas ao intervalo $0 \leq T < \infty$. Nosso modelo é definido por um campo escalar complexo em um espaço euclidiano D -dimensional com coordenadas cartesianas dadas por $\mathbf{r} = (\tau, x, y, z, \vec{w})$ sendo $\vec{w}$ um vetor $(D-4)$ -dimensional. O hamiltoniano possui a forma [79, 90]

$$H = \int d^D r \left(|D_\mu \phi(\mathbf{r})|^2 + m_0^2 |\phi(\mathbf{r})|^2 - \frac{\lambda_0}{4} |\phi(\mathbf{r})|^4 + \frac{\eta_0}{6} |\phi(\mathbf{r})|^6 \right), \quad (3.1)$$

onde m_0^2 é um parâmetro de massa, $\lambda_0 > 0$ e $\eta_0 > 0$ são as constantes de autoacoplamento físicas quártica e sêxtica, respectivamente, à temperatura zero e na ausência da compactificação espacial. A derivada D_μ será dada por

$$D_\mu = \partial_\mu - ie_0 A_\mu^{\text{ext}}, \quad (3.2)$$

sendo e_0 a carga do campo escalar complexo. Utilizaremos o calibre $A_\mu^{\text{ext}} = (0, 0, Bx, 0, \dots, 0)$, o qual produz um campo magnético externo de magnitude B , constante e homogêneo na direção z .

Para calcularmos os efeitos de temperatura e limitação espacial, através do potencial efetivo, precisamos antes de tudo, conhecer o propagador de Feynman do sistema sujeito ao campo externo. Como sabemos, existem várias técnicas para o cálculo do propagador, e a seguir o encontraremos via expansão em autofunções do operador de Sturm-Liouville associado ao termo cinético do hamiltoniano. Contudo, o mesmo propagador será calculado através do Método de Ritus no apêndice B, a fim de dar subsídio ao cálculo do propagador fermiônico em um campo magnético externo.

A parte quadrática em ϕ do hamiltoniano dado pela Eq. (3.1) fica, após integrarmos por partes, desconsiderarmos termos de superfície e usar o calibre declarado acima

$$H = - \int d^D r \phi^*(\mathbf{r}) \mathcal{D} \phi(\mathbf{r}), \quad (3.3)$$

onde o operador $\mathcal{D}$ é dado por

$$\mathcal{D} = \nabla^2 - 2i\omega_0 x \partial_y - \omega_0^2 x^2 - m_0^2, \quad (3.4)$$

sendo ∇^2 o laplaciano em D dimensões e $\omega_0 \equiv e_0 B$ a frequência de cíclotron. As autofunções normalizadas e os autovalores associados ao operador $\mathcal{D}$ são encontrados após separarmos as variáveis na equação diferencial. Eles são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \chi_a(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{2^\ell \ell!}} \left(\frac{\omega_0}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[-i \left(k_\tau \tau - \omega_0 k_y y - k_z z - \vec{q} \cdot \vec{w} \right) \right] \\ &\times \exp \left[-\frac{\omega_0}{2} \left(x - k_y \right)^2 \right] H_\ell \left[\sqrt{\omega_0} (x - k_y) \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$E_\ell = k_\tau^2 + k_z^2 + (2\ell + 1)\omega_0 + \vec{q}^2 + m_0^2, \quad (3.6)$$

onde $a \equiv (\ell, k_\tau, \omega_0 k_y, k_z, \vec{q})$, o subíndice ℓ denota os *níveis de Landau* ($\ell = 0, 1, 2, \dots$), $\vec{q}$ representa um vetor $(D-4)$ -dimensional no espaço dos momenta e H_ℓ corresponde aos polinômios de Hermite. Note que k_y tem dimensão diferente das dimensões de k_τ, k_z ou $\vec{q}$.

O propagador, em termos das autofunções apresentadas na Eq. (3.5) e dos autovalores dados na Eq. (3.6), se escreve [79, 90]

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', B) = \int \frac{d^{D-4}q}{(2\pi)^{D-4}} \int \frac{dk_\tau}{(2\pi)} \frac{dk_z}{(2\pi)} \int \frac{\omega_0 dk_y}{(2\pi)} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\chi_\ell(\mathbf{r}) \chi_\ell^*(\mathbf{r}')}{E_\ell}. \quad (3.7)$$

Calcularemos dois tipos de contribuições para o potencial efetivo, quais sejam: os diagramas denominados *girino* e *cadarço*. Com efeito, precisaremos expressar o propagador $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ no espaço dos momenta e no limite $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$. Levando em conta a condição de ortonormalidade dos polinômios de Hermite

$$\int_{-\infty}^{+\infty} du H_n(u) H_m(u) \exp(-u^2) = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm},$$

podemos mostrar que, neste limite,

$$G(B) = \int \frac{d^{D-4}q}{(2\pi)^{D-4}} \int \frac{dk_\tau}{(2\pi)} \frac{dk_z}{(2\pi)} \frac{\omega_0}{(2\pi)} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \mathcal{G}(k_\tau, k_z, \vec{q}, B), \quad (3.8)$$

com

$$\mathcal{G}(k_\tau, k_z, \vec{q}, B) = \frac{1}{k_\tau^2 + k_z^2 + \vec{q}^2 + m_\ell^2(\omega_0)}, \quad (3.9)$$

onde, para simplificar a notação, definimos

$$m_\ell^2(\omega_0) \equiv (2\ell + 1)\omega_0 + m_0^2. \quad (3.10)$$

A partir das Eqs. (3.7) e (3.5) vemos que o propagador $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', B)$ não é invariante por translações no plano xy . Com efeito, a introdução do campo magnético reduz para $D - 2$ o número de dimensões invariantes por translações, embora o sistema continue definido em D dimensões euclidianas.

Dessa forma, o campo magnético quebra a simetria por translação em duas das D dimensões do espaço euclidiano. Entretanto, essa quebra de invariância translacional no plano xy não representará uma restrição à aplicação do formalismo da compactificação de coordenadas. De fato, as teorias de campo definidas em uma topologia toroidal necessariamente assumem coordenadas com simetria de invariância translacional [12, 21]; contudo, em nosso sistema, ainda restam $D - 2$ coordenadas com tal simetria inafetada pelo campo magnético externo. Portanto, ao introduzirmos a temperatura no sistema (compactificando a coordenada τ) e o tamanho finito (compactificando a coordenada z) estamos fixando a dimensão mínima de nosso sistema, a saber $D \geq 4$. Para $D = 4$, após as duas compactificações, teremos a correspondência: $(\tau, x, y, z) \rightarrow (\beta, x, y, L)$. Como dito anteriormente, essa configuração representa um sistema à temperatura β^{-1} e com largura L , isto é, um sistema confinado espacialmente entre dois planos paralelos com distância entre eles igual a L . Tal sistema possui três dimensões espaciais e está sob um campo magnético externo na direção z - um filme aquecido com espessura L sujeito a um campo magnético. Sob a perspectiva da TQC a temperatura finita, podemos interpretar este sistema como um gás de quanta do campo escalar complexo à temperatura β^{-1} , restrito ao tamanho finito L .

3.2 Potencial efetivo corrigido

Determinaremos correções de temperatura, potencial químico, tamanho finito e campo magnético no parâmetro de massa do hamiltoniano (3.1), via potencial efetivo. O parâmetro corrigido será dado por

$$m^2(\beta, \mu, L, \omega_0) = m_0^2 + \Sigma(\beta, \mu, L, \omega_0), \quad (3.11)$$

onde a quantidade $\Sigma(\beta, \mu, L, \omega_0)$ carrega as referidas correções. As constantes de acoplamento, em princípio, poderiam ser corrigidas de forma análoga: $\lambda(\beta, \mu, L, \omega_0) = \lambda_0 + \Pi(\beta, \mu, L, \omega_0)$ e $\eta(\beta, \mu, L, \omega_0) = \eta_0 + \Xi(\beta, \mu, L, \omega_0)$. Contudo, nesta tese, não consideraremos efeitos de correção nas constantes de acoplamento.

A densidade de energia livre tipo Ginzburg–Landau, é definida da maneira usual [1, 7, 9]

$$\mathcal{F}(\phi_c) = \mathcal{A} |\phi_c|^2 + \mathcal{B} |\phi_c|^4 + \mathcal{C} |\phi_c|^6, \quad (3.12)$$

onde o campo clássico $\phi_c = \langle 0|\phi|0 \rangle$ representa o parâmetro de ordem da transição e as quantidades $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ se ajustam de tal modo que, na criticalidade,

$$\mathcal{F}(\phi_c) = 0; \quad \frac{\delta \mathcal{F}(\phi_c)}{\delta \phi_c} = 0, \quad (3.13)$$

o que resulta em uma relação que envolve os coeficientes presentes na energia livre, a saber¹

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}^2/4\mathcal{C}. \quad (3.14)$$

Podemos comparar o hamiltoniano dado na Eq. (3.1) com a energia livre definida na Eq. (3.12). Neste caso, na criticalidade, teremos: $\mathcal{A} = m^2(\beta_c, \mu, L, \omega)$, $\mathcal{B} = -\lambda_0/4$, $\mathcal{C} = \eta_0/6$ e a condição dada na Eq. (3.14), se tornará

$$m^2(\beta_c, \mu, L, \omega_0) = \frac{3\lambda_0^2}{32\eta_0}. \quad (3.15)$$

Conforme já estabelecemos, nosso sistema é definido em D dimensões euclidianas, tal que as coordenadas e seus momenta conjugados são dados pela correspondência $(\tau, x, y, z, \vec{w}) \rightarrow (k_\tau, k_x, k_y, k_z, \vec{q})$, sendo $\vec{w}$ e $\vec{q}$ vetores $(D-4)$ dimensionais. No entanto, com a inserção do campo magnético, os momenta k_x e k_y desaparecem em virtude da não-invariância por translação espacial no plano xy , conforme demonstram as Eqs. (3.7) e (3.5). Podemos dizer que o efeito resultante da introdução do campo magnético externo foi a redução dimensional das coordenadas que são invariantes por translação espacial.

O método a ser seguido é o desenvolvido em [91, 92] para obter o potencial efetivo do modelo. Este método consiste em uma expansão no número de laços nos diagramas de Feynman. Com efeito, na aproximação a um laço teremos uma série com infinitos termos de diagramas com todos os números de inserções dos vértices ϕ^4 , isto é com duas pernas externas em cada vértice, somado a isso, teremos uma série com infinitos termos de diagramas a um laço com todos os números de inserções do vértice ϕ^6 , ou seja com quatro pernas externas em cada vértice. Também devemos adicionar nessa expansão, os diagramas de um laço com todas os tipos de inserções mistas de

¹ A demonstração da Eq. (3.14) encontra-se no apêndice C desta tese.

duas e quatro pernas externas. Devemos fazer o mesmo para diagramas a dois laços e assim por diante. Levar em conta todos esses diagramas torna-se impraticável. Por isso, vamos restringir os cálculos do potencial efetivo aos termos de ordem mais baixa na expansão em laços. Se nossa aproximação for restrita a termos de primeira ordem nas constantes de acoplamento, apenas dois diagramas precisam ser calculados, os já citados: diagrama *girino* (um laço) e diagrama *cadarço* (dois laços), veja a Fig. 3.1. Em nossa aproximação, o potencial efetivo será dado por

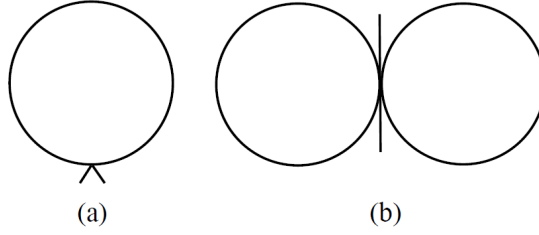


Figura 3.1 – Contribuições para o potencial efetivo. Em (a) diagrama *girino*, e em (b) diagrama *cadarço*.

$$V(\phi) = V_0(\phi) + V_1(\phi) + V_2(\phi), \quad (3.16)$$

onde $V_0(\phi) = (m_0^2/2)\phi^2$ e os subíndices 1 e 2 referem-se às contribuições a um e dois laços, respectivamente. A massa física é definida em termos da segunda derivada do potencial efetivo em relação ao campo clássico, tomado a zero:

$$\left. \frac{d^2 V(\phi_c)}{d\phi_c^2} \right|_{\phi_c=0} = m^2. \quad (3.17)$$

Após fazermos as correções de temperatura, potencial químico, tamanho e campo magnético finitos, a massa física calculada através da Eq. (3.17) deverá ser substituída pela massa física corrigida, $m^2(\beta, L, \mu, \omega_0)$.

3.2.1 Cálculo do diagrama *girino*

A expressão para o potencial efetivo a um laço em um espaço euclidiano D -dimensional, livre é dada por [1, 12, 91, 92],

$$V_1(\phi_c) = \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{(-1)^v}{2v} \left(\frac{\lambda_0 \phi_c^2}{2} \right)^v \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^v}, \quad (3.18)$$

onde v representa o número de inserções de vértices no diagrama, sendo que para o diagrama *girino*, temos $v = 1$. No entanto, para efeito de generalidade, manteremos o somatório em v e apenas no final dos cálculos o tomaremos igual à unidade. Para calcularmos a contribuição $V_1(\phi_c)$ na presença do campo magnético B , vamos substituir o propagador livre dado na Eq. (3.18),

pelo propagador sujeito ao campo magnético externo calculado na seção 3.1, isto é,

$$V_1(\phi_c) = \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{(-1)^v}{2v} \left(\frac{\lambda_0 \phi_c^2}{2} \right)^v \times \left\{ \frac{\omega_0}{(2\pi)} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \int \frac{d^{D-4}q}{(2\pi)^{D-4}} \int \frac{dk_\tau}{(2\pi)} \frac{dk_z}{(2\pi)} \frac{1}{[k_\tau^2 + k_z^2 + \vec{q}^2 + m_\ell^2(\omega_0)]^v} \right\}, \quad (3.19)$$

onde usamos as Eqs. (3.8) e (3.9). Vamos substituir na Eq. (3.19) a prescrição de Matsubara generalizada dada na Eq. (2.26) a fim de introduzir a temperatura e a limitação espacial no sistema. Fazendo isso, ficamos com

$$V_1(\phi_c) = \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{(-1)^v}{2v} \left(\frac{\lambda_0 \phi_c^2}{2} \right)^v \left\{ \frac{\omega_0}{(2\pi)} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta L} \sum_{n_\tau, n_z=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^{D-4}q}{(2\pi)^{D-4}} \frac{1}{\left[\left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^2 (n_\tau - \frac{i\mu\beta}{2\pi})^2 + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 n_z^2 + \vec{q}^2 + m_\ell^2(\omega_0) \right]^v} \right\}. \quad (3.20)$$

Antes de prosseguirmos com os cálculos, é conveniente introduzirmos as quantidades adimensionais

$$a_\tau \equiv 1/(m_0\beta)^2 \equiv t^2; \quad b_\tau \equiv i\mu\beta/2\pi = i\gamma/2\pi t; \quad \gamma \equiv \mu/m_0; \quad (3.21)$$

$$a_z \equiv 1/(m_0L)^2 \equiv \xi^2; \quad b_z \equiv 0; \quad c_\ell^2 \equiv \frac{m_\ell^2(\omega_0)}{4\pi^2 m_0^2} = \frac{\delta_0(2\ell+1)+1}{4\pi^2}; \quad \delta_0 \equiv \frac{\omega_0}{m_0^2}.$$

As quantidades t , ξ , γ e δ_0 são chamadas de temperatura reduzida, inverso de comprimento reduzido, potencial químico reduzido e campo magnético reduzido, respectivamente. Substituindo as relações dadas em (3.21) na Eq. (3.20), obtemos

$$V_1(\phi_c) = \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{(-1)^v}{2v} \left(\frac{\lambda_0 \phi_c^2}{2} \right)^v \left\{ \frac{\omega_0}{(2\pi)} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{m_0^{2-2v} \sqrt{a_\tau a_z}}{(4\pi^2)^v} \sum_{n_\tau, n_z=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^{D-4}q}{(2\pi)^{D-4}} \frac{1}{[a_\tau(n_\tau - b_\tau)^2 + a_z(n_z - b_z)^2 + (\frac{\vec{q}}{2\pi m_0})^2 + c_\ell^2]^v} \right\}. \quad (3.22)$$

Fazendo a mudança de variáveis $q'_j = q_j/(2\pi m_0)$ e levando em conta a integral de regularização dimensional,

$$\int \frac{d^d h}{(h^2 + \Delta)^n} = \pi^{d/2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{n - \frac{d}{2}}, \quad (3.23)$$

podemos escrever a Eq. (3.22) como

$$V_1(\phi_c) = \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{(-1)^v}{2v} \left(\frac{\lambda_0 \phi_c^2}{2} \right)^v \left[\frac{\omega_0}{(2\pi)} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{m_0^{D-2-2v} \sqrt{a_\tau a_z}}{(4\pi^2)^v} \sum_{n_\tau, n_z=-\infty}^{+\infty} \times \frac{\pi^{(D-4)/2}}{\Gamma(v)} \Gamma\left(v - \frac{D-4}{2}\right) \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{v - \frac{D-4}{2}} \right], \quad (3.24)$$

onde

$$\Delta = a_\tau(n_\tau - b_\tau)^2 + a_z(n_z - b_z)^2 + c_\ell^2.$$

Para simplificar, definimos

$$f(\nu, D) \equiv \frac{\omega_0}{(2\pi)} \frac{m_0^{D-2-2v} \sqrt{a_\tau a_z}}{(4\pi^2)^v} \frac{\pi^{(D-4)/2}}{\Gamma(v)} \Gamma(\nu), \quad (3.25)$$

com

$$\nu \equiv v - \frac{D-4}{2}.$$

Assim,

$$V_1(\phi_c) = \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{(-1)^v}{2v} \left(\frac{\lambda_0 \phi_c^2}{2} \right)^v \left[\sum_{\ell=0}^{+\infty} f(\nu, D) Z_2^{c_\ell^2}(\nu, a_\tau, a_z, b_\tau, b_z) \right], \quad (3.26)$$

onde identificamos a função zeta de Epstein–Hurwitz inhomogênea, definida como

$$Z_2^{c_\ell^2}(\nu, a_\tau, a_z, b_\tau, b_z) = \sum_{n_\tau, n_z=-\infty}^{+\infty} \left[a_\tau(n_\tau - b_\tau)^2 + a_z(n_z - b_z)^2 + c_\ell^2 \right]^{-\nu}. \quad (3.27)$$

As funções zeta tem sua continuação analítica definida em todo plano complexo ν e a forma geral (para $j = 1, 2$) igual a²

$$\begin{aligned} Z_2^{c_\ell^2}(\nu, \{a_j\}, \{b_j\}) &= \frac{\pi |c_\ell|^{2-2\nu} \Gamma(\nu-1)}{\Gamma(\nu) \sqrt{a_1 a_2}} + \frac{4\pi^\nu |c_\ell|^{1-\nu}}{\Gamma(\nu) \sqrt{a_1 a_2}} \\ &\times \left[\sum_{j=1}^2 \sum_{n_j=1}^{+\infty} \cos(2\pi n_j b_j) \left(\frac{n_j}{\sqrt{a_j}} \right)^{\nu-1} K_{\nu-1} \left(\frac{2\pi c_\ell n_j}{\sqrt{a_j}} \right) \right. \\ &+ 2 \sum_{n_1, n_2=1}^{+\infty} \cos(2\pi n_1 b_1) \cos(2\pi n_2 b_2) \left(\sqrt{\frac{n_1^2}{a_1} + \frac{n_2^2}{a_2}} \right)^{\nu-1} \\ &\left. \times K_{\nu-1} \left(2\pi c_\ell \sqrt{\frac{n_1^2}{a_1} + \frac{n_2^2}{a_2}} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde $K_{\nu-1}(z)$ são as funções de Bessel modificadas do segundo tipo. Podemos aplicar a Eq. (3.28) na Eq. (3.26) com a identificação $1 \rightarrow \tau$ e $2 \rightarrow z$. Levando isso em conta, e que $\nu = v - (D-4)/2$, percebemos que o termo proporcional a $\Gamma(\nu-1)$ na Eq. (3.28) é singular para $D \geq 4$ par. Por isso, o suprimiremos. Este procedimento de regularização é bastante conhecido e empregado no contexto do efeito Casimir [93].

Tomando $v = 1$, usando as relações dadas na Eq. (3.25) e levando em conta a parte finita da Eq. (3.28), podemos escrever a contribuição a um laço para o potencial efetivo dada na Eq. (3.26) como,

$$V_1(\phi_c, t, \xi, \gamma, \delta_0) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_0 \phi_c^2}{2} \right) \left[\frac{\delta_0 m_0^{D-2}}{\pi (2\pi)^{(D-2)/2}} \mathcal{K}(t, \xi, \gamma, \delta_0) \right], \quad (3.29)$$

² Para detalhes na demonstração da Eq. (3.28), veja o apêndice D desta tese.

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(t, \xi, \gamma, \delta_0) = & \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left[\sum_{n_\tau=1}^{+\infty} \cosh\left(\frac{\gamma n_\tau}{t}\right) \left(\frac{t}{n_\tau} \sqrt{\delta_0(2\ell+1)+1}\right)^{\frac{D-4}{2}} K_{\frac{D-4}{2}}\left(\frac{n_\tau}{t} \sqrt{\delta_0(2\ell+1)+1}\right) \right. \\
& + \sum_{n_z=1}^{+\infty} \left(\frac{\xi}{n_z} \sqrt{\delta_0(2\ell+1)+1}\right)^{\frac{D-4}{2}} K_{\frac{D-4}{2}}\left(\frac{n_z}{\xi} \sqrt{\delta_0(2\ell+1)+1}\right) \\
& + 2 \sum_{n_\tau, n_z=1}^{+\infty} \cosh\left(\frac{\gamma n_\tau}{t}\right) \left(\frac{\sqrt{\delta_0(2\ell+1)+1}}{\sqrt{\frac{n_\tau^2}{t^2} + \frac{n_z^2}{\xi^2}}}\right)^{\frac{D-4}{2}} \\
& \left. \times K_{\frac{D-4}{2}}\left(\sqrt{\frac{n_\tau^2}{t^2} + \frac{n_z^2}{\xi^2}} \sqrt{\delta_0(2\ell+1)+1}\right) \right]. \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Na Eq. (3.30) usamos a propriedade de simetria da função de Bessel modificada, $K_\alpha(z) = K_{-\alpha}(z)$, além das quantidades adimensionais definidas nas relações (3.21).

Para traçar gráficos, definimos as constantes de acoplamento adimensionais,

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{m_0^{4-D}}; \quad \eta = \frac{\eta_0}{m_0^{6-2D}}. \quad (3.31)$$

Em termos da constante λ , escrevemos o potencial efetivo com correções de temperatura, tamanho finito, potencial químico e campo magnético dado na Eq. (3.29) como

$$V_1(\phi_c, t, \xi, \gamma, \delta_0) = -\frac{m_0^2 \phi_c^2 \lambda \delta_0}{4\pi(2\pi)^{(D-2)/2}} \mathcal{K}(t, \xi, \gamma, \delta_0). \quad (3.32)$$

A Eq. (3.30) impõe uma restrição ao potencial químico reduzido γ à medida que n torna-se grande. De fato, para $D = 4$ e grandes valores do argumento da função de Bessel, podemos usar a fórmula assintótica $K_0(z) \approx \sqrt{(\pi/2z)} \exp(-z)$, tal que o termo

$$\begin{aligned}
\cosh(n\gamma/t) K_0\left(\frac{n}{t} \sqrt{\delta_0(2\ell+1)+1}\right) \approx & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi t}{2n \sqrt{\delta_0(2\ell+1)+1}}} \\
& \times \left[\exp\left(-\frac{n}{t} \left(\sqrt{\delta_0(2\ell+1)+1} - \gamma\right)\right) \right. \\
& \left. + \exp\left(-\frac{n}{t} \left(\sqrt{\delta_0(2\ell+1)+1} + \gamma\right)\right) \right], \quad (3.33)
\end{aligned}$$

não converge para qualquer valor de γ , devido à primeira exponencial na expressão acima. Vemos então que a soma em n na Eq. (3.30) convergirá se os valores para o potencial químico reduzido forem tais que

$$0 \leq \gamma < \sqrt{\delta_0(2\ell+1)+1}. \quad (3.34)$$

No entanto, para assegurar a convergência num cenário de campo magnético fraco, vamos restringir o potencial químico reduzido aos valores $0 \leq \gamma < 1$. O mesmo argumento é válido para o termo contendo a soma dupla na Eq. (3.30).

3.2.2 Cálculo do diagrama *cadarço*

Para um teoria euclidiana D -dimensional livre de compactificações ou campos externos, a contribuição a dois laços para o potencial efetivo é dada, essencialmente, pelo produto de dois

girinos [1, 9]

$$V_2(\phi_c) = \frac{\eta_0 \phi_c^2}{16} \left[\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)} \right]^2. \quad (3.35)$$

Para calcularmos os efeitos de campo magnético, à temperatura zero, basta substituírmos na expressão acima, o propagador livre pelo propagador dado nas Eqs. (3.8) e (3.9). Além disso, para a introdução de temperatura, limitação espacial e potencial químico, procedemos de maneira totalmente análoga ao que fizemos a um laço. Em termos da constante de acoplamento adimensional dada na Eq. (3.31), a contribuição a dois laços para o potencial efetivo será

$$V_2(\phi_c, t, \xi, \gamma, \delta_0) = \frac{m_0^2 \phi_c^2 \eta \delta_0^2}{16\pi^2 (2\pi)^{(D-2)}} [\mathcal{K}(t, \xi, \gamma, \delta_0)]^2. \quad (3.36)$$

3.2.3 Temperatura crítica

Vamos usar as Eqs. (3.16) e as Eqs. (3.32) e (3.36) para obter o parâmetro de massa em função da temperatura, tamanho finito, potencial químico e campo magnético. É fácil mostrar, a partir da Eq. (3.17), que

$$m^2(t, \xi, \gamma, \delta_0) = m_0^2 \left\{ 1 - \frac{\lambda \delta_0}{2\pi (2\pi)^{(D-2)/2}} \mathcal{K}(t, \xi, \gamma, \delta_0) + \frac{\eta \delta_0^2}{8\pi^2 (2\pi)^{(D-2)}} [\mathcal{K}(t, \xi, \gamma, \delta_0)]^2 \right\}, \quad (3.37)$$

sendo $\mathcal{K}$ dado pela Eq. (3.30). Por outro lado, podemos reescrever a Eq. (3.15) em termos das constantes de acoplamento adimensionais definidas na Eq. (3.31). Neste caso, teremos

$$m^2(t_c, \xi, \gamma, \delta_0) = m_0^2 \left(\frac{3\lambda^2}{32\eta} \right). \quad (3.38)$$

Portanto, quando o sistema sofre transição de fase de primeira ordem, podemos igualar as Eqs. (3.37) e (3.38) de modo que, na criticalidade, encontramos a equação transcendental

$$1 - \frac{\lambda \delta_0}{2\pi (2\pi)^{(D-2)/2}} \mathcal{K}(t_c, \xi, \gamma, \delta_0) + \frac{\eta \delta_0^2}{8\pi^2 (2\pi)^{(D-2)}} \mathcal{K}^2(t_c, \xi, \gamma, \delta_0) - \frac{3\lambda^2}{32\eta} = 0. \quad (3.39)$$

Na próxima seção resolveremos numericamente a Eq. (3.39) e investigaremos a região de quebra de simetria do modelo. Obteremos a curva que relaciona a temperatura crítica reduzida do sistema em função do inverso do comprimento, potencial químico e campo magnético reduzidos, isto é, $t_c = t_c(\xi, \gamma, \delta_0)$.

3.3 Estrutura de fases

Para resolvermos a Eq. (3.39), vamos fixar a dimensão de nosso modelo em $D = 4$. Como já foi dito, isso corresponde a um filme aquecido de espessura L sob a ação de um campo magnético externo na direção z . Na versão online desta tese, apresentamos todos os gráficos com código de cores.

Na Fig. 3.2 mostramos como a temperatura crítica do sistema varia em função do inverso do comprimento reduzido. Fixamos o campo magnético reduzido a $\delta_0 = 3,5$ e plotamos três curvas, de acordo com os valores escolhidos para o potencial químico: $\gamma = 0,0; 0,5$ e $0,9$.

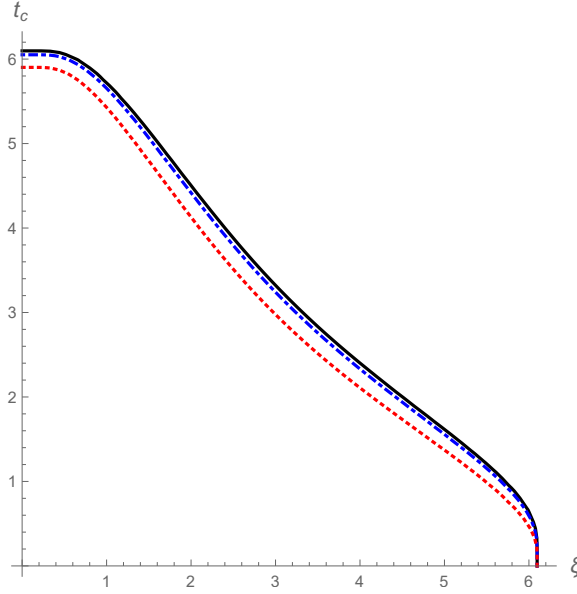


Figura 3.2 – Temperatura crítica reduzida em função do inverso da espessura reduzida do sistema para $D = 4$. Usamos $\delta_0 = 3,5$; $\lambda = 0,5$; $\eta = 0,05$; $\gamma = 0,0$ (curva contínua); $\gamma = 0,45$ (curva tracejada-pontilhada) e $\gamma = 0,9$ (curva pontilhada).

A Fig. 3.2 sugere que existe uma espessura mínima do sistema, L_{min} , ou seja um valor $\xi_{max} = 1/L_{min}$ acima do qual a transição de fase deixa de existir. O gráfico também indica que esta espessura mínima parece ser independente do potencial químico.

Na Fig. 3.3 explicitamos a região que aparentemente independe do potencial químico, apresentada na Fig. 3.2.

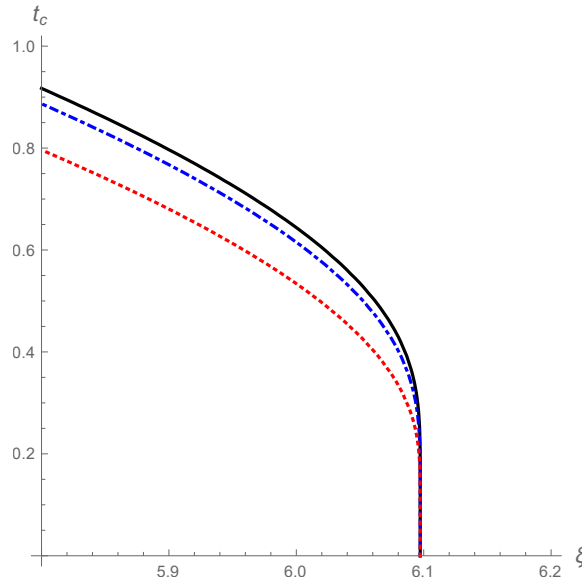


Figura 3.3 – Região da Fig. 3.2 que independe do potencial químico. Os dados são os mesmos da Fig. 3.2, i.e., $\delta_0 = 3,5$; $\lambda = 0,5$; $\eta = 0,05$; $\gamma = 0,0$ (curva contínua), $\gamma = 0,45$ (curva tracejada-pontilhada) e $\gamma = 0,9$ (curva pontilhada).

Na Fig. 3.4 explicitamos a fraca influência do potencial químico na região *bulk* ($\xi \rightarrow 0$) da Fig. 3.2.

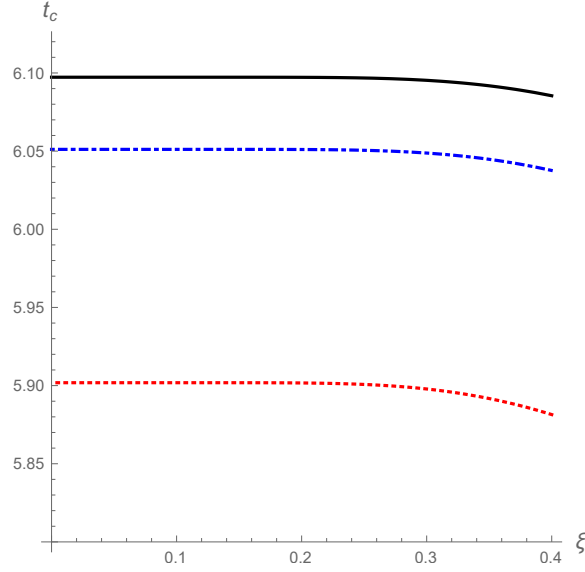


Figura 3.4 – *Forma bulk da Fig. 3.2 mostrando a influência do potencial químico do sistema sobre a transição de primeira ordem. Os dados são os mesmos da Fig. 3.2, ou seja, $\delta_0 = 3,5$; $\lambda = 0,5$; $\eta = 0,05$; $\gamma = 0,0$ (curva contínua); $\gamma = 0,45$ (curva tracejada-pontilhada) e $\gamma = 0,9$ (curva pontilhada).*

Na Fig. 3.5 plotamos novamente a temperatura crítica do sistema em função do inverso de sua espessura reduzida, mas com um valor para campo magnético menor: 0,75. Usamos os mesmos valores de potencial químico reduzido e constantes de acoplamento da Fig. 3.2.

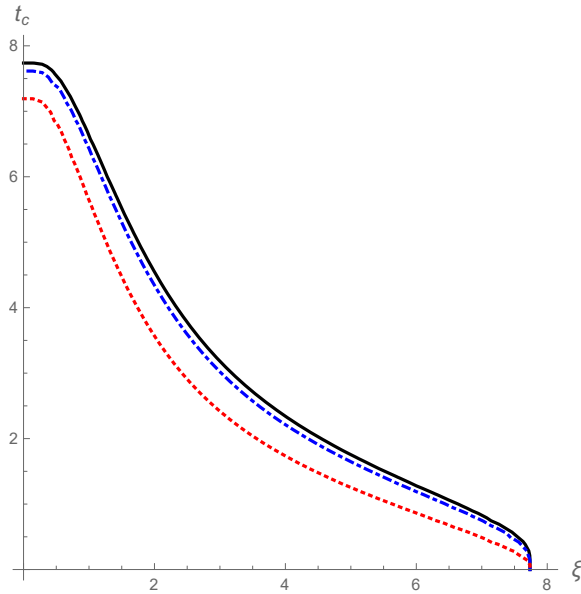


Figura 3.5 – *Temperatura crítica em função do inverso do comprimento reduzido do sistema com $\delta_0 = 0,75$. Usamos novamente $\gamma = 0,0$ (curva contínua), $\gamma = 0,45$ (curva tracejada-pontilhada) e $\gamma = 0,9$ (curva pontilhada).*

Da Fig. 3.5, observamos que quando diminuimos a intensidade do campo magnético aplicado, a temperatura crítica do sistema aumentou. Além disso, analogamente ao observado na Fig. 3.3, a Fig. 3.5 indica a existência de uma espessura mínima, $L_{min}(\delta_0)$, abaixo da qual a transição cessa.

Para explicar este efeito, notemos que para $\xi = \xi_{max}$, na Fig. 3.3 ou 3.5, temos $t_c \rightarrow 0$. Neste caso, os argumentos das funções de Bessel dependentes de t na Eq. (3.30) tornam-se muito grandes, justificando o uso da fórmula assintótica

$$K_0(z) \approx \sqrt{(\pi/2z)} \exp(-z).$$

Os termos que envolvem o potencial químico na Eq. (3.30) podem ser agrupados a essas funções de Bessel, tal qual feito na Eq. (3.33). Com efeito, no limite $t \rightarrow 0$ e considerando a restrição

$$\gamma < \sqrt{\delta_0(2\ell + 1) + 1},$$

vemos que os termos contendo fatores como o apresentado na Eq. (3.33) tenderão a zero, não contribuindo, portanto, para a Eq. (3.30). Consequentemente, a Eq. (3.39) não deverá depender do potencial químico no limite $t \rightarrow 0$, tal como revelado nos gráficos.

Na Fig. 3.6 analisamos o comportamento do sistema para outros valores das constantes de acoplamento adimensionais.

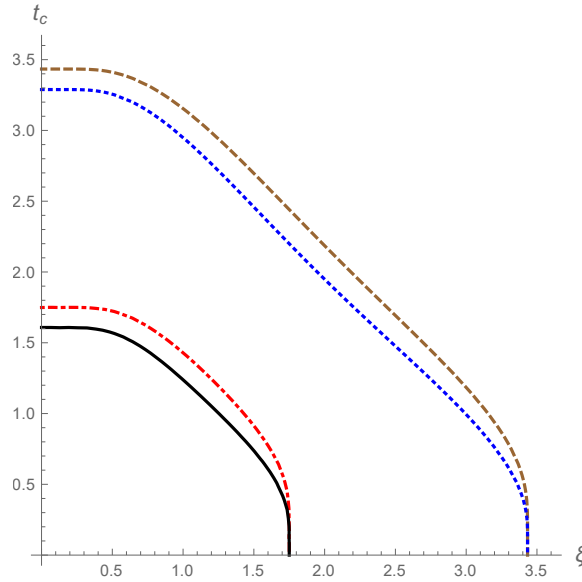


Figura 3.6 – Temperatura crítica em função do inverso do comprimento reduzido do sistema com $\delta_0 = 4,5$. Nas curvas tracejada e pontilhada, usamos $\gamma = 0,0$ e $\gamma = 0,9$, respectivamente, além das constantes $\lambda = 2,0$ e $\eta = 1,0$. Nas curvas tracejada-pontilhada e contínua, fixamos $\gamma = 0,0$ e $\gamma = 0,9$, respectivamente e constantes de acoplamento $\lambda = 4,0$ e $\eta = 2,0$.

O papel das constantes de acoplamento λ e η no modelo é análogo ao papel do campo magnético, i.e., baixar a temperatura crítica do sistema. A partir da Fig. 3.6, observamos que a fase quebrada (ordenada) do sistema diminui à medida que as constantes de acoplamento tornam-se mais intensas. Porém, o potencial químico do sistema apresenta pouca influência na estrutura de fases do modelo. De fato, da Fig. 3.4, observamos que o efeito desempenhado pelo potencial químico reduzido é baixar ligeiramente a temperatura crítica do sistema.

O efeito de tamanho finito na transição de primeira ordem sujeita a um campo magnético constante e homogêneo na direção z demonstra a existência de uma espessura mínima, tal que abaixo dela não ocorre transição de fases no sistema. Este resultado é compatível com o fato de o

sistema possuir um comprimento de correlação mínimo. A existência de uma espessura mínima do sistema para que ocorra transição não é uma peculiaridade apenas dos sistemas bosônicos. De fato, este comportamento também é encontrado em sistemas compostos por férmions e será analisado em detalhe no próximo capítulo.

CAPÍTULO 4

TRANSIÇÕES DE FASE EM SISTEMAS FERMIÔNICOS

Neste capítulo abordaremos transições de fase de primeira e segunda ordens em um sistema fermiônico. Usaremos um modelo interagente e massivo, tipo GN com uma componente espinorial, tal como feito em [94], ao invés de apresentar o modelo interagente usual, com N componentes espinoriais [67]. Como no capítulo anterior, descreveremos as transições de fase do sistema através de sua densidade de energia livre. Para construir esta densidade, escreveremos a média térmica no ensemble grand canônico dos campos fermiônicos. Esta média térmica desempenhará o papel de parâmetro de ordem do modelo. Na seção 4.1 definiremos o modelo e investigaremos se, e como, a temperatura crítica do sistema sofrendo transição de segunda ordem é afetada devido à inserção de um campo magnético externo, limitações na coordenada z e potencial químico. Analisaremos a estrutura de fases da transição e faremos uma conexão entre os nossos resultados e alguns aspectos da física hadrônica relacionados a um méson. Na seção 4.2, estenderemos o modelo e investigaremos a influência magnética, de potencial químico e tamanho finito sobre o sistema fermiônico sujeito a uma transição de primeira ordem. O final do capítulo é dedicado à análise da estrutura de fases desta transição termodinâmica.

4.1 Transições de fase de segunda ordem sujeitas a um campo magnético externo

Os cálculos e resultados obtidos nesta seção foram publicados na Ref. [80]. Para descrever um sistema fermiônico sujeito a um campo magnético externo na direção z usaremos um modelo tipo GN massivo em D dimensões euclidianas, descrito pelo hamiltoniano

$$H = \int d^D r \left(\psi^\dagger(\mathbf{r})(i\mathcal{D} - m_0)\psi(\mathbf{r}) + \frac{\lambda_0}{2} \left(\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) \right)^2 \right), \quad (4.1)$$

onde $m_0 > 0$ e $\lambda_0 > 0$ são a massa física e a constante de acoplamento à temperatura zero e sem efeitos de potencial químico e tamanho finito, respectivamente. Do mesmo modo que no caso bosônico, a derivada é dada por $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu^{\text{ext}}$. O calibre é o mesmo do capítulo anterior, a saber: $A_\mu^{\text{ext}} = (0, 0, Bx, \dots, 0)$. As matrizes γ são elementos da álgebra de Clifford no

espaço euclidiano, vide Eq. (A.12), no final do apêndice A. Ao fazermos a análise dimensional da Eq. (4.1) notamos que λ_0 tem dimensão de $[massa]^{2-D}$.

Para levarmos em conta os efeitos, a um laço, da temperatura β^{-1} , potencial químico μ , e tamanho finito L sobre o parâmetro de massa m_0 através do formalismo de Matsubara generalizado, definimos a massa dependente da temperatura, potencial químico, tamanho finito e campo magnético, $m(D, T, L, \mu, \omega)$,

$$m(D, T, L, \mu, \omega) = m_0 + \Sigma(D, T, L, \mu, \omega), \quad (4.2)$$

sendo $\omega = eB$.

Para compormos a densidade de energia livre, faremos um *ansatz*: os campos fermiônicos escritos na Eq. (4.1) serão submetidos a uma média térmica no ensemble grand canônico. O parâmetro de ordem do modelo, $\varphi(\mathbf{r})$, será definido como

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sqrt{\langle \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \rangle_\beta}.$$

Assim, a densidade de energia livre tipo Ginzburg–Landau fica dada por

$$f(\varphi) = -m(D, \beta, L, \mu, \omega) \varphi^2 + \lambda_0 \varphi^4. \quad (4.3)$$

No caso fermiônico, o sinal negativo na Eq. (4.3) implica que, na fase desordenada (simétrica), temos $m(D, \beta, L, \mu, \omega) < 0$, enquanto na fase ordenada (quebrada), $m(D, T, L, \mu, \omega) > 0$. O conjunto de pontos (D, T, L, μ, ω) que anula o coeficiente $m(D, \beta, L, \mu, \omega)$, define a transição de fase de segunda ordem. Com efeito, temos uma quebra espontânea de simetria na temperatura T_c , tal que a condição $m(D, T_c, L, \mu, \omega) = 0$ se cumpra. Fixaremos $D = 4$, portanto, $\mathbf{r} = (\tau, x, y, z)$.

Reproduziremos aqui o propagador fermiônico sujeito a um campo magnético externo. Este propagador foi calculado em detalhes no apêndice B, via método de Ritus. No espaço euclidiano, o propagador é dado, no limite $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$, por

$$S_E(B) \equiv \left(\frac{\omega}{2\pi} \right) \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{s=\pm 1} \int \frac{dp_\tau}{(2\pi)} \frac{dp_z}{(2\pi)} \frac{(\not{p}_E - m_0)}{\bar{p}_E^2 + m_0^2}, \quad (4.4)$$

com $\bar{p}_E^2 = p_\tau^2 + p_z^2 + \omega(2\ell + 1 - s)$, sendo $s = \pm 1$ a variável de spin e ℓ representa os níveis de Landau.

4.1.1 O modelo e o formalismo de Matsubara generalizado

A massa corrigida apenas por efeitos de campo magnético é dada por

$$m(\omega) = m_0 + \Sigma(\omega), \quad (4.5)$$

onde a autoenergia Σ , a um laço, é dada por

$$\Sigma(\omega) = -\lambda_0 \text{tr} \left[\left(\frac{\omega}{2\pi} \right) \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{s=\pm 1} \int \frac{dp_\tau}{(2\pi)} \frac{dp_z}{(2\pi)} \frac{(\not{p}_E - m_0)}{\bar{p}_E^2 + m_0^2} \right], \quad (4.6)$$

Como o traço de um número ímpar de matrizes γ é zero, reescrevemos a Eq. (4.6) sob uma forma apropriada para a extensão analítica,

$$\Sigma(\omega) = \frac{2\lambda_0 m_0 \omega}{\pi} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{s=\pm 1} \int \frac{dp_\tau}{(2\pi)} \frac{dp_z}{(2\pi)} \frac{1}{[p_\tau^2 + p_z^2 + \omega(2\ell + 1 - s) + m_0^2]^\nu} \Big|_{\nu=1}. \quad (4.7)$$

Para aplicar as correções de temperatura finita, potencial químico e restrição espacial à autoenergia, usamos as regras de Feynman dadas pela Eq. (2.29). Teremos, então,

$$\begin{aligned} \Sigma(t, \xi, \gamma, \delta) &= \frac{m_0 \lambda \delta t \xi}{2\pi^3} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{s=\pm 1} \sum_{n_\tau, n_z=-\infty}^{+\infty} \\ &\times \frac{1}{[a_\tau(n_\tau - b_\tau)^2 + a_z(n_z - b_z)^2 + c_\ell^2(s)]^\nu} \Big|_{\nu=1}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde usamos as quantidades adimensionais definidas abaixo:

$$\begin{aligned} \lambda &\equiv \lambda_0 m_0^2; \quad c_\ell^2(s) \equiv \frac{\delta(2\ell + 1 - s) + 1}{4\pi^2}; \quad \delta = \frac{\omega}{m_0^2}; \\ a_\tau &= (m_0 \beta)^{-2} = t^2; \quad a_z = (m_0 L)^{-2} = \xi^2; \\ b_\tau &\equiv i\beta\mu/2\pi - 1/2 = i\gamma/2\pi t - 1/2; \quad \gamma = \mu/m_0; \quad b_z \equiv -1/2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Observe que as definições dadas nas Eqs. (4.9) e (3.21) concordam para os valores de a_τ, a_z e γ .

Usando a definição dada pela Eq. (3.27) e sua continuação analítica dada pela Eq. (3.28), escrevemos a Eq. (4.8) novamente em termos da função zeta de Epstein–Hurwitz:

$$\begin{aligned} \Sigma(t, \xi, \gamma, \delta) &= \frac{m_0 \lambda \delta}{2\pi^3} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{s=\pm 1} \left\{ \pi [c_\ell(s)]^{2-2\nu} \frac{\Gamma(\nu-1)}{\Gamma(\nu)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4\pi^\nu [c_\ell(s)]^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \mathcal{R}_{c_\ell(s)}(\nu, t, \xi, \gamma) \right\} \Big|_{\nu=1}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{c_\ell(s)}(\nu, t, \xi, \gamma) &= \sum_{n_\tau=1}^{+\infty} (-1)^{n_\tau} \cosh\left(\frac{n_\tau \gamma}{t}\right) \left(\frac{n_\tau}{t}\right)^{\nu-1} K_{\nu-1}\left(\frac{2\pi c_\ell(s) n_\tau}{t}\right) \\ &\quad + \sum_{n_z=1}^{+\infty} (-1)^{n_z} \left(\frac{n_z}{\xi}\right)^{\nu-1} K_{\nu-1}\left(\frac{2\pi c_\ell(s) n_z}{\xi}\right) \\ &\quad + 2 \sum_{n_\tau, n_z=1}^{+\infty} (-1)^{n_\tau+n_z} \cosh\left(\frac{n_\tau \gamma}{t}\right) \left(\sqrt{\frac{n_\tau^2}{t^2} + \frac{n_z^2}{\xi^2}}\right)^{\nu-1} \\ &\quad \times K_{\nu-1}\left(2\pi c_\ell(s) \sqrt{\frac{n_\tau^2}{t^2} + \frac{n_z^2}{\xi^2}}\right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Tal qual o caso bosônico, notamos que o primeiro termo da Eq. (4.10) é divergente para $\nu \rightarrow 1$, mas o segundo termo é regular. Para obter uma autoenergia finita, devemos descartar esse termo singular. Na verdade, deveríamos expandir ao redor de $\nu = 1$ e isolar o polo no termo $\propto c_\ell^{2-2\nu} 1/(\nu-1)$. Contudo, isso iria engendrar um termo logarítmico dependente dos níveis de Landau, que divergiria quando somado em ℓ . Por isso, usamos a prescrição da subtração mínima

modificada. Este procedimento remove todos os termos que acompanham a expansão em $\nu = 1$ e é equivalente a subtrair todo o primeiro termo na Eq. (4.10).

Temos então que a massa corrigida finita será dada por

$$\Sigma_R(t, \xi, \gamma, \delta) = \frac{2m_0\lambda\delta}{\pi^2} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{s=\pm 1} \mathcal{R}_{c_\ell(s)}(1, t, \xi, \gamma), \quad (4.12)$$

onde $\mathcal{R}_{c_\ell(s)}(1, t, \xi, \gamma)$ é dado na Eq. (4.11).

É fácil mostrar que após a soma sobre as polarizações de spin, a massa corrigida escrita a partir das Eqs. (4.12) e (4.5) torna-se

$$\frac{m(t, \xi, \gamma, \delta)}{m_0} = 1 + \frac{2\lambda\delta}{\pi^2} \left[\mathcal{F}_0(t, \xi, \gamma, \delta) + 2 \sum_{\ell=1}^{+\infty} \mathcal{F}_\ell(t, \xi, \gamma, \delta) \right], \quad (4.13)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\ell(t, \xi, \gamma, \delta) &= \sum_{n_\tau=1}^{+\infty} (-1)^{n_\tau} \cosh\left(\frac{n_\tau \gamma}{t}\right) K_0\left(\frac{\sqrt{2\delta\ell+1} n_\tau}{t}\right) \\ &+ \sum_{n_z=1}^{+\infty} (-1)^{n_z} K_0\left(\frac{\sqrt{2\delta\ell+1} n_z}{\xi}\right) \\ &+ 2 \sum_{n_\tau, n_z=1}^{+\infty} (-1)^{n_\tau+n_z} \cosh\left(\frac{n_\tau \gamma}{t}\right) \\ &\times K_0\left(\sqrt{2\delta\ell+1} \sqrt{\frac{n_\tau^2}{t^2} + \frac{n_z^2}{\xi^2}}\right), \quad \ell = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.14)$$

Analogamente ao caso bosônico, podemos mostrar que a Eq. (4.14) é bem definida para valores do potencial químico no intervalo $0 \leq \gamma < \sqrt{2\delta\ell+1}$. No entanto, para considerar campos magnéticos arbitrariamente pequenos, e levar em conta o termo $\mathcal{F}_0$, definimos $0 \leq \gamma < 1$.

De maneira similar ao modelo GL, em nosso modelo, a criticalidade é alcançada quando a massa corrigida se anula, i.e., $m(t_c, \xi, \gamma, \delta) = 0$. Esta imposição produz soluções que relacionam a espessura, campo magnético aplicado, potencial químico e temperatura crítica do sistema.

Para investigar o comportamento do sistema sem a presença de campo magnético externo, basta substituir $D_\mu \rightarrow \partial_\mu$ no hamiltoniano do sistema. Neste caso, temos invariância por translação no plano xy , e portanto, é necessário usarmos a fórmula da integral de regularização dimensional dada na Eq. (3.23), para o caso especial em que $d = 2$. Seguindo passos totalmente análogos aos descritos nesta seção, encontramos que o parâmetro de massa levando em conta efeitos de temperatura, tamanho e potencial químico finitos, é dado por

$$\frac{m(t, \xi, \gamma)}{m_0} = 1 + \frac{2\lambda}{\pi^2} \mathcal{R}_c(0, t, \xi, \gamma), \quad (4.15)$$

onde $c = 1/2\pi$.

4.1.2 Estrutura de fases

Vamos examinar a estrutura de fases do modelo. Na Fig. 4.1, plotamos curvas que mostram o comportamento da temperatura crítica reduzida, t_c , em função do inverso da espessura reduzida

do sistema, ξ , para três valores do potencial químico reduzido, a saber: $\gamma = 0,0; 0,35$ e $0,7$, de acordo com a legenda contínua, tracejada-pontilhada e pontilhada, respectivamente. Além de fixar o valor da constante de acoplamento reduzida a $2,0$, usamos o campo magnético reduzido igual a $8,0$. A parte interior de cada curva corresponde à região com simetria quebrada.

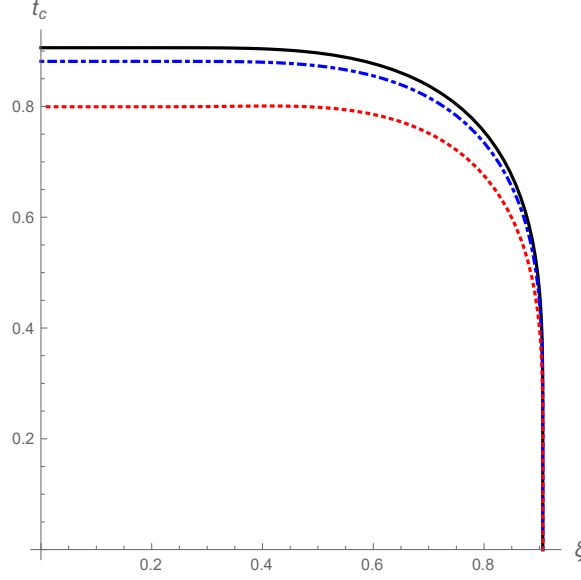


Figura 4.1 – Diagrama de fase para o plano $(\xi \times t_c)$. Fixamos $\delta = 8,0$; $\lambda = 2,0$ e os valores de potencial químico reduzido: $\gamma = 0,0; 0,35$ e $0,7$, correspondendo às curvas contínua, tracejada-pontilhada e pontilhada, respectivamente.

Na Fig. 4.2 observamos que o campo magnético aplicado realça o comportamento da temperatura crítica reduzida em função do inverso do comprimento reduzido, i.e., para campos magnéticos mais fortes, temos temperaturas críticas menores. Neste caso, o campo magnético tem o papel de reduzir a temperatura crítica do sistema. Este fenômeno é conhecido como *catálise magnética inversa*. Nesta figura, exibimos quatro curvas críticas no plano $(\xi \times t_c)$ para valores nulos do potencial químico reduzido. Fixamos $\lambda = 1,0$ e alguns valores do campo magnético: $\delta = 0,0$ (curva contínua), $\delta = 0,3$ (curva tracejada), $\delta = 2,0$ (curva tracejada-pontilhada) e $\delta = 7,0$ (curva pontilhada). A curva com campo magnético nulo foi obtida através da Eq. (4.15). Na Ref. [95] os autores encontraram o fenômeno da catálise magnética inversa em QCD na rede, para campos magnéticos intermediários.

Na Fig. 4.3 mostramos a influência da magnitude da constante de autoacoplamento no modelo sob transição.

Na Fig. 4.4 traçamos o gráfico da densidade de energia livre do sistema em função de seu parâmetro de ordem. Nesta figura consideramos o sistema na forma *bulk* (numericamente, utilizamos $\xi = 0,001$).

As curvas mostram, analogamente ao caso bosônico, que existe um tamanho mínimo L_0 , i.e., um valor ξ_0 para o qual a temperatura de transição desaparece. Além disso, este tamanho mínimo é independente do potencial químico. No entanto, existe uma pequena dependência da temperatura crítica em relação ao potencial químico, para grandes valores da espessura do filme, ou seja, pequenos valores de ξ , veja a Fig. 4.1.

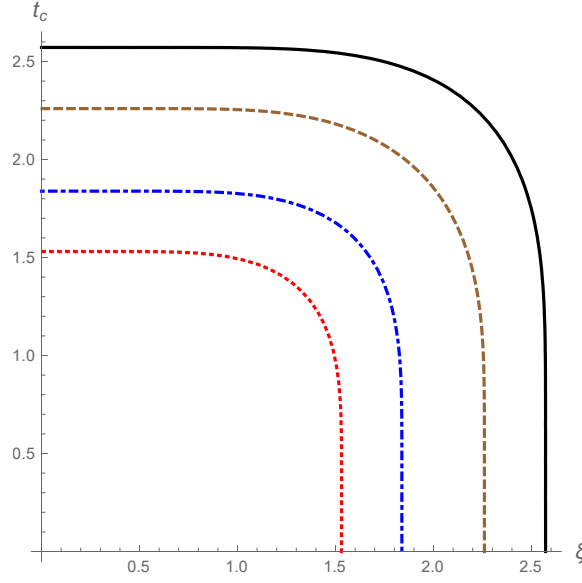


Figura 4.2 – Temperatura crítica reduzida em função do inverso do tamanho do sistema. Fixamos $\gamma = 0,0$; $\lambda = 1,0$ e os valores de campo magnético: $\delta = 0,0$; $0,3$; $2,0$ e $7,0$, nas curvas contínua, tracejada, tracejada-pontilhada e pontilhada, respectivamente.

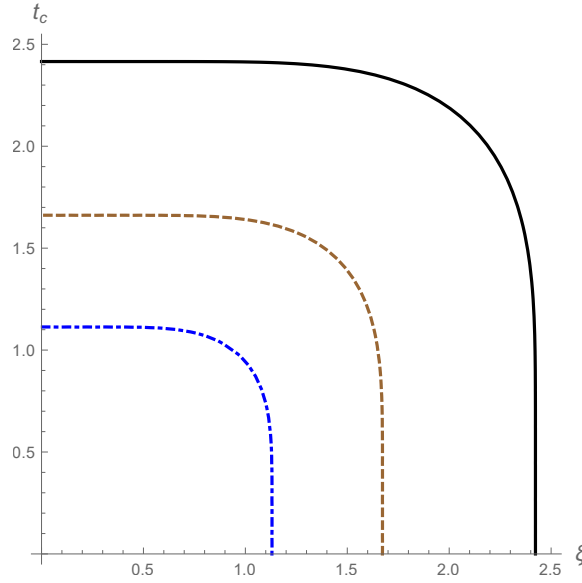


Figura 4.3 – Influência da constante de acoplamento na transição do modelo no plano ($\xi \times t_c$). Fixamos $\gamma = 0,35$ e $\delta = 5,0$. As constantes de acoplamento foram escolhidas de acordo com os valores: $\lambda = 0,5$ (curva contínua); $1,0$ (curva tracejada); $2,0$ (curva tracejada-pontilhada)

A constante de acoplamento adimensional λ tem forte influência sobre a temperatura crítica do sistema, bem como sobre o tamanho mínimo necessário à transição: altos valores da constante de acoplamento levam a temperaturas críticas menores e grandes valores para a espessura do sistema, veja a Fig. 4.3. Podemos dizer que o papel da constante de acoplamento em nosso modelo é análogo ao papel desempenhado pelo campo magnético: baixar a temperatura crítica do sistema, vide Fig. 4.2.

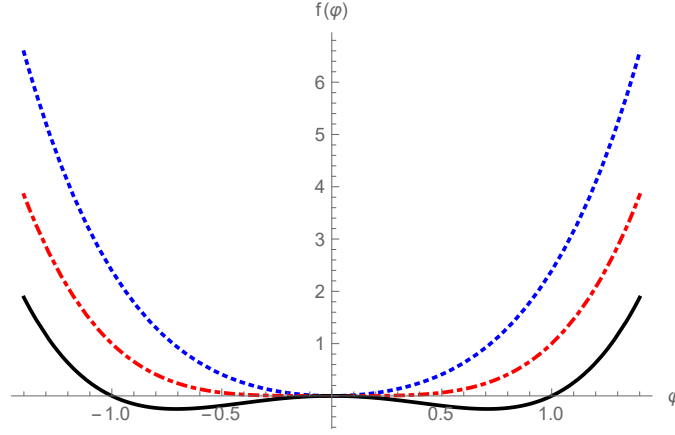


Figura 4.4 – Densidade de energia livre tipo Ginzburg–Landau para os valores fixados: $\xi = 0,001$; $\gamma = 0,35$; $\delta = 7,0$ e $\lambda = 2,0$. A curva pontilhada mostra a fase desordenada, a qual tem temperatura igual a 1,7. A criticalidade é obtida à temperatura $t_c \approx 0,95$ (curva tracejada-pontilhada). A fase ordenada é obtida abaixo de t_c . Na curva contínua, temos $t = 0,01$.

Da Fig. 4.4, notamos que a densidade de energia livre tipo Ginzburg–Landau possui um mínimo em $\varphi = 0$, para temperaturas $t > t_c$. Porém, para temperaturas abaixo de t_c , o mínimo da energia livre ocorre no valor finito $\varphi_0(t)$, o qual tende continuamente a zero conforme $t \rightarrow t_c$. Esta continuidade é típica de uma transição de fase de segunda ordem.

4.1.3 Comentário

Vamos aplicar os resultados encontrados em nosso modelo, a um sistema aquecido composto por um par *férmion–antiférmion*. Trata-se da abordagem *heurística* de um sistema com largura L , à temperatura T . Nesta discussão, a temperatura de dissociação do par será interpretada como a temperatura de transição do sistema.

Podemos calcular o tamanho do sistema a partir da curva contínua na Fig. 4.2 e da definição $L_0 = 1/m_0\xi_0$. À temperatura e campo magnético nulos, vemos da figura, que o inverso do comprimento reduzido é dado por $\xi_0 \approx 2,57$. Tomando m_0 como a massa efetiva do quark $\sim 68,3 \text{ MeV}$ [96] (essa massa corresponde aproximadamente à metade da massa do pión), obtemos usando o fator de conversão $\text{MeV}^{-1} \approx 196,9 \text{ fm}$, $L_0 \approx 1,12 \text{ fm}$. Este valor é da ordem de magnitude do tamanho estimado de um méson.

Além disso, vemos que para inversos do tamanho reduzido tais que $\xi \leq 1,20$, a temperatura crítica reduzida é quase constante e tem um valor $t_c \approx 2,56$, o que significa, após a conversão, uma temperatura de transição de $T_c \approx 175 \text{ MeV}$, para todos os tamanhos $L \geq 2,40 \text{ fm}$. Estes valores são maiores que o tamanho mínimo à temperatura zero. Interpretamos este tamanho mínimo à temperatura zero como o tamanho do estado ligado do par férmion–antiférmion. A temperatura T_c que encontramos é próxima da temperatura de desconfinamento estimada para hádrons. Pensamos em T_c como a temperatura para a qual o méson se dissocia na ausência de um campo magnético externo.

Vamos analisar o tamanho do par férmion–antiférmion quando um campo magnético atua no sistema. A partir da curva tracejada-pontilhada da Fig. 4.2, i.e., com um campo $\delta = 2,0$,

encontramos, à temperatura zero, $\xi_0(\delta = 2,0) \approx 1,83 \rightarrow L_0(\delta = 2,0) \approx 1,58 \text{ fm}$. Levando em conta o tamanho do sistema a campo zero, $L_0(\delta = 0,0) \approx 1,12 \text{ fm}$, percebemos que o campo magnético externo tende a dissociar o sistema. Este efeito é mais pronunciado para campos magnéticos fortes, altas temperaturas e grandes valores da constante de acoplamento do sistema.

É interessante que este modelo quadri-fermiônico simplificado forneça valores compatíveis com os valores de temperatura crítica de desconfinamento e tamanho de um méson encontrados na física hadrônica. Na próxima seção estenderemos este modelo de tal forma que ele represente um sistema sofrendo transição de fase de primeira ordem.

4.2 Transições de fase de primeira ordem sujeitas a um campo magnético externo

Os cálculos apresentados nesta seção foram publicados na Ref. [81]. Nesta seção vamos estender nosso modelo fermiônico para que ele descreva uma transição de fase de primeira ordem em um campo magnético de fundo. Usaremos novamente um modelo tipo GN massivo. Neste caso, devemos fazer algumas definições no sinal do parâmetro de massa do hamiltoniano, para assegurar a estabilidade do sistema. Analogamente ao caso fermiônico de segunda ordem, exploraremos os efeitos de campo magnético, temperatura, potencial químico e tamanho finitos sobre o sistema. Encontramos o fenômeno contra-intuitivo da *quebra inversa de simetria*. Este fenômeno é bem conhecido na literatura: existem duas diferentes temperaturas críticas, t_{c1} e t_{c2} , sendo $t_{c1} < t_{c2}$. Em temperaturas abaixo de t_{c1} , temos, como de costume, a fase com simetria quebrada. Para temperaturas intermediárias, $t_{c1} < t < t_{c2}$, encontramos uma fase simétrica (simetria restaurada). Em temperaturas acima de t_{c2} , voltamos a ter uma fase com simetria quebrada.

4.2.1 O modelo estendido e o formalismo de Matsubara generalizado

O hamiltoniano do sistema incluirá interações fermiônicas quárticas e sêxticas num espaço euclidiano quadri-dimensional

$$H = \int d^4r \left\{ \psi^\dagger(\mathbf{r})(i\mathcal{D} - m'_0)\psi(\mathbf{r}) - \frac{\lambda_0}{2} [\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})]^2 + \frac{\eta_0}{3} [\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})]^3 \right\}, \quad (4.16)$$

onde $\mathbf{r} = (\tau, x, y, z)$. Usaremos as mesmas definições feitas anteriormente para a derivada covariante e o potencial vetor, i.e.: $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu^{\text{ext}}$, com $A_\mu = (0, 0, Bx, 0) \Rightarrow \mathbf{B} = B\hat{z}$, sendo B uma constante.

A estabilidade do sistema fermiônico está associada à escolha do parâmetro de massa m'_0 . Definimos: $m'_0 = \pm m_0$. Para descrever transições de fase de primeira ordem, usaremos $m'_0 = -m_0$, $\lambda_0 > 0$ e $\eta_0 > 0$. Caso fôssemos descrever uma transição de segunda ordem, usaríamos $m'_0 = +m_0$, $\lambda_0 < 0$ e $\eta_0 = 0$.

A densidade de energia livre do tipo GL, será escrita como

$$\mathcal{F} = \mathcal{A}\varphi^2(\mathbf{r}) + \mathcal{B}\varphi^4(\mathbf{r}) + \mathcal{C}\varphi^6(\mathbf{r}). \quad (4.17)$$

Novamente $\varphi(\mathbf{r})$ denota o parâmetro de ordem do modelo: $\varphi(\mathbf{r}) = \sqrt{\langle \psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) \rangle_\beta}$.

Identificamos $\mathcal{A} = -m$, $\mathcal{B} = -\lambda_0/2$, $\mathcal{C} = \eta_0/3$, onde $m = m(T, \mu, L, B)$ representa as correções de campo magnético, temperatura, potencial químico e tamanho finitos sobre o parâmetro m'_0 . Não faremos correções nas constantes de acoplamento.

Para efetuar as correções sobre o parâmetro de massa m'_0 , usaremos os mesmos diagramas mostrados na Fig. 3.1. No presente caso, a autoenergia torna-se

$$m(T, L, \mu, \omega) = m'_0 + \Sigma^{(a)}(T, L, \mu, \omega) + \Sigma^{(b)}(T, L, \mu, \omega), \quad (4.18)$$

onde o sobre-índice a representa o diagrama *girino* e o sobre-índice b representa o diagrama *cadarço*.

A contribuição do diagrama *girino* é dada por

$$\Sigma^{(a)}(\omega) = \lambda_0 \text{tr} \left[\frac{\omega}{2\pi} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{s=\pm 1} \int \frac{dp_\tau}{2\pi} \frac{dp_z}{2\pi} \frac{(\not{p} - m'_0)}{\not{p}^2 + m_0^2} \right].$$

Seguindo os mesmos passos que conduziram à Eq. (4.12), i.e., compactificação da coordenada τ , compactificação da coordenada z , a inserção do potencial químico μ e subtração do termo singular, encontramos

$$\Sigma^{(a)}(t, \xi, \gamma, \delta) = -\frac{2m'_0\lambda\delta}{\pi^2} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{s=\pm 1} \mathcal{R}_{c_\ell(s)}(1, t, \xi, \gamma), \quad (4.19)$$

onde $\mathcal{R}_{c_\ell(s)}(1, t, \xi, \gamma)$ é dada pela Eq. (4.11).

A contribuição do diagrama *cadarço* fica dada por

$$\Sigma^{(b)}(t, \xi, \gamma, \delta) = \left(\frac{8m_0\eta\delta^2}{\pi^4} \right) \left[\sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{s=\pm 1} \mathcal{R}_{c_\ell(s)}(1, t, \xi, \gamma) \right]^2, \quad (4.20)$$

onde a constante de acoplamento adimensional é definida como $\eta = \eta_0 m_0^5$.

Agora podemos escrever a massa com correções de campo magnético, temperatura, tamanho e potencial químico finitos, em primeira ordem nas constantes de acoplamento

$$\begin{aligned} m(t, \xi, \gamma, \delta) = & m'_0 - \left(\frac{2m'_0\lambda\delta}{\pi^2} \right) \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{s=\pm 1} \mathcal{R}_{c_\ell(s)}(1, t, \xi, \gamma) \\ & + \left(\frac{8m_0\eta\delta^2}{\pi^4} \right) \left[\sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{s=\pm 1} \mathcal{R}_{c_\ell(s)}(1, t, \xi, \gamma) \right]^2. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Para investigar a estrutura de fase do modelo, resolveremos numericamente a Eq. (4.21) na próxima subseção.

4.2.2 Estrutura de fases

Faremos um rescalonamento no valor do campo, a saber $\varphi \rightarrow \varphi/m_0^{3/2}$. Esta redefinição permite escrever a densidade de energia livre como

$$\frac{\mathcal{F}}{m_0^4} \equiv f(\varphi) = -\frac{m(t, \xi, \gamma, \delta)}{m_0} \varphi^2 - \frac{\lambda}{2} \varphi^4 + \frac{\eta}{3} \varphi^6. \quad (4.22)$$

Esta densidade de energia possui três mínimos, um deles em $\varphi = 0$ e os outros dois localizados simetricamente à esquerda e à direita do mínimo central. Além disso, temos dois máximos locais equidistantes de $\varphi = 0$. Como no caso bosônico, a condição de criticalidade é tal que $f = \delta f / \delta \varphi = 0$. Neste caso, os três mínimos da densidade de energia livre se localizam ao longo do eixo horizontal no plano $\varphi \times f(\varphi)$. Usando a densidade de energia livre dada na Eq. (4.22), temos que a condição de criticalidade no caso fermiônico será

$$m(t_c, \xi, \gamma, \delta) = - \left(\frac{3\lambda m_0}{16\eta} \right). \quad (4.23)$$

Comparando as Eqs. (4.21) e (4.23) conseguimos obter as soluções numéricas para a equação transcendental que relaciona a temperatura crítica com os outros parâmetros do sistema. Na Fig. 4.5, observamos novamente o efeito de catálise magnética inversa no sistema.

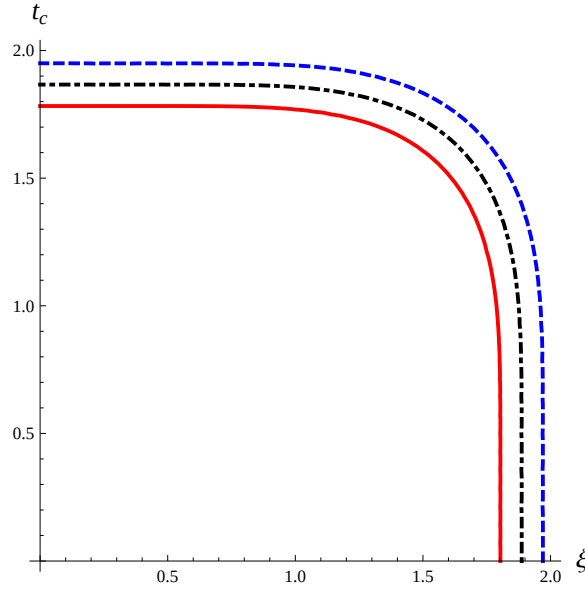


Figura 4.5 – Temperatura crítica reduzida em função do inverso do tamanho do sistema. Fixamos $\gamma = 0,5$; $\lambda = 2,0$ e $\eta = 1,0$. Usamos $\delta = 1,5$ (curva tracejada); $\delta = 3,0$ (curva tracejada-pontilhada); $\delta = 4,5$ (curva contínua).

Analogamente ao caso bosônico, observamos, a partir da Fig. 4.6, a pequena influência do potencial químico sobre a estrutura de fase do modelo. O tamanho mínimo do sistema, em $t_c \approx 0$, independe do potencial químico.

Na Fig. 4.7, temos dois valores da temperatura crítica que satisfazem a condição $m(t_c, \xi, \gamma, \delta) = -3\lambda m_0 / 16\eta$: t_{c1} e t_{c2} (no *bulk*, i.e., $\xi \approx 0$ ou $L \rightarrow \infty$, temos $t_{c1} \approx 0,76$ e $t_{c2} \approx 1,71$). O aparecimento das duas temperaturas críticas é conhecido na literatura como *quebra inversa de simetria*, veja as Refs. [78, 97–104]. A região interior à curva dada por t_{c1} , é a região de quebra de simetria. Ainda na Fig. 4.7, a região entre as curvas, i.e., com temperaturas intermediárias, t , tal que $t_{c1} < t < t_{c2}$ corresponde à fase desordenada. Entretanto, essa fase desordenada não persiste. Em temperaturas maiores que t_{c2} , obtemos novamente uma fase ordenada. Como existem duas temperaturas críticas, temos dois tamanhos mínimos do sistema, que suportam a transição.

Nas Figs. 4.8 e 4.9, apresentamos a densidade de energia livre para o sistema sofrendo transição de primeira ordem na forma *bulk*. Na Fig. 4.8, temos o comportamento esperado para

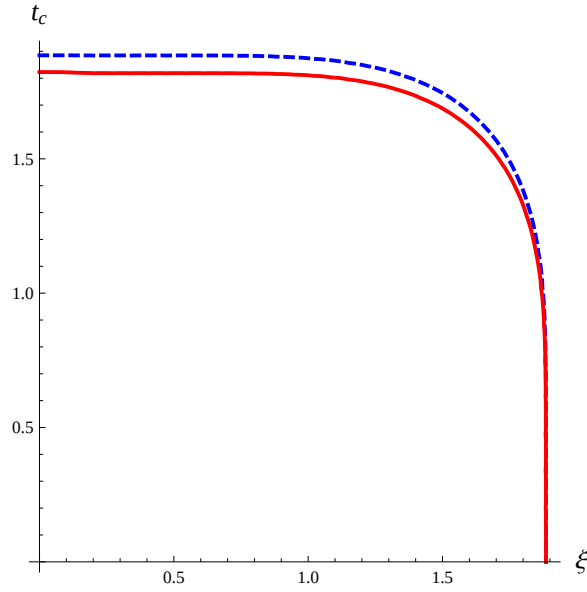


Figura 4.6 – *Influência do potencial químico sobre a transição de primeira ordem. Usamos $\lambda = 2,0$; $\eta = 1,0$ e $\delta = 3,0$. Temos $\gamma = 0,0$ na curva tracejada e $\gamma = 0,75$ na curva contínua.*

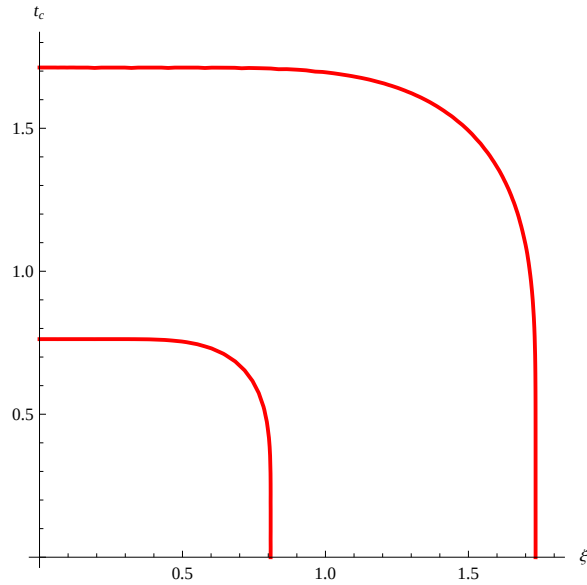


Figura 4.7 – *Quebra inversa de simetria. Existem duas temperaturas críticas para os mesmos valores de $(\gamma, \delta, \lambda, \eta)$. Fixamos $\gamma = 0,5$; $\lambda = 4,0$ e $\eta = 2,0$, além de $\delta = 1,5$.*

uma transição de primeira ordem, ou seja, passamos da fase simétrica para a fase quebrada conforme a temperatura diminui. Entretanto, temos o comportamento totalmente oposto na Fig. 4.9.

A quebra inversa de simetria tem sido observada em alguns sistemas compostos, por exemplo, o *Sal Rochelle*. Este sal tem uma estrutura cristalina ortorrômbica (fase ordenada) em temperaturas abaixo de $t_1 \approx -18^\circ C$ e acima de $t_2 \approx 24^\circ C$. Para temperaturas intermediárias, i.e., no intervalo $t_1 < t < t_2$, este sal possui uma estrutura cristalina monoclinica (fase desor-

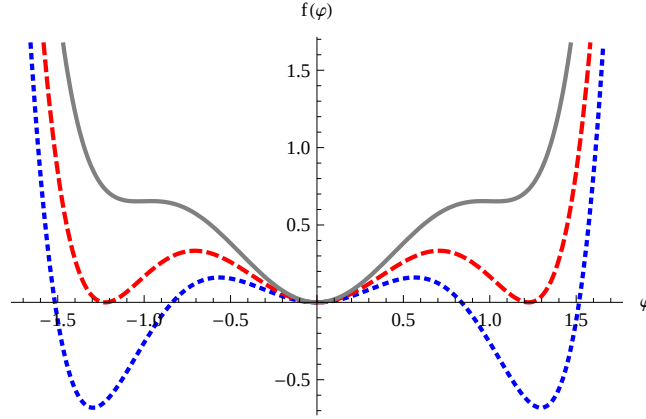


Figura 4.8 – Densidade de energia na forma bulk (parte mais interna da Fig. 4.7). Notamos uma quebra de simetria usual. Fixamos $\gamma = 0,5$; $\lambda = 4,0$; $\eta = 2,0$ e $\delta = 1,5$. Na curva contínua, temos $t = 1,4$. A criticalidade ocorre em $t_c \approx 0,76$ (curva tracejada). Abaixo de t_c , temos a fase com quebra de simetria (na curva pontilhada, temos $t = 0,3$).

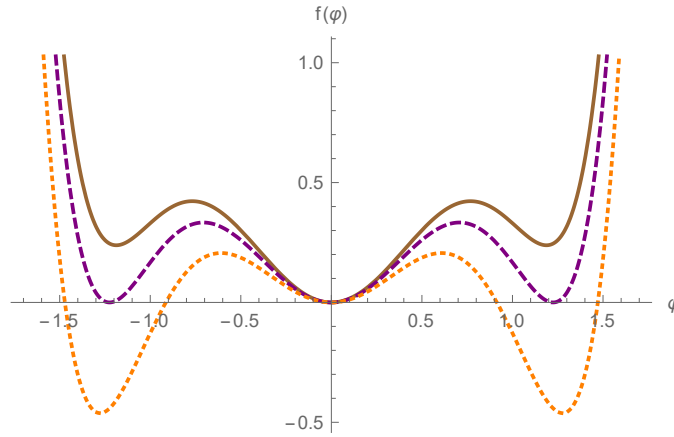


Figura 4.9 – Densidade de energia na forma bulk (parte externa da Fig. 4.7). Observamos uma quebra inversa de simetria. Fixamos $\gamma = 0,5$, $\lambda = 4,0$, $\eta = 2,0$ e $\delta = 1,5$. Na curva contínua, temos $t = 1,65$. A criticalidade é obtida em $t_c \approx 1,71$ (curva tracejada). Mesmo acima de t_c , encontramos uma região com simetria quebrada, ou seja, uma fase ordenada (na curva pontilhada, temos $t = 1,80$).

denada). Nas Refs. [105, 106], podemos encontrar outras substâncias sujeitas ao mesmo efeito, por exemplo, a água, sob condições especiais de pressão, pode apresentar a quebra inversa de simetria.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo desta tese abordamos o comportamento de transições de fase de sistemas bosônicos e fermiônicos em um campo magnético constante e homogêneo aplicado na direção z . Nestes sistemas, foram aplicados os métodos da Teoria Quântica de Campos em uma topologia toroidal desenvolvidos recentemente. Contabilizamos efeitos de campo magnético externo, temperatura, potencial químico e tamanho finito sobre os sistemas sofrendo transições de fase de primeira e segunda ordens.

No capítulo 2 discutimos o formalismo de Matsubara. Mostramos a relação que as frequências dos campos assumem ao impormos as condições de contorno periódicas e anti-periódicas sobre o tempo imaginário τ . Estendemos este formalismo à coordenada espacial z e obtivemos o chamado formalismo de Matsubara generalizado. Escolhemos, por analogia com as condições KMS, condições de contorno periódicas ou anti-periódicas na compactificação da coordenada z , conforme a natureza bosônica ou fermiônica do campo, respectivamente.

No capítulo 3 investigamos uma transição de fase de primeira ordem em um sistema bosônico. Usamos um potencial quártico e sêxtico para representar a autointeração do campo de spin zero. Calculamos o propagador de Feynman do campo escalar complexo imerso em um campo magnético, através das autofunções e autovalores do termo cinético do hamiltoniano do sistema. Aplicamos o formalismo de Matsubara generalizado e investigamos a estrutura de fases do sistema bosônico. Observamos que o potencial químico apresenta pouca influência no comportamento crítico do sistema. Também notamos que o campo magnético aplicado sobre o sistema tem o efeito de diminuir a temperatura de transição de fases, fenômeno conhecido com catálise magnética inversa. Além disso, notamos a existência de uma espessura mínima do filme aquecido, abaixo da qual não ocorre a transição. Foi demonstrado matematicamente que esta espessura mínima independe do potencial químico, através do comportamento assintótico das funções de Bessel modificadas. Esta independência é revelada nos gráficos da tese que mostram a transição de fase no plano $(\xi \times t_c)$ para diferentes potenciais químicos.

No capítulo 4 analisamos o comportamento de sistemas fermiônicos sofrendo transições de segunda e primeira ordens. Utilizamos o propagador do campo fermiônico imerso em um campo magnético externo para efetuar as correções de temperatura, potencial químico e tamanho finito no sistema (este propagador foi discutido em detalhes no apêndice B, através do método de

Ritus). Na transição de segunda ordem, encontramos um efeito similar ao caso bosônico no que diz respeito ao tamanho mínimo do sistema, necessário à transição e a pouca influência do potencial químico. Usando nosso modelo, estimamos a temperatura de desconfinamento de um méson sem campo magnético aplicado: $T_c \approx 175\text{MeV}$. O papel do campo magnético nesta transição é favorecer a dissociação do sistema férmion-antiférmion, pois encontramos, à temperatura zero, $L_0(\delta = 0,0) \approx 1,12\text{ fm}$ e $L_0(\delta = 2,0) \approx 1,58\text{ fm}$. Ainda no capítulo 4, mas sob a perspectiva de uma transição de fases de primeira ordem, analisamos o comportamento do sistema fermiônico novamente levando em conta efeitos de campo magnético, potencial químico e tamanho finito sobre o sistema. Neste caso, encontramos dois tamanhos mínimos abaixo dos quais a transição de primeira ordem cessa, i.e., temos duas temperaturas críticas possíveis, para um mesmo conjunto de parâmetros $(\gamma, \delta, \lambda, \eta)$. Em outras palavras, encontramos duas regiões com simetria quebrada (duas regiões ordenadas) e entre essas regiões quebradas, temos a fase simétrica (região desordenada). Este fenômeno é conhecido na literatura como quebra inversa de simetria e encontrado, por exemplo, no Sal Rochelle e na água. O papel geral das constantes de acoplamento consistiu em diminuir as temperaturas de transição do sistema fermiônico.

Gostaríamos de continuar investigando estes interessantes efeitos, em outros modelos e com outros campos externos. Na verdade, estamos em fase de conclusão de um trabalho analisando as transições de fases em um modelo tipo NJL com três sabores. Também pretendemos investigar a relação entre o método de Ritus e o método de Schwinger no cálculo do propagador de Feynman em um campo externo.

APÊNDICES

APÊNDICE A

NOTAÇÃO E CONVENÇÕES

Neste apêndice, estabeleceremos as notações e convenções utilizadas em todos os capítulos desta tese. Usamos o sistema de unidades natural, no qual $\hbar = c = k_B = 1$.

A.1 Rotação de Wick

O espaço-tempo de Minkowski D -dimensional será representado pelo tensor métrico

$$\text{diag } \mathbf{g} = (+, -, \dots, -).$$

O espaço euclidiano não difere componentes contravariantes das covariantes de um quadri-vetor. Por isso, denotaremos a métrica do espaço euclidiano D -dimensional apenas pela matriz identidade $\mathbf{I}_D$.

Para um quadri-vetor, no espaço de Minkowski, teremos

$$x^\mu = (t, x, y, z).$$

No espaço euclidiano, escrevemos

$$x_E^\mu = (\tau, x, y, z).$$

Estes espaços se relacionam através da rotação de Wick:

$$t \rightarrow -i\tau.$$

Com efeito, teremos a correspondência

$$x^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = -x_E^2.$$

Na descrição do campo espinorial, usamos

$$\not{k} = \gamma^\mu k_\mu, \tag{A.1}$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \tag{A.2}$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (\text{A.3})$$

Para as matrizes γ , usamos a representação quiral

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

$$\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

$$\sigma^{ij} = \varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

sendo $\varepsilon_{123} = 1$. As matrizes σ^1 , σ^2 e σ^3 representam as matrizes de Pauli, escritas abaixo, para comodidade do leitor,

$$\sigma^1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

$$\sigma^2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

$$\sigma^3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

No espaço dos momenta, a rotação de Wick se escreve como

$$k^0 \rightarrow ik_\tau.$$

As matrizes γ são escritas no espaço euclidiano como

$$\gamma^0 = i\gamma_\tau, \quad (\text{A.10})$$

$$\gamma^j = \gamma_{j_E}. \quad (\text{A.11})$$

Usando a Eq. (A.1), as Eqs. (A.10) e (A.11) além da rotação de Wick no espaço dos momenta, podemos mostrar que

$$\not{k} = -\not{k}_E. \quad (\text{A.12})$$

Com as definições dadas pelas Eqs. (A.4) e (A.5) e usando a conhecida propriedade das matrizes de Pauli $\sigma_j^2 = \mathbf{I}_2$, encontramos

$$\{\gamma_{0_E}, \gamma_{0_E}\} = -2\mathbf{I}_4, \quad (\text{A.13})$$

$$\{\gamma_{0_E}, \gamma_{j_E}\} = 0, \quad (\text{A.14})$$

$$\{\gamma_{i_E}, \gamma_{j_E}\} = -2\mathbf{I}_4, \quad i = j, \quad (\text{A.15})$$

$$\{\gamma_{i_E}, \gamma_{j_E}\} = 0, \quad i \neq j. \quad (\text{A.16})$$

Podemos condensar as Eqs. (A.13), (A.14), (A.15) e (A.16) em apenas uma equação, qual seja,

$$\{\gamma_{\mu_E}, \gamma_{\nu_E}\} = -2\delta_{\mu\nu}. \quad (\text{A.17})$$

As relações que envolvem as quantidades associadas aos férmions, escritas no espaço euclidiano, serão particularmente importantes quando formos definir o propagador do campo fermiônico sujeito a um campo magnético externo, vide final do apêndice B.

APÊNDICE B

MÉTODO DE RITUS

A seguir, vamos resgatar a sensacional ideia devida a V. Ritus para o cálculo do propagador de Feynman de campos bosônicos ou fermiônicos imersos em um campo magnético não quantizado constante e homogêneo.

O método consiste em encontrar autofunções do operador presente na equação de campo bosônico ou fermiônico, de tal modo que o propagador seja escrito como na forma livre [107, 108]. Ao longo deste apêndice manteremos a notação usada em [107].

B.1 Propagador bosônico livre

Para facilitar o entendimento do método de Ritus, obteremos de maneira conveniente o propagador bosônico livre. A equação de Klein-Gordon para uma partícula livre de massa m_0 e carga elétrica e_0 (um campo bosônico de spin 0 no contexto da TQC), no espaço de Minkowski quadri-dimensional, é dada por

$$\left(-\hat{P}^2 + m_0^2\right) \phi(x^\rho) = 0,$$

onde $\hat{P}_\mu = i\partial_\mu$. O propagador de Feynman satisfaz

$$\left(-\hat{P}^2 + m_0^2\right) G(x, x') = -i\delta^4(x - x'), \quad (\text{B.1})$$

onde o fator i mostrar-se-á conveniente quando desejarmos ir para o espaço euclidiano. Note que $[\hat{P}^2, \hat{P}_\nu] = 0$. Com efeito, autofunções do operador $\hat{P}_\nu$ são também autofunções do operador $\hat{P}^2$. Logo, a onda plana, $\exp(-ip_\mu x^\mu)$, é autofunção de $\hat{P}^2$. É fácil ver que:

$$\hat{P}^2 [\exp(-ip_\mu x^\mu)] = p^2 [\exp(-ip_\mu x^\mu)]. \quad (\text{B.2})$$

As ondas planas formam um conjunto completo, isto é,

$$\int d^4x [\exp(-ip_\mu x^\mu)] [\exp(-ip'_\nu x'^\nu)]^* = (2\pi)^4 \delta^4(p - p'),$$

$$\int d^4p [\exp(-ip_\mu x^\mu)] [\exp(-ip'_\nu x'^\nu)]^* = (2\pi)^4 \delta^4(x - x'). \quad (\text{B.3})$$

Assim, o propagador bosônico livre pode ser escrito através da transformada de Fourier,

$$G(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p [\exp(-ip_\mu x^\mu)] g(p) [\exp(-ip_\nu x'^\nu)]^*, \quad (\text{B.4})$$

onde a função $g(p)$ (o propagador no espaço dos momenta) é determinada após aplicarmos o operador $(-\hat{P}^2 + m_0^2)$ à equação (B.4), usarmos as equações (B.2), (B.1) e a equação (B.3). Fazendo isso, encontramos: $(-p^2 + m_0^2)g(p) = -i$, ou seja,

$$g(p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}. \quad (\text{B.5})$$

B.2 Propagador bosônico em um campo magnético

Agora vamos calcular o propagador do campo bosônico sujeito a um campo magnético externo B , uniforme e homogêneo, na direção z . Neste caso, a equação de Klein-Gordon torna-se

$$(-\hat{\Pi}^2 + m_0^2) \Phi(x^\rho) = 0,$$

onde $\hat{\Pi}_\mu = \hat{P}_\mu - e_0 A_\mu$ e usaremos o calibre de Landau: $A^\mu = (0, 0, xB, 0)$. O propagador satisfaz a equação

$$(-\hat{\Pi}^2 + m_0^2) G(x, x', B) = -i\delta^4(x - x'). \quad (\text{B.6})$$

Mas, neste caso, $[\hat{\Pi}^2, \hat{P}_\nu] \neq 0$. Logo, não podemos expandir $G(x, x', B)$ em termos das autofunções do operador $\hat{P}_\mu$, as ondas planas.

Contudo, se encontrarmos autofunções do operador $\hat{\Pi}^2$ tal que formem um conjunto completo, poderemos proceder como no caso livre e buscar expressões análogas às equações (B.4) e (B.5). Assim, devemos encontrar um conjunto completo de autofunções E_p que satisfaçam

$$\hat{\Pi}^2 E_p = p^2 E_p. \quad (\text{B.7})$$

No calibre de Landau, o operador $\hat{\Pi}^2$ fica escrito como

$$\hat{\Pi}^2 = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2i\omega_0 x \frac{\partial}{\partial y} - \omega_0^2 x^2, \quad (\text{B.8})$$

sendo $\omega_0 = e_0 B$.

Tentemos uma solução da forma [79, 90]

$$E_p(x^\mu) = X(x) \exp[-i(p_t t - \omega_0 p_y y - p_z z)]. \quad (\text{B.9})$$

Substituindo (B.9) em (B.7), obtemos

$$X''(x) - \omega_0^2(x - p_y)^2 X(x) + \text{const} \cdot X(x) = 0, \quad (\text{B.10})$$

onde a constante de separação é definida por

$$\text{const} \equiv p_t^2 - p_z^2 - p^2.$$

A equação (B.10) é a equação diferencial de Hermite, cujas soluções são finitas apenas para $const = \omega_0(2\ell + 1)$, com $\ell = 0, 1, 2, 3, \dots$ representando todos os níveis de Landau. Com efeito,

$$p^2 = p_t^2 - p_z^2 - \omega_0(2\ell + 1). \quad (\text{B.11})$$

As soluções da Eq. (B.10), já normalizadas, são bem conhecidas:

$$X_\ell(x) = \frac{1}{\sqrt{2^\ell \ell!}} \left(\frac{\omega_0}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[-\frac{\omega_0}{2} (x - p_y)^2 \right] H_\ell [\sqrt{\omega_0}(x - p_y)],$$

onde H_ℓ são os polinômios de Hermite. Por conveniência futura, definiremos as chamadas funções de Hermite [109]:

$$h_\ell(u) \equiv \frac{1}{\sqrt{2^\ell \ell! \sqrt{\pi}}} \exp \left(-\frac{u^2}{2} \right) H_\ell(u).$$

Estas funções são ortonormais e satisfazem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} du h_\ell(u) h_m(u) = \delta_{\ell,m} \quad (\text{B.12})$$

e

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty} h_\ell(u) h_\ell(u') = \delta(u - u'). \quad (\text{B.13})$$

Reescrevemos a Eq. (B.9) em termos destas funções:

$$E_p(x^\mu) = (\omega_0)^{\frac{1}{4}} \exp[-i(p_t t - \omega_0 p_y y - p_z z)] h_\ell[\sqrt{\omega_0}(x - p_y)]. \quad (\text{B.14})$$

Levando em conta as equações (B.14), (B.13), e a propriedade $\delta(au) = |a|^{-1} \delta(u)$, não é difícil demonstrar que as autofunções $E_p(x^\mu)$ satisfazem a relação de completeza

$$\sum_\ell \int d^3p E_p(x) E_p^*(x') = (2\pi)^3 \delta(t - t') \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z'). \quad (\text{B.15})$$

Analogamente, e tendo em vista a Eq. (B.12), podemos mostrar que as autofunções E_p satisfazem a relação de ortogonalidade

$$\int d^4x E_{p'}^*(x) E_p(x) = (2\pi)^3 \delta_{\ell,\ell'} \delta(p_t - p'_t) \delta[\omega_0(p_y - p'_y)] \delta(p_z - p'_z).$$

Assim, as autofunções $E_p(x^\mu)$ formam um conjunto completo e, como fizemos na Eq. (B.4), podemos escrever

$$G(x, x', B) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \int d^3p E_p(x) \mathcal{G}(p, A) E_p^*(x'). \quad (\text{B.16})$$

Aplicando o operador $(-\hat{\Pi}^2 + m_0^2)$ à relação (B.16) e usando as eqs. (B.7), (B.6) e (B.15), encontramos o propagador no espaço dos momenta:

$$\mathcal{G}(p, B) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}, \quad (\text{B.17})$$

com p , dado pela Eq. (B.11).

Passando para o espaço euclidiano, a integral de *loop* e o propagador, no limite $x' \rightarrow x$, são dados por

$$G_E(B) = \left(\frac{\omega_0}{2\pi} \right) \sum_{\ell=0}^{+\infty} \int \frac{dp_\tau}{(2\pi)} \frac{dp_z}{(2\pi)} \frac{1}{p_E^2 + m_0^2}, \quad (\text{B.18})$$

onde $p_E^2 = p_\tau^2 + p_z^2 + \omega_0(2\ell + 1)$ e usamos a Eq. (B.12).

B.3 Propagador fermiônico livre

Vamos reobter o propagador fermiônico livre, novamente com o intuito de facilitar o entendimento do método de Ritus. A equação de Dirac para uma partícula livre, de massa m_0 e carga elétrica e , no espaço de Minkowski, é dada por

$$(\hat{\not{P}} - m_0) \psi(x^\rho) = 0,$$

O propagador de Feynman, neste caso livre, satisfaz

$$(\hat{\not{P}} - m_0) S(x, x') = i\delta^4(x - x'). \quad (\text{B.19})$$

Os operadores $\hat{\not{P}}$ e $\hat{P}_\nu$ comutam; logo, autofunções do operador $\hat{P}_\nu$ são também autofunções do operador $\hat{\not{P}}$. Assim como no caso bosônico livre, a onda plana é autofunção de $\hat{\not{P}}$, mas com autovalor $\not{p}$:

$$\hat{\not{P}} [\exp(-ip_\mu x^\mu)] = \not{p} [\exp(-ip_\mu x^\mu)], \quad (\text{B.20})$$

e o propagador de Feynman fermiônico se escreve

$$S(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p [\exp(-ip_\mu x^\mu)] \tilde{s}(p) [\exp(-ip_\nu x'^\nu)]^*. \quad (\text{B.21})$$

O propagador fermiônico no espaço dos momenta é encontrado após aplicarmos o operador $(\hat{\not{P}} - m_0)$ à Eq. (B.21) e usarmos as Eqs. (B.20), (B.19) e a Eq. (B.3),

$$\tilde{s}(p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}. \quad (\text{B.22})$$

B.4 Propagador fermiônico em um campo magnético

O campo fermiônico imerso em um campo magnético externo B , uniforme e homogêneo na direção z , satisfaz a equação de Dirac modificada,

$$(\hat{\not{M}} - m_0) \Psi(x^\nu) = 0,$$

onde $\hat{\Pi}_\mu = \hat{P}_\mu - eA_\mu$. O propagador satisfaz

$$(\hat{\not{M}} - m_0) S(x, x', A) = i\delta^4(x - x'). \quad (\text{B.23})$$

Observamos que $[\hat{\not{M}}, \hat{P}_\nu] = -e\gamma^\mu [A_\mu, \hat{P}_\nu] \neq 0$. Portanto, não podemos expandir $S(x, x', B)$ em termos das ondas planas. Como argumentado por Ritus [107], a função de Green do campo de Dirac é uma função de escalares envolvendo as matrizes γ , o operador $\hat{\Pi}_\mu$ e o campo $F_{\mu\nu}$. As quantidades escalares possíveis são: $\hat{\not{M}}, (\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu})$ e $(\gamma_5 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^*)$, onde $F^{*\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$. Como $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^* \approx (\vec{E} \cdot \vec{B})$, vemos que para campos puramente magnéticos, $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^* = 0$. Ritus adicionalmente notou que estes operadores comutam com o operador de Dirac ao quadrado, isto é,

$$[(\hat{\not{M}})^2, \hat{\not{M}}] = [(\hat{\not{M}})^2, \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] = 0.$$

Portanto, se encontrarmos autofunções $\mathbf{E}_p$ do operador $(\hat{\mathbb{M}})^2$, estas também serão autofunções do operador de Dirac, $\hat{\mathbb{H}}$ e de $S(x, x', B)$.

As autofunções $\mathbf{E}_p$ são conhecidas na literatura como autofunções de Ritus, e satisfazem

$$(\hat{\mathbb{M}})^2 \mathbf{E}_p = p^2 \mathbf{E}_p. \quad (\text{B.24})$$

Devemos encontrar a matriz $\mathbf{E}_p$ que satisfaz a Eq. (B.24). Dado o calibre fixado, os únicos elementos não-nulos de $F_{\mu\nu}$ são: $F_{12} = -F_{21} = -B$. Assim, após usarmos σ^{ij} , dado em (A.6), podemos mostrar que

$$(\hat{\mathbb{M}})^2 = \hat{\Pi}^2 + \omega \sigma^{12} = \hat{\Pi}^2 + \omega (\mathbf{I}_2 \otimes \sigma_z), \quad (\text{B.25})$$

onde $\hat{\Pi}^2$ é dado na Eq. (B.8) com a substituição de ω_0 por $\omega = eB$. A partir da expressão (B.25), notamos que a autofunção $\mathbf{E}_p$ deve ser análoga à do caso bosônico, mas com um elemento matricial que satisfaça o produto tensorial relacionado à matriz σ_z . Levando em conta o caso bosônico e a Ref. [73], tentamos uma solução da forma

$$\mathbf{E}_p(x^\mu) = \sum_{s=\pm 1} E_{p,s}(x^\mu) \mathbf{\Omega}_s, \quad (\text{B.26})$$

onde s representa a variável de spin do campo fermiônico e $E_{p,s}(x^\mu)$ é dada pela Eq. (B.9) com $\omega_0 \rightarrow \omega$ e $X(x) \rightarrow X_s(x)$. A matriz $\mathbf{\Omega}_s$ deve ser tal que

$$(\mathbf{I}_2 \otimes \sigma_z) \mathbf{\Omega}_s = s \mathbf{\Omega}_s. \quad (\text{B.27})$$

A exigência imposta pela equação (B.27) revela uma matriz $\mathbf{\Omega}_s$ da forma

$$\mathbf{\Omega}_s = \text{diag}(\delta_{s,1}, \delta_{s,-1}, \delta_{s,1}, \delta_{s,-1}). \quad (\text{B.28})$$

Ao substituir (B.26) em (B.24) e usar (B.25) e (B.27), encontramos que $X_s(x)$ satisfaz novamente a equação (B.10), com $\omega_0 \rightarrow \omega$ e constante de separação

$$\text{const}' \equiv p_t^2 - p_z^2 + \omega s - p^2,$$

com a restrição: $\text{const}' = \omega(2\ell + 1)$. Notamos que as funções $E_{p,1}$ e $E_{p,-1}$ são dadas pela expressão (B.14) com $\omega_0 \rightarrow \omega$ e,

$$p^2 = p_t^2 - p_z^2 - \omega(2\ell + 1 - s). \quad (\text{B.29})$$

Levando em conta (B.26) e o fato de que $\sum_{s,s'} \mathbf{\Omega}_s \mathbf{\Omega}_{s'} = \mathbf{I}_4$, podemos facilmente demonstrar que

$$\sum_\ell \int d^3p \mathbf{E}_p(x) \bar{\mathbf{E}}_p(x') = (2\pi)^3 \delta(t - t') \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \quad (\text{B.30})$$

e

$$\int d^4x \bar{\mathbf{E}}_{p'}(x) \mathbf{E}_p(x) = (2\pi)^3 \delta_{\ell,\ell'} \delta(p_t - p'_t) \delta[\omega(p_y - p'_y)] \delta(p_z - p'_z).$$

onde $\bar{\mathbf{E}}_p(x') = \gamma^0 \mathbf{E}_p^\dagger(x') \gamma^0$. Percebe-se que as autofunções $\mathbf{E}_p$ formam um conjunto completo e, tal como fizemos na Eq. (B.21), escrevemos

$$S(x, x', B) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \int d^3p \mathbf{E}_p(x) \tilde{\mathcal{S}}(p, B) \bar{\mathbf{E}}_p(x'). \quad (\text{B.31})$$

A fim de encontrar o propagador fermiônico no espaço dos momenta, devemos aplicar o operador $(\hat{\mathcal{M}} - m_0)$ à equação (B.31), usar (B.23) e (B.30). Entretanto, sabemos que $\mathbf{E}_p(x)$ é autofunção de $\hat{\mathcal{M}}$, mas não sabemos com qual autovalor. Ou seja, não temos o análogo das equações (B.2), (B.7) e (B.20).

Por isso, o método de Ritus postula a relação

$$(\hat{\mathcal{M}}) \mathbf{E}_p = \mathbf{E}_p(\not{p}), \quad (\text{B.32})$$

sendo $\bar{p}_\mu$ um quadri-vetor a ser encontrado, tal que satisfaça a Eq. (B.32) na ordem apresentada.

Após aplicarmos o operador $(\hat{\mathcal{M}} - m_0)$ à equação (B.31), e usarmos as equações (B.32), (B.23) e (B.30), ficamos com

$$\tilde{\mathcal{S}}(p, B) = \frac{i(\not{p} + m_0)}{\bar{p}^2 - m_0^2 + i\epsilon}. \quad (\text{B.33})$$

A partir de (B.26) e (B.28), escrevemos as autofunções de Ritus explicitamente:

$$\mathbf{E}_p = \begin{pmatrix} E_{p,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{p,-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{p,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{p,-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.34})$$

Usando as expressões (B.34) e (A.6), temos

$$(\hat{\mathcal{M}}) \mathbf{E}_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(p_t + p_z)E_{p,1} & i(\partial_1 + \omega p_y - \omega x)E_{p,-1} \\ 0 & 0 & i(\partial_1 - \omega p_y + \omega x)E_{p,1} & -(p_t - p_z)E_{p,-1} \\ -(p_t - p_z)E_{p,1} & -i(\partial_1 + \omega p_y - \omega x)E_{p,-1} & 0 & 0 \\ -i(\partial_1 - \omega p_y + \omega x)E_{p,1} & -(p_t + p_z)E_{p,-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.35})$$

O lado direito da Eq. (B.32) é expresso por

$$\mathbf{E}_p(\not{p}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (-\bar{p}_0 + \bar{p}_3)E_{p,1} & (\bar{p}_1 - i\bar{p}_2)E_{p,1} \\ 0 & 0 & (\bar{p}_1 + i\bar{p}_2)E_{p,-1} & -(\bar{p}_0 + \bar{p}_3)E_{p,-1} \\ -(\bar{p}_0 + \bar{p}_3)E_{p,1} & -(\bar{p}_1 - i\bar{p}_2)E_{p,1} & 0 & 0 \\ -(\bar{p}_1 + i\bar{p}_2)E_{p,-1} & -(\bar{p}_0 - \bar{p}_3)E_{p,-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.36})$$

Comparando a Eq. (B.35) com a Eq. (B.36) e resolvendo um sistema de equações diferenciais acopladas, encontramos

$$\bar{p}_0 = p_t \quad ; \quad \bar{p}_3 = -p_z \quad ; \quad \bar{p}_1^2 + \bar{p}_2^2 = p_t^2 - p_z^2 - p^2. \quad (\text{B.37})$$

Tendo em vista a Eq. (B.29), descobrimos as componentes de $\bar{p}_\mu$ para que a Eq. (B.32) seja satisfeita:

$$\bar{p}_\mu = (p_t, \bar{p}_1, \bar{p}_2, -p_z), \quad (\text{B.38})$$

com

$$\bar{p}_1^2 + \bar{p}_2^2 = \omega(2\ell + 1 - s).$$

Escolhendo a origem do eixo coordenado x tal que $\bar{p}_1 = 0$ (a mesma escolha foi feita nos trabalhos de Ritus), o propagador fermiônico no espaço dos momenta fica dado pela Eq. (B.33), e

$$\bar{p}_\mu = (p_t, 0, \sqrt{\omega(2\ell + 1 - s)}, -p_z).$$

Vamos escrever o propagador dado nas Eqs. (B.31) e (B.33) no espaço euclidiano. No limite $x' \rightarrow x$, temos

$$S_E(B) \equiv \left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{s=\pm 1} \int \frac{dp_\tau}{(2\pi)} \frac{dp_z}{(2\pi)} \frac{(\not{p}_E - m_0)}{\bar{p}_E^2 + m_0^2}, \quad (\text{B.39})$$

com $\bar{p}_E^2 = p_\tau^2 + p_z^2 + \omega(2\ell + 1 - s)$.

APÊNDICE C

RELAÇÃO ENTRE OS COEFICIENTES DA EXPANSÃO DA ENERGIA LIVRE NA CRITICALIDADE PARA UMA TRANSIÇÃO DE PRIMEIRA ORDEM

Abaixo demonstramos a expressão que relaciona os coeficientes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ dada pela Eq. (3.14). Esta expressão foi usada para descrever transições de primeira ordem tanto em sistemas bosônicos quanto fermiônicos.

C.1 Dedução da Eq. (3.14)

A densidade de energia livre tipo Ginzburg–Landau é definida como

$$\mathcal{F}(\phi_c) = \mathcal{A} |\phi_c|^2 + \mathcal{B} |\phi_c|^4 + \mathcal{C} |\phi_c|^6.$$

Na criticalidade,

$$\mathcal{F}(\phi_c) = 0,$$

o que equivale a

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} |\phi_c|^2 + \mathcal{C} |\phi_c|^4 = 0. \tag{C.1}$$

Por outro lado, na criticalidade, além da densidade de energia livre, sua primeira derivada funcional também se anula, i.e.,

$$\frac{\delta \mathcal{F}(\phi_c)}{\delta \phi_c} = 0,$$

dando a relação

$$\mathcal{A} + 2\mathcal{B} |\phi_c|^2 + 3\mathcal{C} |\phi_c|^4 = 0. \tag{C.2}$$

Levando em conta que $|\phi_c|^2 \geq 0$, e a Eq. (C.1), podemos escrever uma expressão para o parâmetro de ordem em função de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$:

$$|\phi_c|^2 = \frac{1}{2\mathcal{C}} \left(-\mathcal{B} + \sqrt{\mathcal{B}^2 - 4\mathcal{C}\mathcal{A}} \right). \quad (\text{C.3})$$

Substituindo a Eq. (C.3) na Eq. (C.2), obtemos

$$\mathcal{A} - \frac{\mathcal{B}^2}{\mathcal{C}} + \frac{\mathcal{B}\sqrt{\mathcal{B}^2 - 4\mathcal{C}\mathcal{A}}}{\mathcal{C}} + \frac{3}{4\mathcal{C}} \left(-\mathcal{B} + \sqrt{\mathcal{B}^2 - 4\mathcal{C}\mathcal{A}} \right)^2 = 0.$$

Simplificando, ficamos com

$$\frac{2\mathcal{B}^2}{4\mathcal{C}} - \frac{2\mathcal{B}\sqrt{\mathcal{B}^2 - 4\mathcal{C}\mathcal{A}}}{4\mathcal{C}} - 2\mathcal{A} = 0,$$

que pode também ser escrita como

$$-2\mathcal{B}\sqrt{\mathcal{B}^2 - 4\mathcal{C}\mathcal{A}} = 8\mathcal{A}\mathcal{C} - 2\mathcal{B}^2. \quad (\text{C.4})$$

Elevando ao quadrado a Eq. (C.4), e executando alguns cálculos algébricos intermediários, encontramos

$$\mathcal{A} = \frac{\mathcal{B}^2}{4\mathcal{C}}, \quad (\text{C.5})$$

que é a Eq. (3.14).

APÊNDICE D

CONTINUAÇÃO ANALÍTICA DA FUNÇÃO ZETA DE EPSTEIN–HURWITZ BI-DIMENSIONAL INOMOGÊNEA

Neste apêndice vamos demonstrar a expressão da função zeta de Epstein–Hurwitz usada ao longo da tese tanto em sistemas bosônicos quanto fermiônicos.

D.1 Continuação analítica

A função zeta de Epstein–Hurwitz definida na Eq. (3.27) pode ser continuada analiticamente para todo o plano complexo ν , veja por exemplo [110, 111]. Da definição

$$Z_2^{c^2}(\nu, a_1, a_2, b_1, b_2) = \sum_{n_1, n_2=-\infty}^{+\infty} [a_1(n_1 - b_1)^2 + a_2(n_2 - b_2)^2 + c^2]^{-\nu}, \quad (\text{D.1})$$

e levando em conta a conhecida expressão

$$X^{-\nu} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dt \, t^{\nu-1} e^{-Xt}, \quad (\text{D.2})$$

podemos definir

$$X = a_1(n_1 - b_1)^2 + a_2(n_2 - b_2)^2 + c^2.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} Z_2^{c^2}(\nu, a_1, a_2, b_1, b_2) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dt \, t^{\nu-1} \left\{ \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} e^{[-a_1(n_1-b_1)^2 t]} \right\} \left\{ \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} e^{[-a_2(n_2-b_2)^2 t]} \right\} \\ &\quad \times e^{-c^2 t}. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Da referência [111], temos

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{[-\frac{\pi^2}{t'}(n-b)^2]} = \sqrt{\frac{t'}{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{(-t'n^2 + 2\pi i n b)}, \quad (\text{D.4})$$

válida para b complexo e t' real não-nulo e positivo. Fazendo a mudança

$$t' = \frac{\pi^2}{at},$$

podemos expressar a Eq. (D.4) como

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-a(n-b)^2 t} = \sqrt{\frac{\pi}{at}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\left(-\frac{\pi^2}{at} n^2 + 2\pi i n b\right)}. \quad (\text{D.5})$$

Ao explicitarmos em n a soma do lado direito da Eq. (D.5), i.e., escrevendo a somatória em n variando entre os inteiros negativos, n igual a zero e entre os inteiros positivos, encontramos

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-a(n-b)^2 t} = \sqrt{\frac{\pi}{at}} \left\{ 2 \left[\sum_{n=1}^{+\infty} e^{\left(-\frac{\pi^2 n^2}{at}\right)} \cos(2\pi n b) \right] + 1 \right\}. \quad (\text{D.6})$$

Substituindo a Eq. (D.6) na Eq. (D.3), teremos

$$\begin{aligned} Z_2^{c^2}(\nu, a_1, a_2, b_1, b_2) &= \frac{\pi}{\sqrt{a_1 a_2}} \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dt t^{(\nu-1)-1} \left\{ 2 \left[\sum_{n_1=1}^{+\infty} e^{\left(-\frac{\pi^2 n_1^2}{a_1 t}\right)} \cos(2\pi n_1 b_1) \right] + 1 \right\} \\ &\quad \times \left\{ 2 \left[\sum_{n_2=1}^{+\infty} e^{\left(-\frac{\pi^2 n_2^2}{a_2 t}\right)} \cos(2\pi n_2 b_2) \right] + 1 \right\} e^{-c^2 t}. \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Distribuindo os termos, ficamos com

$$\begin{aligned} Z_2^{c^2}(\nu, a_1, a_2, b_1, b_2) &= \frac{\pi}{\sqrt{a_1 a_2}} \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dt t^{(\nu-1)-1} \left\{ 1 + 2 \sum_{n_1=1}^{+\infty} e^{\left(-\frac{\pi^2 n_1^2}{a_1 t}\right)} \cos(2\pi n_1 b_1) \right. \\ &\quad + 2 \sum_{n_2=1}^{+\infty} e^{\left(-\frac{\pi^2 n_2^2}{a_2 t}\right)} \cos(2\pi n_2 b_2) + 2^2 \sum_{n_1, n_2=1}^{+\infty} e^{\left(-\frac{\pi^2}{t} \left(\frac{n_1^2}{a_1} + \frac{n_2^2}{a_2}\right)\right)} \\ &\quad \times \cos(2\pi n_1 b_1) \cos(2\pi n_2 b_2) \left. \right\} e^{-c^2 t}. \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Usando novamente a Eq. (D.2) e a identidade

$$\int_0^\infty dt t^{\nu-1} e^{-\frac{A}{t} - Bt} = 2 \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{\nu}{2}} K_\nu \left(2\sqrt{AB} \right), \quad (\text{D.9})$$

obtemos a expressão da extensão analítica da função zeta de Epstein–Hurwitz bi-dimensional inhomogênea:

$$\begin{aligned} Z_2^{c^2}(\nu, a_1, a_2, b_1, b_2) &= \frac{\pi}{\sqrt{a_1 a_2}} \frac{1}{\Gamma(\nu)} \frac{\Gamma(\nu-1)}{|c|^{2\nu-2}} + \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} \frac{4\pi^\nu}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{1}{|c|} \right)^{\nu-1} \left[\sum_{n_1=1}^{+\infty} \left(\frac{n_1}{\sqrt{a_1}} \right)^{\nu-1} \cos(2\pi n_1 b_1) K_{\nu-1} \left(2\pi c \frac{n_1}{\sqrt{a_1}} \right) \right. \\ &\quad + \sum_{n_2=1}^{+\infty} \left(\frac{n_2}{\sqrt{a_2}} \right)^{\nu-1} \cos(2\pi n_2 b_2) K_{\nu-1} \left(2\pi c \frac{n_2}{\sqrt{a_2}} \right) \\ &\quad + 2 \sum_{n_1, n_2=1}^{+\infty} \left(\sqrt{\frac{n_1^2}{a_1} + \frac{n_2^2}{a_2}} \right)^{\nu-1} \cos(2\pi n_1 b_1) \cos(2\pi n_2 b_2) \\ &\quad \left. \times K_{\nu-1} \left(2\pi c \sqrt{\frac{n_1^2}{a_1} + \frac{n_2^2}{a_2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Ao longo da tese, suprimimos o primeiro termo da Eq. (D.10), pois este termo mostra-se divergente para a análise que fizemos em sistemas bosônicos e fermiônicos. Para ver isto, basta usar a propriedade

$$\Gamma(1 + \nu) = \nu\Gamma(\nu),$$

para concluir que o primeiro termo da Eq. (D.10) é proporcional a $1/(\nu - 1)$, que diverge no limite $\nu \rightarrow 1$.

BIBLIOGRAFIA

1. F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson e A. E. Santana, *Thermal Quantum Field Theory: Algebraic Aspects and Applications* (Ed. World Scientific, Cingapura, 2009) (ver pp. 17, 18, 29, 34, 35, 39).
2. K. G. Wilson, The renormalization group: Critical phenomena and the Kondo problem, *Rev. Mod. Phys.* **47**, 773 (1975) (ver p. 17).
3. J. M. F. Bassalo e F. Caruso, *Landau* (Ed. Livraria da Física, São Paulo, 2013) (ver p. 17).
4. S. R. A. Salinas, *Introdução à Física Estatística* (Ed. Edusp, São Paulo, 1999) (ver p. 17).
5. R. P. Feynman, Atomic theory of the λ transition in helium, *Phys. Rev.* **91**, 1291 (1953) (ver p. 17).
6. L. D. Landau e E. M. Lifshits, *Statistical Physics* (Ed. Pergamon Press Ltda, Nova Iorque, 1980) (ver pp. 17, 18).
7. M. Le Bellac, *Quantum and Statistical Field Theory* (Ed. Oxford University Press, Nova Iorque, 1991) (ver pp. 18, 34).
8. T. C. A. Calza, F. L. Cardoso, L. G. Cardoso e C. A. Linhares, Compatibility between the Ginzburg Landau model and finite-temperature quantum field theory, *Mod. Phys. Lett. A* **31**, 1650227–1 (2016) (ver p. 18).
9. J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, 4^a ed. (Ed. Oxford University Press, Oxford, 2002) (ver pp. 18, 34, 39).
10. A. P. C. Malbouisson, Large- N β function for superconducting films in a magnetic field, *Phys. Rev. B* **66**, 092502 (2002) (ver pp. 18, 31).
11. C. A. Linhares, A. P. C. Malbouisson e M. L. Souza, A note on the infrared behavior of the compactified Ginzburg-Landau model in a magnetic field, *EPL* **96**, 31002 (2011) (ver p. 18).
12. F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson e A. E. Santana, Quantum field theory on toroidal topology: Algebraic structure and applications, *Phys. Reports* **539**, 135 (2014) (ver pp. 18, 19, 29, 33, 35).
13. T. Matsubara, A new approach to quantum-statistical mechanics, *Prog. Theor. Phys.* **14**, 351 (1955) (ver p. 18).

14. A. Das, *Finite Temperature Field Theory* (Ed. World Scientific, Londres, 1997) (ver p. 18).
15. H. Ezawa, Y. Tomozawa e H. Umezawa, Quantum statistics of fields and multiple production of mesons, *Nuovo Cimento Ser. X* **5**, 810 (1957) (ver p. 18).
16. L. Dolan e R. Jackiw, Symmetry behavior at finite temperature, *Phys. Rev. D* **9**, 3320 (1974) (ver p. 18).
17. H. Umezawa, *Advanced Field Theory: Micro, Macro and Thermal Physics* (Ed. AIP, Nova Iorque, 1995) (ver p. 18).
18. Y. Takahashi e H. Umezawa, Thermo field dynamics, *Int. J. Mod. Phys. B* **10**, 1755 (1996) (ver p. 18).
19. N. D. Birrell e L. H. Ford, Renormalization of self-interacting scalar field theories in a nonsimply connected spacetime, *Phys. Rev. D* **22**, 330 (1980) (ver pp. 18, 29).
20. A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson e A. E. Santana, Spontaneous symmetry breaking in compactified $\lambda\phi^4$ theory, *Nucl. Phys. B* **631**, 83 (2002) (ver p. 18).
21. F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson e A. E. Santana, Quantum fields in toroidal topology, *Ann. Phys. (N.Y)* **326**, 2634 (2011) (ver pp. 18, 29, 33).
22. L. M. Abreu, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson e A. E. Santana, Finite-size effects on the chiral phase diagram of four-fermion models in four dimensions, *Nucl. Phys. B* **819**, 127 (2009) (ver p. 19).
23. L. M. Abreu, A. P. C. Malbouisson e J. M. C. Malbouisson, Finite-size effects on the phase diagram of difermion condensates in two-dimensional four-fermion interaction models, *Phys. Rev. D* **83**, 025001 (2011) (ver p. 19).
24. L. M. Abreu, A. P. C. Malbouisson e J. M. C. Malbouisson, Nambu–Jona-Lasinio model in a magnetic background: size-dependent effects, *Phys. Rev. D* **84**, 065036 (2011) (ver p. 19).
25. C. A. Linhares, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson e I. Roditi, Spontaneous symmetry restoration in a field theory at finite chemical potential in a toroidal topology, *Phys. Rev. D* **86**, 105022 (2012) (ver p. 19).
26. C. A. Linhares, A. P. C. Malbouisson e I. Roditi, First-order phase transition for a field theory at finite chemical potential in a toroidal topology, *EPL* **98**, 41001 (2012) (ver p. 19).
27. H. T. Elze e W. Greiner, Finite size effects for quark-gluon plasma droplets, *Phys. Lett. B* **179**, 385 (1986) (ver p. 19).
28. C. Spieles, H. Stöcker e C. Greiner, Phase transition of a finite quark gluon plasma, *Phys. Rev. C* **57**, 908 (1998) (ver p. 19).
29. A. Gopie e M. C. Ogilvie, A first principles estimate of finite size effects in quark-gluon plasma formation, *Phys. Rev. D* **59**, 034009 (1999) (ver p. 19).
30. J. Gasser e H. Leutwyler, Thermodynamics of chiral symmetry, *Phys. Lett. B* **188**, 477 (1987) (ver p. 19).

31. O. Kiriyaama e A. Hosaka, Chiral phase properties of finite size quark droplets in the Nambu–Jona-Lasinio model, *Phys. Rev. D* **67**, 085010 (2003) (ver p. 19).
32. L. F. Palhares, E. S. Fraga e T. Kodama, Chiral transition in a finite system and possible use of finite-size scaling in relativistic heavy ion collisions, *J. Phys. G* **38**, 085101 (2011) (ver p. 19).
33. A. Bazavov e B. A. Berg, Deconfining phase transition on lattices with boundaries at low temperature, *Phys. Rev. D* **76**, 014502 (2007) (ver p. 19).
34. S. Yasui e A. Hosaka, Quark droplets with chiral symmetry in the Nambu–Jona-Lasinio model, *Phys. Rev. D* **74**, 054036 (2006) (ver p. 19).
35. S. Samanta, S. Ghosh e B. Mohanty, Finite size effect of hadronic matter on its transport coefficients, *arXiv:1706.07709v1 [hep-ph]* (2017) (ver p. 19).
36. J. Luecker, C. S. Fischer e R. Williams, Volume behaviour of quark condensate, pion mass, and decay constant from Dyson-Schwinger equations, *Phys. Rev. D* **81**, 094005 (2010) (ver p. 19).
37. H.-J. Xu, Effects of volume corrections and resonance decays on cumulants of net-charge distributions in a Monte Carlo hadron resonance gas model, *Phys. Lett. B* **765**, 188 (2017) (ver p. 19).
38. A. Bhattacharyya, S. K. Ghosh, R. Ray e S. Samanta, Exploring effects of magnetic field on the hadron resonance gas, *Eur. Phys. Lett.* **115**, 62003 (2016) (ver p. 19).
39. M. Luscher, Volume dependence of the energy spectrum in massive quantum field theory. 1. Stable particle states, *Commun. Math. Phys.* **104**, 85 (1986) (ver p. 19).
40. A. E. Ferdinand e M. E. Fisher, Bounded and inhomogeneous Ising models. I. Specific-heat anomaly of a finite lattice, *Phys. Rev.* **185**, 832 (1969) (ver p. 19).
41. M. E. Fisher e M. N. Barber, Scaling theory for finite-size effects in the critical region, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 1516 (1972) (ver p. 19).
42. J. Braun, B. Klein e B.-J. Schaefer, On the phase structure of QCD in a finite volume, *arXiv:1110.0849v2 [hep-ph]* (2012) (ver p. 19).
43. E. S. Fraga, L. F. Palhares e P. Sorensen. Finite-size scaling as a tool in the search for the QCD critical point in heavy ion data, *Phys. Rev. C* **84**, 011903(R) (2011) (ver p. 19).
44. J. Braun, B. Klein e P. Piasecki, On the scaling behavior of the chiral phase transition in QCD in finite and infinite volume, *Eur. Phys. J. C* **71**, 1576 (2011) (ver p. 19).
45. C. S. Fischer e M. R. Pennington, Finite volume effects in a quenched lattice-QCD quark propagator, *Phys. Rev. D* **73**, 034029 (2006) (ver p. 19).
46. Y. Nambu e G. Jona-Lasinio, Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. I, *Phys. Rev.* **122**, 345 (1961) (ver p. 19).
47. Y. Nambu e G. Jona-Lasinio, Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. II, *Phys. Rev.* **124**, 246 (1961) (ver p. 19).
48. D. J. Gross e A. Neveu, Dynamical symmetry breaking in asymptotically free field theories, *Phys. Rev. D* **10**, 3235 (1974) (ver p. 19).

49. L. M. Abreu, M. Gomes e A. J. da Silva, Finite-size effects on the phase structure of the Nambu–Jona-Lasinio model, *Phys. Lett. B* **642**, 551 (2006) (ver p. 19).
50. G.-Y. Shao, L. Chang, Y.-X. Liu e X.-L. Wang, Phase transition of finite size quark droplets with isospin chemical potential in the Nambu–Jona-Lasinio model, *Phys. Rev. D* **73**, 076003 (2006) (ver p. 19).
51. A. Bhattacharyya, P. Deb, S. K. Ghosh, R. Ray e S. Sur, Thermodynamic properties of strongly interacting matter in finite volume using the Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio model, *Phys. Rev. D* **87**, 054009 (2013) (ver p. 19).
52. A. Bhattacharyya, R. Ray e S. Sur, Fluctuation of strongly interacting matter in the Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio model in a finite volume, *Phys. Rev. D* **91**, 051501(R) (2015) (ver p. 19).
53. A. Bhattacharyya, R. Ray, S. Samanta e S. Sur, Thermodynamics and fluctuations of conserved charges in a hadron resonance gas model in a finite volume, *Phys. Rev. C* **91**, 041901(R) (2015) (ver p. 19).
54. A. Bhattacharyya, S. K. Ghosh, R. Ray, K. Saha e S. Upadhaya, Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio model in finite volumes, *Europhys. Lett.* **116**, 52001 (2016) (ver p. 19).
55. A. Barducci, R. Casalbuoni, M. Modugno, G. Pettini e R. Gatto, Thermodynamics of the massive Gross–Neveu model, *Phys. Rev. D* **51**, 3042 (1995) (ver p. 19).
56. C.-Y. Hou, C. Chamon e C. Mudry, Electron fractionalization in two-dimensional graphene-like structures, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 186809 (2007) (ver p. 19).
57. R. Jackiw e S.-Y. Pi, Chiral gauge theory for graphene, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 266402 (2007) (ver p. 19).
58. G. W. Semenoff, Condensed-matter simulation of a three-dimensional anomaly, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 2449 (1984) (ver p. 19).
59. V. Juričić, I. F. Herbut e G. W. Semenoff, Coulomb interaction at the metal-insulator critical point in graphene, *Phys. Rev. B* **80**, 081405(R) (1984) (ver p. 19).
60. B. R. Zhou, Top-Quark Condensate at finite temperature and electroweak symmetry restoration, *Commun. Theor. Phys.* **32**, 425 (1999) (ver p. 19).
61. A. Brzoska e M. Thies, No first-order phase transition in the Gross–Neveu model?, *Phys. Rev. D* **65**, 125001 (2002) (ver p. 19).
62. J.-L. Kneur, M. B. Pinto, R. O. Ramos e E. Staudt, Emergence of tricritical point and liquid-gas phase in the massless $2 + 1$ dimensional Gross–Neveu model, *Phys. Rev. D* **76**, 045020 (2007) (ver p. 19).
63. C. Boehmer, U. Fritsch, S. Kraus e M. Thies, Phase structure of the massive chiral Gross–Neveu model from the Hartree-Fock approach, *Phys. Rev. D* **78**, 065043 (2008) (ver p. 19).
64. H. Kohyama, Phase diagram of quark-antiquark and diquark condensates at finite temperature and density in the 3-dimensional Gross–Neveu model, *Phys. Rev. D* **77**, 045016 (2008) (ver p. 19).

65. J. Feinberg, The periodic table of static fermion bags in the Gross–Neveu model, *Int. J. Mod. Phys. A* **17**, 898 (2002) (ver p. 19).
66. A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson, A. E. Santana e J. C. Silva, Boundary behaviour of the four-point function in the 3-dimensional Gross–Neveu model, *Phys. Lett. B* **583**, 373 (2004) (ver p. 19).
67. F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson e A. E. Santana, Phase transition in the massive Gross–Neveu model in toroidal topologies, *Phys. Rev. D* **85**, 085015 (2012) (ver pp. 19, 45).
68. G. Parisi, The theory of nonrenormalizable interactions. 1. The large N expansion, *Nucl. Phys. B* **100**, 368 (1975) (ver p. 19).
69. T. Inagaki, T. Kouno e T. Muta, Phase structure of four-fermion theories at finite temperature and chemical potential in arbitrary dimensions, *Int. J. Mod. Phys. A* **10**, 2241 (1995) (ver p. 19).
70. S. Weinberg, Effective field theories in the large-N limit, *Phys. Rev. D* **56**, 2303 (1997) (ver p. 19).
71. F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson e A. E. Santana, Phase transition in the massive Gross–Neveu model in toroidal topologies, *Phys. Rev. D* **85**, 085015 (2012) (ver p. 19).
72. D. Kharzeev, K. Landsteiner, A. Schmitt e H. U. Yee (eds.), *Strong Interacting Matter in Magnetic Fields, Lectures Notes in Physics* **871** (Ed. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2013) (ver p. 19).
73. E. Elizalde, E. J. Ferrer e V. de la Incera, Neutrino self-energy and index of refraction in strong magnetic field: a new approach, *Ann. Phys. (N.Y)* **295**, 33 (2000) (ver pp. 19, 69).
74. E. Elizalde, E. J. Ferrer e V. de la Incera, Neutrino propagation in a strongly magnetized medium, *Phys. Rev. D* **70**, 043012 (2004) (ver p. 19).
75. A. V. Kuznetsov, N. V. Mikheev, G. G. Raffelt e L. A. Vassilevskaya, Neutrino dispersion in external magnetic fields, *Phys. Rev. D* **73**, 023001 (2006) (ver p. 19).
76. C. A. Linhares, A. P. C. Malbouisson, Y. W. Milla e I. Roditi, First-order phase transitions in superconducting films: a euclidean model, *Phys. Rev. B* **73**, 214525 (2006) (ver p. 20).
77. C. A. Linhares, A. P. C. Malbouisson, Y. W. Milla e I. Roditi, Critical temperature for first-order phase transitions in confined systems, *Eur. Phys. J. B* **60**, 353 (2007) (ver p. 20).
78. L. M. Abreu, F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson e A. E. Santana, Finite-size effects on the phase transition in a four- and six-fermion interaction model, *Phys. Lett. A* **378**, 2597 (2014) (ver pp. 20, 54).
79. E. B. S. Corrêa, C. A. Linhares e A. P. C. Malbouisson, Finite-size, magnetic and chemical-potential effects on first-order phase transitions, *Phys. Lett. A* **377**, 1984 (2013) (ver pp. 20, 31–33, 66).

80. E. B. S. Corrêa, C. A. Linhares, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson e A. E. Santana, Finite-size, chemical-potential and magnetic effects on the phase transition in a four-fermion interacting model, *Eur. Phys. J. C* **77**, 261 (2017) (ver pp. 20, 45).
81. E. B. S. Corrêa, C. A. Linhares e A. P. C. Malbouisson, A model to study finite-size and magnetic effects on the phase transition of a fermion interacting system, *arXiv:1705.03135v1 [cond-mat.other]* (2017) (ver pp. 20, 52).
82. F. A. Barone, H. Boschi-Filho e C. Farina, Three methods for calculating the Feynman propagator, *Am. J. Phys.* **71**, 483 (2003) (ver p. 24).
83. C. Farina, H. Boschi-Filho e A. Vaidya, *Técnicas para o cálculo do propagador de Feynman*, Livro ainda não publicado (ver p. 24).
84. A. Das, *Field Theory: A Path Integral Approach*, 2^a ed. (Ed. World Scientific, Londres, 2006) (ver p. 24).
85. A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, 2^a ed. (Ed. Princeton University Press, Nova Jérsei, 2010) (ver p. 25).
86. M. E. Peskin e D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, (Ed. Perseus Books, Reading, 1995) (ver p. 25).
87. J. Zinn-Justin, Quantum field theory at finite temperature: an introduction, *arXiv:hep-ph/0005272v1* (2000) (ver p. 25).
88. J. I. Kapusta e C. Gale, *Finite-Temperature Field Theory Principles and Applications* (Ed. Cambridge University Press, Nova Iorque, 2006) (ver pp. 27, 29).
89. L. M. Abreu, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson e A. E. Santana, Large- N transition temperature for superconducting films in a magnetic field, *Phys. Rev. B* **67**, 212502 (2003) (ver p. 31).
90. I. D. Lawrie, Magnetic scaling in superconductors, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 131 (1997) (ver pp. 32, 33, 66).
91. S. Coleman e E. Weinberg, Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking, *Phys. Rev. D* **7**, 1888 (1973) (ver pp. 34, 35).
92. S. Coleman, R. Jackiw e H. D. Politzer, Spontaneous symmetry breaking in the $O(N)$ model for large N , *Phys. Rev. D* **10**, 2491 (1974) (ver pp. 34, 35).
93. E. Elizalde, *Ten Physical Applications of Spectral Zeta Functions*, (Ed. Springer-Verlag, Berlin, 1995) (ver p. 37).
94. F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson e A. E. Santana, Finite-size effects on the phase transition in the three-dimensional Gross-Neveu model, *EPL* **97**, 11002 (2012) (ver p. 45).
95. N. Mueller e J. M. Pawłowski, Magnetic catalysis and inverse magnetic catalysis in QCD, *arXiv:1502.08011v2 [hep-ph]*. (2015) (ver p. 49).
96. M. D. Scadron, F. Kleefeld e G. Rupp, Constituent and current quark masses at low chiral energies, *EPL* **80**, 51001 (2007) (ver p. 51).

97. S. Weinberg, Gauge and global symmetries at high temperature, *Phys. Rev. D* **9**, 3357 (1974) (ver p. 54).
98. G. Bimonte e G. Lozano, On symmetry non-restoration at high temperature, *Phys. Lett. B* **366**, 248 (1996) (ver p. 54).
99. M. B. Pinto e R. O. Ramos, Nonperturbative study of inverse symmetry breaking at high temperatures, *Phys. Rev. D* **61**, 125016 (2000) (ver p. 54).
100. S. I. Hong e J. B. Kogut, Symmetry nonrestoration in a Gross–Neveu model with a random chemical potential, *Phys. Rev. D* **63**, 085014 (2001) (ver p. 54).
101. H. C. G. Caldas, Symmetry nonrestoration in a resummed renormalized theory at high temperature, *Phys. Rev. D* **66**, 105015 (2002) (ver p. 54).
102. M. B. Pinto, R. O. Ramos e J. E. Parreira, Phase transition patterns in relativistic and nonrelativistic multi-scalar-field models, *Phys. Rev. D* **71**, 123519 (2005) (ver p. 54).
103. T. H. Phat, L. V. Hoa, N. T. Anh e N. V. Long, High temperature symmetry nonrestoration and inverse symmetry breaking in the Cornwall–Jackiw–Tomboulis formalism, *Phys. Rev. D* **76**, 125027 (2007) (ver p. 54).
104. M. Sakamoto e K. Takenaga, High temperature symmetry nonrestoration and inverse symmetry breaking on extra dimensions, *Phys. Rev. D* **80**, 085016 (2009) (ver p. 54).
105. B. Bajc, High temperature symmetry nonrestoration, *arXiv:hep-ph/0002187v2* (2000) (ver p. 56).
106. N. Shupper e N. Shnerb, Inverse melting and inverse freezing: a spin model, *arXiv:cond-mat/0502033v1* (2005) (ver p. 56).
107. V. I. Ritus, Radiative corrections in quantum electrodynamics with intense field and their analytical properties, *Ann. Phys.* **69**, 555 (1972) (ver pp. 65, 68).
108. G. Murguía, A. Raya, Á. Sánchez e E. Reyes, The electron propagator in external electromagnetic fields in low dimensions, *Am. J. Phys.* **78**, 700 (2010) (ver p. 65).
109. A. Wünsche, General Hermite and Laguerre two-dimensional polynomials, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33**, 3531 (2000) (ver p. 67).
110. E. Elizalde e A. Romeo, Expressions for the zeta-function regularized Casimir energy, *J. Math. Phys.* **30**, 1133 (1989) (ver p. 75).
111. K. Kirsten, Generalized multidimensional Epstein zeta functions, *J. Math. Phys.* **35**, 459 (1994) (ver p. 75).