



CBPF – Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
LAFEX – Coordenação de Física Experimental de Altas Energias

Dissertação de Mestrado

Transições de fase em sistemas compactificados via Teoria Quântica de Campos em espaços toroidais

Erich Cavalcanti

Orientador
Prof. Dr. Adolfo P. C. Malbouisson

Rio de Janeiro, RJ
Julho, 2015

Erich Cavalcanti

Transições de fase em sistemas compactificados via Teoria Quântica de Campos em espaços toroidais

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

CBPF – Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
LAFEX – Coordenação de Física Experimental de Altas Energias

Orientador: Prof. Dr. Adolfo P. C. Malbouisson

Rio de Janeiro, RJ
Julho, 2015

*Dedico à minha esposa,
ao meu pai e à minha mãe.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus professores da graduação, particularmente ao meu antigo orientador, Franz Peter A. Farias, e ao prof. José Carlos O. de Jesus (Zé Carlos), sem a ajuda dos quais não teria chegado ao CBPF

Agradeço ao Adolfo Malbouisson, que descobri depois ser conterrâneo meu, por ter aceitado me orientar e pela paciência durante todo o processo. Agradeço também ao César Linhares, que em colaboração com Adolfo, auxiliou-me muito na caminhada. Agradeço a ambos pelas muitas correções, que colaboraram em aprimorar esta dissertação.

Agradeço à CAPES pela bolsa concedida durante o período de mestrado, sem este apoio financeiro seria impossível permanecer no CBPF e concluir este trabalho.

Agradeço aos professores do CBPF, particularmente ao Sebastião A. Dias (*Tião*) e ao José Abdalla Helayël-Neto, pelos ótimos cursos e pela contribuição dada à minha formação.

Agradeço aos meus amigos do CBPF, em especial a Ivana, Erick, Gabriel, Grecia, Daniel Wagner, Breno, Gabriela e Max, pelas conversas, pelos debates, pelas trilhas e pela companhia durante essa jornada.

Meus agradecimentos ao meu pai Roberto e à minha mãe Irani, por me darem a vida, me ensinarem a pensar e me darem o suporte necessário para eu continuar seguindo a minha jornada.

À minha esposa Ivana agradeço mais uma vez, por ser uma grande amiga, uma grande companheira, um grande suporte e também uma grande colega, que inclusive me auxiliou na correção da dissertação. Antes dela, minha vida tinha muito menos sorrisos.

E, por fim, agradeço à existência. Que graça teria o universo, se não houvesse físicos para desvendá-lo?

“Tudo pode ser questionado, exceto o direito à dúvida.”

RESUMO

O formalismo de teoria quântica de campos em topologias toroidais – o qual permite a introdução de temperatura, potencial químico e compactificações espaciais – é aplicado em conjunção com o formalismo do potencial efetivo, que permite observar o vácuo da teoria, para efetuar estudos de transição de fase. Obtém-se o potencial efetivo e os parâmetros corrigidos, a nível 1 *loop*, de um modelo escalar auto-interagente com potencial clássico expresso em série de Taylor. O potencial efetivo é computado com uso do método do *tadpole*. Restringindo-nos ao estudo do modelo ϕ^4 , a criticalidade é observada, revelando a temperatura crítica como função do potencial químico e do tamanho do sistema. As compactificações espaciais, vistas aqui como limitar o sistema a condições de contorno espaciais, realizadas permitem aplicar o formalismo ao estudo da transição de fase em filmes, fios e grãos. Nesse contexto, é observada a presença de tamanhos mínimos, abaixo dos quais o sistema não sofre transição de fase. Indo além, é adicionado um campo magnético estático ao modelo e é observada a dependência da criticalidade com o campo aplicado.

Palavras Chaves: Transição de Fase, Campo Escalar, Temperatura Finita, Topologia Toroidal, Teoria Quântica de Campos.

ABSTRACT

Quantum field theory on a toroidal topology formalism – which allows to introduce temperature, chemical potential and spatial compactification – is applied concurrently with the effective potential formalism, leading to the observation of the vacuum of the theory, to perform phase transition studies. Effective potential and corrected parameters, at the 1-loop level, are obtained for a self-interacting scalar model. In this case the classical potential is expressed as a Taylor expansion. The effective potential is computed by using the tadpole method. Restricting ourselves to the ϕ^4 model, criticality is observed, revealing the critical temperature as a function of the chemical potential and of the system size . The spatial compactification, interpreted as limiting the system to spatial boundaries, allows the study of the phase transition in films, wires and grains. In this context, minimal sizes are observed, below which the system does not undergo a phase transition. Going forward, a static magnetic field is applied to the system and the dependence of criticality with the applied field is studied.

Key-Words: Phase Transition, Scalar Field, Finite Temperature, Toroidal Topology, Quantum Field Theory.

SUMÁRIO

Sumário	xiii
Apresentação	1
1 Transições de Fase	5
1.1 O que é uma fase e uma transição de fase	5
1.2 Aplicabilidade	8
1.3 Descrição e Caracterização	9
2 Potencial Efetivo a 1 loop	13
2.1 Teoria Quântica de Campos Euclidiana	14
2.1.1 Método de Lee-Sciaccaluga	16
2.2 TQC em Topologias Toroidais	20
2.2.1 Potencial efetivo	24
2.2.2 Restrições sobre a função W	25
2.3 Correções nos parâmetros	26
2.4 Prescrições de renormalização	27
2.4.1 Subtração Mínima Modificada ($\overline{MS}$)	28
2.4.2 Supressão de Infinitos	29
2.4.3 Condição de Renormalização no vácuo instável	29
2.4.4 Condição de Renormalização no vácuo estável	30
2.5 Quadrado da massa	31
2.6 Alternativa : Soma de diagramas <i>daisy</i> via recorrência em 1 <i>loop</i>	32
2.6.1 Correção sobre a_4	34
2.7 Resumo de Resultados	34
3 ϕ^4 com Compactificação Espacial	37
3.1 Formulação	38
3.2 Região de Criticalidade	39
3.3 Supressão de Infinitos	41
3.3.1 Consistência	41
3.3.2 Região de Criticalidade	42
3.4 Subtração Mínima Modificada ($\overline{MS}$)	45

3.4.1	Consistência	45
3.4.2	Região de criticalidade	46
3.5	Contribuições tipo <i>Daisy</i>	47
3.5.1	Consistência	48
3.5.2	Temperatura Crítica no <i>bulk</i>	48
3.5.3	Tamanho mínimo do sistema	49
3.5.3.1	Uma compactificação espacial (filme)	50
3.5.3.2	Duas compactificações espaciais (fio)	51
3.5.3.3	Três compactificações espaciais (grão)	52
3.5.3.4	Resultados	53
3.5.4	Curva de Temperatura Crítica	54
3.6	Limite para a aproximação de Ginzburg-Landau	55
3.6.1	Caso recorrente	58
4	ϕ^4 com Compactificação Espacial e Campo Magnético	61
4.1	Introduzindo o campo magnético	62
4.1.1	Preso ao formalismo de campo magnético	64
4.2	Quadrado da massa	66
4.2.1	Renormalização e restrições de validade	69
4.2.2	Reescrita: Parâmetros adimensionais	72
4.3	Sistema no <i>bulk</i>	73
4.3.1	Ginzburg-Landau	75
4.4	Investigando a Criticalidade	76
4.5	Comprimento Mínimo	78
	Considerações Finais	81
	Apêndices	85
	APÊNDICE A Regularização Dimensional	87
A.1	Analisando Singularidades	88
A.2	Parâmetros de Feynman	89
	APÊNDICE B Função Zeta de Epstein-Hurwitz	91
B.1	Caso especial	94
	Bibliografia	99

APRESENTAÇÃO

O estudo de transições de fase pertence originalmente ao campo da mecânica estatística, mas vem sendo abordado via técnicas de teoria de campos [1–3] e permeia diversos casos experimentais¹: supercondutores, superfluidos, transição líquido-vapor, ... Dentre as análises convencionalmente realizadas [1, 3–6] podemos listar: 1 - a dependência da susceptibilidade (inverso do quadrado de massa efetiva) e valor esperado do parâmetro de ordem (campo condensado) com as variáveis termodinâmicas (temperatura, potencial químico, ...); 2 - as curvas de críticas de transição de fases, relacionando os parâmetros críticos onde ocorre a transição; 3 - a obtenção dos expoentes críticos.

Em algumas² situações, uma transição de fase é relacionada a um processo de quebra de simetria. Essa conexão entre transição de fase e quebra de simetria leva a uma associação entre as técnicas de estudo de transição de fase em Mecânica Estatística (ME) e as técnicas para estudo de quebra de simetria em Teoria Quântica de Campos (TQC).

A analogia se torna ainda mais interessante no formalismo de TQC em temperatura finita, a qual permite uma conexão direta entre TQC e ME. Neste trabalho será utilizada a formulação de tempo imaginário [2, cap.1], baseada na identificação de Matsubara [7], que se mostra satisfatória para estudar sistemas em equilíbrio termodinâmico. Uma outra alternativa, não explorada aqui, é a formulação de tempo real [2, cap.2], útil para estudar a evolução dinâmica.

O modelo de Ginzburg-Landau [1, 3] é um exemplo da relação $ME \leftrightarrow TQC$, transição de fase $\leftrightarrow$ quebra de simetria. Neste caso, ocorre uma transição de fase de segunda ordem modelada por uma lagrangiana de campo escalar com auto-interação quártica. Originalmente, adota-se a aproximação de introduzir a temperatura através redefinição do parâmetro quadrado de massa³ $m^2 \propto (T - T_C)$. Isto é válido somente para a região próxima à temperatura crítica. Utilizando o formalismo de temperatura finita a de-

¹ A ref. [4] indica olhar o trabalho clássico de P. Heller Rep Prog Phys Vol XXX, 731 (1967)

² Ressalta-se o ‘algumas’ pois existem casos de transição de fase sem quebra de simetria, como o modelo $g\phi^3 + \lambda\phi^4$

³ Em fato, a linguagem original falava de um parâmetro associado ao termo ϕ^2 , de modo a tornar mais natural a possibilidade de assumir valores negativos. Mas o conceito de massa é mais natural pelo ponto de vista de teoria de campo.

pendência da massa com a temperatura não é imposta, surge naturalmente por correções do modelo. Este procedimento é desenvolvido por Dolan e Jackiw [8], com uso de uma aproximação ao caso de altas temperaturas. Das [2] apresenta o tratamento para aproximações de altas e baixas temperaturas. A extensão do estudo para qualquer temperatura (não só próximo à crítica ou no limite de altas temperaturas) é realizada inicialmente por Malbouisson et al [9] através do uso da extensão analítica da função espectral zeta de Epstein-Hurwitz que permite, enfim, observar toda a faixa de temperatura analiticamente.

O formalismo de espaços toroidais [10] parte da regularização dimensional e obtém a zeta de Epstein-Hurwitz, que tem um prologamento analítico bem definido. Com este formalismo, é possível estudar sistemas em um espaço-tempo D -dimensional com d compactificações. Uma das compactificações introduz a temperatura e o potencial químico do sistema e as outras, através do procedimento estendido de Matsubara, introduzem compactificações espaciais e formam o dito espaço toroidal. Este formalismo pode ser aplicado a uma ação euclidiana qualquer e traz a novidade de permitir o estudo de sistemas com extensão finita em direções espaciais apresentando condições de contorno periódicas. Por exemplo, ao compactificar uma direção espacial e impor as condições de contorno periódicas o sistema se torna um placa infinita (dimensões não compactificadas) com uma espessura bem definida (tamanho da dimensão compactificada). Ao longo deste trabalho, o formalismo será aplicado ao estudo de uma teoria de campo escalar – parâmetro de ordem de uma componente – e será tomada a situação de uma interação quártica para estudo de transições de segunda ordem. Serão observadas as situações de filme, fio e grão, associadas respectivamente a uma, duas e três dimensões espaciais compactificadas.

O estudo das transições de fase é realizado através da análise de mínimos do potencial efetivo. O formalismo do potencial efetivo foi introduzido na literatura por Coleman-Weinberg [11]. Para calcular as correções no potencial efetivo o método do *tadpole* de Lee-Sciaccaluga [12] será apresentado e utilizado durante a dissertação. Sua principal vantagem está na generalização direta para potenciais genéricos a nível árvore; por genérico entenda-se um potencial qualquer que tenha uma expansão em série de Taylor. Neste primeiro estudo somente a correção de 1 *loop* é calculada.

A escolha de procedimento de renormalização ideal não é óbvia para o problema abordado. O estudo em temperatura finita, e muito menos ainda o estudo em espaços toroidais, não foi ainda exaustivamente analisado como a situação de temperatura zero. Neste trabalho serão utilizados os procedimentos de subtração mínima modificada, de supressão de infinitos – associado à remoção de infinitos da função zeta – e também condições de renormalização que garantam a presença do sistema na situação sem temperatura e sem compactificações. Serão apresentados resultados para cada um destes procedimentos. E como os cálculos são realizados somente a 1 *loop*, é esperado que seus resultados sejam distintos.

Com o potencial efetivo renormalizado em mãos, é possível iniciar um estudo das

transições de fase. Neste trabalho será observada a teoria ϕ^4 , que é tradicional para o estudo de transições de segunda ordem e permitirá comparar os resultados com a literatura. E mais à frente é realizada a introdução de um campo magnético fixo no sistema e analisado seus efeitos.

O capítulo 1 faz uma revisão sobre o estudo de transições de fase e mostra como, a partir do potencial, podemos realizar este estudo. O capítulo 2 contém uma revisão da teoria de campo euclidiana e o processo para obtenção do potencial efetivo renormalizado a 1 *loop* para um campo. Após estes capítulos introdutórios, é realizado o estudo da teoria ϕ^4 no capítulo 3, onde é também explorada a questão dos tamanhos mínimos permitidos de compactificação antes de eliminar a possibilidade de ocorrer transição de fase. No capítulo 4, é adicionado um campo magnético uniforme ao modelo e estudado seus efeitos. Aos apêndices são reservados alguns tratamentos importantes e que não pertencem ao escopo principal do texto, como o procedimento de regularização dimensional (Apêndice A) e a investigação da função zeta espectral de Epstein-Hurwitz (Apêndice B).

CAPÍTULO 1

TRANSIÇÕES DE FASE

1.1 O que é uma fase e uma transição de fase

Segundo o olhar da mecânica estatística, sobre o qual o estudo de transições de fase foi originalmente desenvolvido, as fases de um sistema físico são as diferentes respostas macroscópicas a reorganizações microscópicas dos constituintes do sistema. Isto implica que, sob a influência de determinados parâmetros, o mesmo sistema físico (mesmos constituintes microscópicos, mesmas interações básicas) pode convergir a diferentes estados macroscópicos quando chega-se ao equilíbrio termodinâmico. O processo de transição de fase consiste em alterar algum parâmetro de controle, que influencie o sistema a se alterar microscopicamente, a ponto de mudar o estado macroscópico. O ponto de vista adotado aqui será realizar um processo gradual, sem sair do equilíbrio termodinâmico. Isso permite o uso de técnicas restritas ao estudo de sistemas em equilíbrio, como o formalismo de Matsubara para introdução da temperatura.

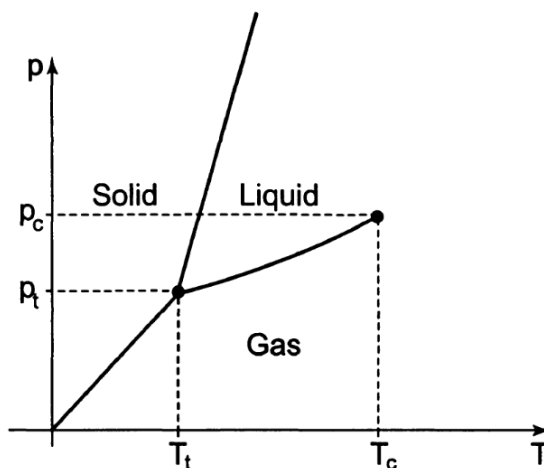


Figura 1.1: Diagrama de fase de um fluido simples, como a água. Extraído da Ref. [13]

O caso da água é a ilustração mais próxima. Os constituintes microscópicos são os mesmos em qualquer fase do sistema, moléculas de H_2O , o que muda é a estrutura a depender de parâmetros de controle, como temperatura e pressão. No estado sólido (gelo) forma-se uma estrutura cristalina, pois a interação entre as moléculas supera a agitação térmica. No estado líquido as moléculas não apresentam a estrutura cristalina, aumentando a liberdade de movimentação, mas a interação entre seus constituintes ainda se mostra importante. Por fim, no estado gasoso (vapor d'água) a agitação das moléculas supera a interação entre elas. O diagrama de fase está apresentado na figura 1.1.

Do ponto de vista da teoria quântica de campos, as fases de um sistema físico são caracterizadas pelo vácuo sobre o qual o sistema é definido. O vácuo verdadeiro do sistema é seu mínimo global, sendo que podem existir mínimos locais. O processo de transição se caracteriza por uma mudança de vácuo, na qual o antigo vácuo deixa de ser o mínimo global do sistema. Dois modelos simples são apresentados por Lemos [14] com uso de pêndulos nos exemplos 5.1.2 e 5.1.3 do livro, no contexto da mecânica analítica; estes modelos ilustram a mudança no mínimo global (o estado de vácuo) do sistema a depender do valor de um parâmetro de controle.

Associada à transição de fase, existe geralmente uma quebra espontânea de simetria. Isto fica evidente nos modelos mais simples sobre o assunto: como a transição de paramagneto a um ferromagneto e o modelo de Higgs.

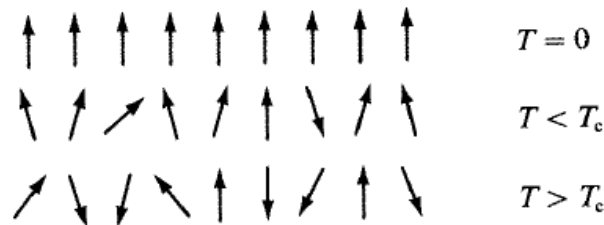


Figura 1.2: Transição paramagneto ($T > T_c$) – ferromagneto ($T = 0$). Imagem extraída da ref. [1].

A transição paramagneto-ferromagneto é bem descrita por um modelo de rede de spins no qual o sistema físico é simplificado a um conjunto de spins igualmente espaçados, a figura 1.2 concede uma visão unidimensional do modelo. Cada spin apresenta um momento magnético associado e interage com outros spins da rede, além de apresentar agitação térmica determinada pela temperatura do banho térmico em contato com o sistema.

Na figura 1.2 é representado o processo de transição de fase, visualizando somente uma tira unidimensional de um sistema maior. Em altas temperaturas existe isotropia, os spins estão direcionados aleatoriamente, de modo que globalmente a magnetização é nula, todos os momentos magnéticos individuais se cancelam em média, caracterizando um paramagneto. A redução da temperatura implica uma redução da agitação térmica,

chega uma situação, caracterizada por uma temperatura crítica T_c , em que a interação entre spins é mais intensa que a agitação térmica e os spins iniciam a formação de blocos alinhados. Assim, uma magnetização espontânea surge no sistema quando $T < T_c$, caracterizando um ferromagneto. Idealmente, ao atingir $T = 0$ a agitação térmica se torna insignificante e todos os spins estão perfeitamente alinhados, gerando a magnetização espontânea máxima. É característico nesta transição de fase a presença de uma quebra espontânea da simetria de isotropia. Ela decorre de que para $T > T_c$ não existia direção preferencial de alinhamento dos spins, enquanto para $T < T_c$ o sistema “escolhe” uma direção específica.

O modelo de Ising, que descreve bem a transição paramagneto-ferromagneto, simplifica a interação na rede a somente os primeiros vizinhos (spins que estão imediatamente do lado) e restringe os spins a serem “para cima” ou “para baixo”. Uma alternativa mais precisa é o modelo de Heisenberg, que permite aos spins variar nas três direções espaciais. A aproximação de campo médio permite observar o sistema de outro modo, ao invés de acompanhar a interação entre cada spin dentro de uma rede é obtido um campo médio efetivo da rede de spins e é estudada a interação individual de cada spin diretamente com o campo médio. O modelo do campo médio funciona como uma primeira aproximação, visto que não permite observar as flutuações estatísticas. O modelo de Ginzburg-Landau vai além do modelo de campo médio, permitindo estudar o sistema a partir de campos e ainda possibilitando realizar correções de ordens superiores, já utilizando neste ponto as técnicas de teoria de campos. A temperatura, no modelo de Ginzburg-Landau, é introduzida a partir do parâmetro de massa quadrada. A técnica a ser abordada neste trabalho vai além de Ginzburg-Landau, ao invés da dependência do parâmetro de massa com a temperatura ser fixada, a temperatura é introduzida através do formalismo de espaços toroidais e a dependência dos parâmetros da teoria com a temperatura é então calculada. O modo como isto é feito será abordado no capítulo 2.

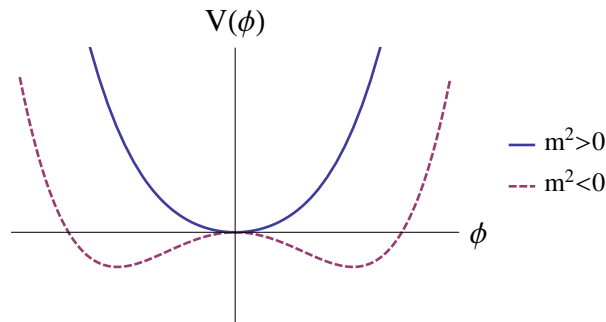


Figura 1.3: Mudança do potencial em função do parâmetro de massa quadrada. Na nova fase $m^2 < 0$ existem dois vácuos possíveis (mínimos), existe uma quebra de simetria quando sistema seleciona um dos mínimos.

O modelo de Higgs na sua forma mais simples consiste em um campo escalar autointeragente, cuja estrutura de vácuo depende do sinal do parâmetro de massa quadrada,

como ilustrado na figura 1.3. Quando o parâmetro m^2 é positivo, o sistema está na fase simétrica e o potencial apresenta simetria de paridade em torno do vácuo. Se m^2 se torna negativo, o potencial se torna o conhecido “poço duplo”¹ e surgem novos vácuos para o sistema. Ao selecionar o novo vácuo a simetria de paridade é perdida. Nota-se então a associação entre transição de fase e quebra espontânea de simetria.

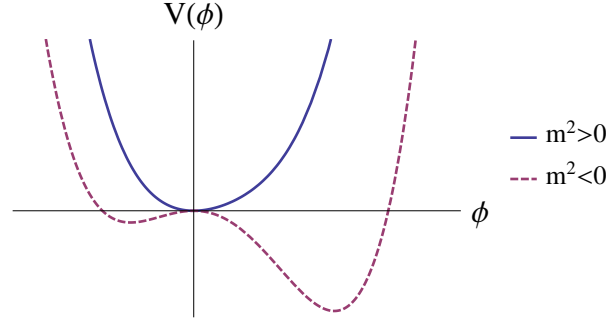


Figura 1.4: Mudança do potencial em função do parâmetro de massa quadrada. Aqui não existe quebra de simetria, apesar de existir uma transição de fase indicada pela mudança do mínimo do potencial. Ambos os mínimos são válidos, mas agora um deles é mais estável.

A associação transição de fase $\leftrightarrow$ quebra espontânea de simetria não deve ser generalizada. Existem situações nas quais uma transição de fase ocorre e nenhuma simetria é espontaneamente quebrada. Um exemplo é o modelo em teoria de campo do potencial $\frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{g}{3!}\phi^3 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4$, que não apresenta simetria em suas fases, como apresentado na figura 1.4.

Algumas indicações para aprofundar a leitura são as referências [1, 4, 5, 15],[3, cap. 23 e 24] e [6, cap. 7].

1.2 Aplicabilidade

A investigação de modelos efetivos que descrevam transições de fase pode produzir aplicação a diversas áreas. Neste trabalho será dado enfoque à aplicação do estudo em sistemas de matéria condensada que apresentem tamanho restrito, como a situação de filmes, fios e grãos.

No contexto de teoria de campos, o estudo das transições de fase - em particular as associadas ao fenômeno de quebra espontânea de simetria - é de suma importância. No Modelo Padrão, o mecanismo de Higgs permite que a teoria seja formulada com todos os bósons de gauge sem massa, mantendo a simetria de calibre intacta. Quando ocorre a transição de fase, o mecanismo de Higgs é responsável pelo ganho de massa das partículas elementares.

¹ Caso o modelo abordado seja de um campo complexo, a representação do potencial será uma revolução do apresentado na figura 1.3. Assim, surge o conhecido “chapéu mexicano” ou “fôrma de pudim”.

Um estudo ainda em aberto, no âmbito da QCD, é associado ao problema do confinamento de cor. É esperada a existência de uma transição de fase em altas energias que permita gerar o plasma de quarks e glúons, isto é, uma fase desconfinada [15]. O estudo diretamente com uso da QCD não é prático, daí a necessidade explorar o problema através de técnicas computacionais ou modelos efetivos - como os modelos de transição quiral. Os modelos escalares permitiriam um estudo sobre as transições de fase de modo geral, o que pode dar indicações sobre o real comportamento da QCD.

Ainda é possível encontrar aplicação no âmbito da cosmologia ao tratar das transições de fase cosmológicas. O fato de se trabalhar com teorias efetivas para o estudo de transições de fase permite este alto grau de aplicabilidade como uma primeira aproximação a situações distintas.

1.3 Descrição e Caracterização

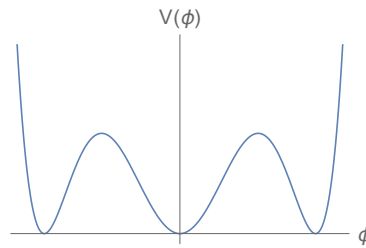


Figura 1.5: Representação do potencial $\frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \frac{g}{6!}\phi^6$ na criticalidade, determinada pela escolha $g = \frac{5\lambda^2}{8m^2}$. Fica evidente a coexistência dos vácuos da fase simétrica $\phi = 0$ e da fase quebrada $\phi \neq 0$.

Associada a toda transição existe um parâmetro de ordem de N -componentes dependente de variáveis de controle como, por exemplo, a temperatura. Observando o valor do parâmetro de ordem é possível identificar a fase do sistema. Por exemplo, no caso do Modelo de Ising o parâmetro de ordem é a magnetização espontânea e apresenta somente uma componente, visto que o spin está confinado a uma direção espacial. Observando a variação da magnetização espontânea com respeito à temperatura nota-se que na fase de simetria a magnetização é nula e após a transição de fase ela assume um valor não-nulo. Outro exemplo é o modelo de Heisenberg, onde o spin pode variar em três direções espaciais, deste modo o parâmetro de ordem terá 3 componentes. Outra quantidade que sempre pode ser definida é a susceptibilidade, representando a resposta do parâmetro de ordem com respeito à mudança no campo externo, no caso do modelo de Ising ocorre a susceptibilidade magnética.

Algo comum de se observar é o diagrama de fases. Em geral, ele é montado tomando a variação de duas variáveis termodinâmicas; por exemplo, no caso da água, pressão e temperatura. E são úteis para visualizar as curvas de transição de fase, onde pode estar

ocorrendo uma coexistência de fases, e pontos críticos. No caso da água, por exemplo, existe um ponto de tricriticalidade onde há coexistência de três fases. No caso da transição paramagnético-ferromagneto existe em geral somente a temperatura como variável termodinâmica de interesse; o seu diagrama de fase unidimensional apresenta o ponto de criticalidade $T = T_c$, o qual separa a fase quebrada $T < T_c$ da fase simétrica $T > T_c$.

Na criticalidade, onde ocorre a transição de fase, observa-se a divergência ou anulação de algumas grandezas físicas, ao tomar o limite termodinâmico. Esse comportamento é bem descrito a partir de leis de potência do tipo $(T - T_c)^q$, que descrevem a aproximação à criticalidade. Por exemplo, no contexto de supercondutividade, o parâmetro de ordem, magnetização, é nulo na temperatura crítica e acima dela, o que é bem descrito por $M \sim (T_c - T)^\beta$. Enquanto a susceptibilidade magnética, que diverge na temperatura crítica, é bem descrita por $\chi \sim |T - T_c|^{-\gamma}$. Estas leis de potência introduzem os chamados expoentes críticos², no exemplo dado β é o expoente crítico associado ao parâmetro de ordem e γ é o expoente crítico associado à susceptibilidade. Para um estudo aprofundado do tema são indicadas as referências [1, 3–5].

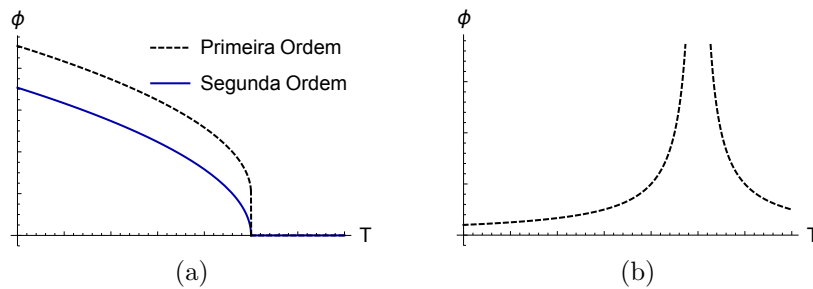


Figura 1.6: À esquerda a representação da evolução do parâmetro de ordem com a temperatura para transição de primeira ordem, onde a descontinuidade é evidente, e segunda ordem, onde existe continuidade da curva. À direita a representação da curva de susceptibilidade para uma transição de segunda ordem.

As transições de fase são comumente separadas em transições de primeira e segunda ordem. Elas são classificadas, no contexto da mecânica estatística [13, 16], pela presença de descontinuidades ou divergências nas derivadas da energia livre. Nas transições de primeira ordem, as descontinuidades são evidentes já nas primeiras derivadas, como a entropia, volume e magnetização. Nas transições de segunda ordem as descontinuidades ou divergências aparecem a partir das segundas derivadas, isto é, calor específico, compressibilidade, susceptibilidade magnética, ... No contexto particular deste trabalho, que utiliza do formalismo do potencial efetivo para estudar transições de fase, o que pode ser

² Não cabe ao escopo deste trabalho, mas é interessante ressaltar que, segundo o estudo das leis de escalonamento [4, seção 1.2], basta o conhecimento de dois expoentes críticos para determinar todos os outros. Isto pode ter uma utilidade futura para extensão do trabalho. Apesar de não calculado ao longo do presente trabalho, é possível obter com relativa facilidade ao menos dois expoentes críticos a partir do conhecimento do potencial efetivo. A saber, o expoente do parâmetro de ordem e da susceptibilidade.

observado mais facilmente é: o potencial efetivo da teoria (cujos mínimos representam os possíveis vácuos do sistema), o parâmetro de ordem (mínimo principal do potencial efetivo) e a susceptibilidade (variação do parâmetro de ordem com respeito a uma variação do campo externo). Observando o potencial efetivo, as transições de primeira ordem apresentam na temperatura crítica uma coexistência de fases, como demonstrado na figura 1.5, e as transições de segunda ordem não apresentam este fenômeno, como pode ser observado na figura 1.3. O parâmetro de ordem do sistema apresentará uma descontinuidade caso a transição seja de primeira ordem e não o fará caso esta seja de segunda ordem, observe a figura 1.6a. Por fim, ao observar a susceptibilidade, transições de segunda ordem apresentam divergência na temperatura crítica, como representado na figura 1.6b. Um exemplo de transição de primeira ordem é o caso de um fluido simples, fig 1.1, no qual ocorre coexistência de fases distintas durante o processo de transição. E um exemplo de transição de segunda ordem é o caso da transição paramagneto - ferromagneto, fig 1.2, em que não existe uma temperatura na qual ocorra tanto magnetização espontânea nula (fase simétrica) e quanto magnetização espontânea diferente de zero.

CAPÍTULO 2

POTENCIAL EFETIVO A 1 *loop*

No decorrer deste capítulo, é desenvolvido o formalismo do potencial efetivo em topologias toroidais. Como discutido no capítulo anterior, a transição de fase sofrida por um sistema físico é encarada, no âmbito da teoria de campo, como uma mudança de vácuo. Daí a utilidade, para um estudo de transições de fase, de conhecer o vácuo da teoria. Com uso do potencial efetivo é possível investigar os vácuos de um sistema físico, permitindo acompanhar a evolução tanto do parâmetro de ordem quanto de outros parâmetros presentes na teoria.

Serão abordados modelos de campos escalares autointeragentes. Os quais são, de fato, modelos efetivos e que, como tal, podem ser transportados a diversas aplicações; aqui não existe pretensão de abordar as aplicações, mas sim focar no desenvolvimento do modelo. Deve ser lembrado que o objeto de estudo, o campo escalar, é bem definido no espaço euclidiano, visto que sempre existe uma representação escalar para $SO(D)$. Isso garante consistência em utilizar um número arbitrário de dimensões.

Os modelos a serem abordados estarão em contato com um banho térmico de temperatura T , a qual será adicionada no sistema a partir do formalismo de tempo imaginário. O uso desse formalismo motiva iniciar o estudo já utilizando a forma euclidiana da integral de caminhos, a fórmula de Feynman-Kac, que inclusive é definida com um rigor matemático¹ maior do que a forma original [18].

Será abordada também a possibilidade do sistema de estudo apresentar uma topologia toroidal. A topologia toroidal pode ser algo natural do espaço, como uma dimensão extra retorcida. Por exemplo, tome uma reta em $\mathbb{R}$, para transformá-la em um torus basta identificar o ponto $x = 0$ com o ponto $x = L$, assim $x + L \equiv x$ e a topologia é exatamente a de um círculo, $\mathbb{S}$. Uma segunda possibilidade é a topologia toroidal ser uma característica de forma do sistema de estudo, isto é, um objeto em forma de toro. Ou, como será

¹ Isto envolve conceitos como a medida de Wiener. A um leitor interessado é indicado o texto de Glimm & Jaffe [17].

utilizado adiante, uma consequência de condições de contorno. Por exemplo, voltando à situação da reta, pode ser definida nela uma função $f(x)$ que efetivamente estará em uma topologia $\mathbb{S}$ caso seja feita a identificação $f(x) \equiv f(x + L)$; note que nesse caso o espaço não é modificado, mas sim imposta uma condição de contorno à função f .

A proposta aqui realizada é que, uma vez dada a teoria clássica de campo escalar autointeragente, obtém-se sistematicamente o potencial efetivo e suas correções, a nível de 1 *loop*, apresentando uma escolha arbitrária da dimensão do espaço-tempo e do número de dimensões compactificadas.

2.1 Teoria Quântica de Campos Euclidiana

O formalismo da integral de caminhos na forma euclidiana será utilizado. Apenas os principais resultados serão delineados; para informações mais detalhadas são indicadas as ótimas referências presentes na literatura [4, 19–23]. O ponto de partida é o funcional gerador das funções de correlação $Z[J]$,

$$Z[J] = e^{-\frac{1}{\hbar}W[J]} = \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{\hbar} \int d^D x [\mathcal{L}_E + J(x)\phi(x)]}, \quad (2.1)$$

que pode também ser identificado como o funcional gerador das funções de Green ou, olhando pelo ponto de vista de mecânica estatística, a função de partição do sistema. Já $W[J]$ é o funcional gerador das funções de correlação conexas, o funcional de energia, e é diretamente associado à energia livre de Helmholtz. $\mathcal{L}_E$ é a densidade de lagrangiana euclidiana e $J(x)$ é uma fonte externa arbitrária.

Durante todo este trabalho, as unidades são tais que $\hbar = c = k_B = 1$, de modo que tudo é medido em unidades de massa. Surgindo interesse em conhecer algum valor no Sistema Internacional estas constantes deverão ser reintroduzidas.

O valor esperado do campo no vácuo $\langle 0|\phi(x)|0\rangle|_{J=0}$ pode ser expresso em termos do funcional $W[J]$,

$$\langle 0|\phi(x)|0\rangle|_{J=0} = \int \mathcal{D}\phi \phi(x) e^{-\frac{1}{\hbar} \int d^D x \mathcal{L}_E} = \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} \Big|_{J=0} = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \Big|_{J=0}, \quad (2.2)$$

e, devido à invariância translacional do vácuo,

$$\langle 0|\phi(x)|0\rangle|_{J=0} = \langle 0|e^{-iP \cdot x} \phi(0) e^{iP \cdot x} |0\rangle|_{J=0} = \langle 0|\phi(0)|0\rangle|_{J=0} \equiv v = \text{cte}, \quad (2.3)$$

é uma constante, nula quando o sistema estiver em uma fase de simétrica e diferente de zero quando na fase quebrada. Na situação com presença de fonte externa, $J(x) \neq 0$, o valor esperado do campo não é uma constante, mas sim um função das coordenadas, $\phi_c(x)$, denominada campo clássico,

$$\phi_c(x) = \langle 0|\phi(x)|0\rangle = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}. \quad (2.4)$$

Quando na situação sem fonte externa, $J(x) = 0$, o campo clássico é exatamente o valor do vácuo da teoria, $\phi_c(x)|_{J \rightarrow 0} = v \neq 0$. Assim, analisar a transição de fase a partir do funcional W se traduz em tomar sua derivação funcional com respeito à fonte externa no limite de fonte externa nula. Recordando que as transições de fase são observadas pelo desenvolvimento de um valor não-nulo para o valor esperado do campo no vácuo.

A partir do funcional W constrói-se através de uma transformação de Legendre a ação efetiva $\Gamma[\phi_c]$, análogo à energia livre de Gibbs, um funcional do campo clássico $\phi_c(x)$:

$$\Gamma[\phi_c] = \int d^D x J(x) \phi_c(x) - W[J]. \quad (2.5)$$

De modo que a fonte externa é expressa como

$$J(x) = \frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)}, \quad (2.6)$$

e a análise do vácuo da teoria consiste em resolver a minimização,

$$\left. \frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} \right|_{J(x) \rightarrow 0} = 0. \quad (2.7)$$

A ação efetiva é o gerador das funções de vértice de n pernas externas $\Gamma^{(n)}$, que são as funções de correlação conexas e irreduzíveis. É possível obter a partir da ação efetiva o potencial efetivo, que é simplesmente o potencial clássico com as correções quânticas; este procedimento está bem exposto na referência [4]. Essa associação é realizada tomando uma configuração de campo clássico constante $\phi_c = \text{cte}$ o que remove todos os termos de derivada da ação efetiva. Efetivamente, isto implica zerar os momenta na ação efetiva, o que equivale a uma remoção de toda a parte cinética, sobrando somente o que definirá o potencial efetivo ($\tilde{\Gamma}|_{p_\alpha=0} \propto -V_{\text{eff}}$, sendo $\tilde{\Gamma}$ a função vértice no espaço dos momenta). Zerando os momenta e expandindo, dentro do espaço de momenta, em termos das funções de vértice, obtém-se para o potencial efetivo a seguinte expressão:

$$V_{\text{eff}}(\phi_c) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_\alpha = 0) [\phi_c - v]^n. \quad (2.8)$$

Na qual $p_\alpha = 0$ simboliza que todos os momenta externos dos vértices próprios de n linhas externas, $\Gamma^{(n)}$, são nulos. O vácuo do sistema, v , pode até ser trivialmente nulo, entretanto é mais útil deixar esta questão em aberto. Assim, o formalismo fica preparado para o caso de uma teoria com quebra espontânea de simetria, na qual $v \neq 0$. Os vértices próprios podem ser expandidos em *loops*. Veja, por exemplo, a expansão do vértice próprio sem nenhuma linha externa na figura 2.1.

Existem vários métodos para se obter o potencial efetivo. O método devido a Coleman-Weinberg [11] consiste em somar diretamente a série de funções vértice. Porém, ao aumentar o número de vértices da teoria, a tarefa de realizar a soma infinita se torna trabalhosa,

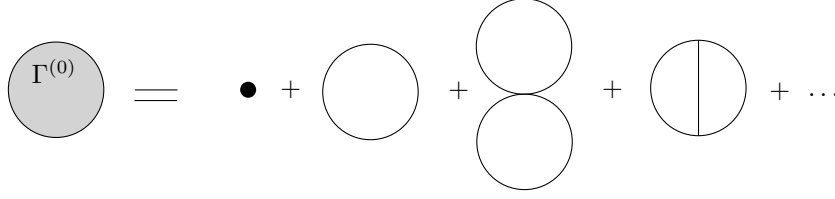


Figura 2.1: Expansão diagramática de $\Gamma^{(0)}$.

devido à dificuldade de acompanhar os fatores combinatórios, e potencialmente improdutivo, devido às possíveis dificuldades em reduzir a soma infinita a uma expressão fechada.

Um método mais elaborado, mas que não será utilizado neste trabalho, é devido a Jackiw [24], ele permite computar funcionalmente o potencial efetivo. Este procedimento foi depois levado adiante na construção do formalismo 2PI [23, 25], isto é, que considera diagramas os quais não se reduzem mesmo cortando duas linhas internas (*two particle irreducible*).

Neste trabalho será utilizado o método do *tadpole*, de Lee-Sciaccaluga [12], a ser abordado na seção 2.1.1. Ele é escolhido por permitir uma obtenção mais direta do potencial efetivo na situação em que a ação apresenta vários tipos de vértices.

Uma vez obtido o potencial efetivo da teoria, investigar o valor esperado do campo no vácuo consiste em encontrar um valor v tal que

$$\left. \frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \phi_c} \right|_{\phi_c=v} = 0, \quad (2.9)$$

a obtenção de $v \neq 0$ indica que o sistema se encontra em uma fase de simetria quebrada. Note que a dificuldade do problema reduziu comparado à relação (2.7), onde era preciso analisar uma derivação funcional.

2.1.1 Método de Lee-Sciaccaluga

A ação efetiva a descrever o sistema será

$$S_E = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \phi^n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta a_n}{n!} \phi^n(x) \right\}, \quad (2.10)$$

na qual já foram incluídos desde já os contratermos, a serem determinados posteriormente, associados à renormalização do potencial efetivo. Aproveitando aqui do fato de se trabalhar com teorias efetivas, nas quais a questão da renormalizabilidade não é tão essencial, considera-se um potencial genérico que possa ser expandido em uma série de Taylor. Obviamente, truncando a série, retorna-se trivialmente ao caso convencional de potenciais polinomiais.

Para obter o potencial efetivo é necessário que obtenhamos as correções devidas aos *loops*. Será utilizado o método do *tadpole* de Lee-Sciaccaluga [12]. O potencial original

apresenta as constantes de acoplamento a_n e tem valor esperado no vácuo² nulo $\langle 0|\phi|0\rangle = 0$. Este é o ponto de vista de uma teoria sem quebra de simetria. Ao supor uma quebra espontânea de simetria assume-se a possibilidade de existir uma configuração onde o valor esperado no vácuo é diferente de zero $\langle 0|\phi|0\rangle = v$.

Este novo vácuo v é um novo mínimo principal do potencial e pode ser determinado a partir da investigação de

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \phi_c} \right|_{\phi_c=v} = 0.$$

Esta expressão garante que o vácuo v pertence a um dos extremos do potencial. Claramente, seria necessário ainda investigar se ele é um mínimo e se é o principal. Ou seja, é uma exigência necessária, mas não suficiente. Deve ser lembrado aqui que ϕ_c está sendo tomada como uma configuração constante, como realizado na seção anterior.

Supondo $v \neq 0$, pode-se observar a reexpressão do potencial definido agora em torno do vácuo estável³,

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\left. \frac{\partial^n V}{\partial \phi_c^n} \right|_{\phi_c=v}}_{b_n} (\phi_c - v)^n.$$

Define-se um novo campo $\phi'_c = \phi_c - v$ cujo valor esperado no vácuo é de fato nulo. E obtêm-se as novas constantes de acoplamento b_n ,

$$\begin{aligned} b_n &= \left. \frac{\partial^n V}{\partial \phi_c^n} \right|_{\phi_c=v} = \frac{\partial^n}{\partial \phi_c^n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{m!} \phi_c^m \bigg|_{\phi_c=v} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m-n)!} v^{m-n} \\ &= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{a_m}{(m-n)!} v^{m-n} = \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{a_{n'+n}}{n'!} v^{n'}. \end{aligned}$$

Portanto, na teoria que sofreu deslocamento do vácuo, considera-se como variável de campo ϕ'_c e os novos vértices e contratermos são

$$b_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+n} \frac{v^m}{m!}, \quad (2.11)$$

$$\delta b_n = \sum_{m=0}^{\infty} \delta a_{m+n} \frac{v^m}{m!}. \quad (2.12)$$

Note que, decorrente da própria definição, as constantes de acoplamento b_n são associadas umas às outras segundo

$$b_n = \frac{\partial^k b_{n-k}}{\partial v^k}. \quad (2.13)$$

² Como mostrado na seção anterior, a computação do valor esperado do campo no vácuo depende da invariância translacional do sistema. E, devido a isto, não é necessário evidenciar que as coordenadas x do campo.

³ Note que para $v = 0$ retorna-se diretamente ao caso convencional. Implicando simplesmente que o formalismo pode ser utilizado mesmo que não exista quebra de simetria no sistema.

Pode-se então conhecer todas elas a partir da primeira, b_2 , que está assumindo o lugar de um termo de massa nesta teoria deslocada.

Como breve comentário, para ajudar a verificar o cálculo, é útil pontuar que por análise dimensional,

$$\begin{aligned} [\phi_c] &= D/2 - 1 & [b_2] &= 2 \\ [b_3] &= 3 - D/2 & [b_4] &= 4 - D. \end{aligned}$$

Como dito anteriormente, o potencial efetivo pode ser expresso como

$$V_{\text{eff}}(\phi_c) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_\alpha = 0) [\phi_c - v]^n.$$

Derivando uma vez com respeito a v e tomando a situação em que $\phi_c = v$, tem-se

$$\left. \frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial v} \right|_{\phi_c=v} = \tilde{\Gamma}^{(1)}(p_\alpha = 0),$$

onde $\tilde{\Gamma}^{(1)}$ representa simplesmente a soma de todos os diagramas com somente uma linha externa. O ponto característico do método de Lee-Sciaccaluga consiste em integrar a relação anterior com respeito a v :

$$V_{\text{eff}}(v) = \int dv \tilde{\Gamma}^{(1)}(p_\alpha = 0), \quad (2.14)$$

lembrando que a função de vértice é associada aos vértices novos, b_n , da teoria. Obteve-se assim uma forma direta para obter o potencial efetivo. Deve-se prestar atenção ao fato de que não foi tomada nenhuma expansão ainda, de modo que este resultado é exato. Agora será tomada a expansão em loops e iniciado o processo de computar o potencial efetivo para cada ordem de *loop*.

A partir deste momento, assume-se que o valor esperado do campo $\langle 0|\phi(x)|0\rangle = \phi_c$ é o valor do vácuo v e toma-se a identificação direta $\phi_c = v$. Isto implica que, no âmbito da ação, fala-se somente de a_n e de $\phi(x)$. Mas as correções utilizam o método de Lee-Sciaccaluga, trabalhando com os b_n e utilizando a identificação $\phi_c = v$. Reexpressando equações anteriores:

$$b_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+n} \frac{\phi_c^m}{m!}, \quad (2.15a)$$

$$\delta b_n = \sum_{m=0}^{\infty} \delta a_{m+n} \frac{\phi_c^m}{m!}, \quad (2.15b)$$

$$b_n = \frac{\partial^k b_{n-k}}{\partial \phi_c^k}, \quad (2.15c)$$

$$V_{\text{eff}}(\phi_c) = \int d\phi_c \tilde{\Gamma}^{(1)}(p_\alpha = 0). \quad (2.15d)$$

Em nível árvore a única contribuição para a função vértice de uma linha externa é proveniente do vértice b_1 , sem presença de propagador. Assim,

$$V_{\text{eff}}^{(0)}(\phi_c) = \int d\phi_c \tilde{\Gamma}_{0\text{-loop}}^{(1)}(p_\alpha = 0) = \int d\phi_c b_1 = \int d\phi_c \frac{\partial b_0}{\partial \phi_c} = b_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\phi_c^n}{n!} = V_0.$$

Este é exatamente o resultado esperado, de que, em nível árvore, o potencial efetivo é simplesmente o potencial clássico. Em nível de 1 *loop* existe somente um diagrama: exatamente o que tem a constante de acoplamento b_3 , interação cúbica. Ele está representado na figura 2.2.

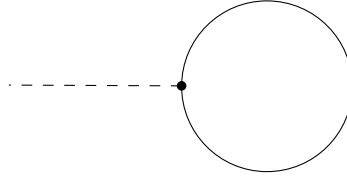


Figura 2.2: Contribuição de 1 *loop* com uma perna externa no caso de uma teoria de bóson escalar real com auto-interação. Um *tadpole* simples.

A função de vértice é montada através das regras de Feynman⁴ para o caso escalar:

$$-\tilde{\Gamma}_{1\text{-loop}}^{(1)}(p_\alpha = 0) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{simetria}} \times \underbrace{b_3}_{\text{acoplamento}} \times \underbrace{\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D}}_{\text{integração no loop}} \times \underbrace{\frac{-1}{q^2 + b_2}}_{\text{propagador}} \quad (2.16)$$

$$\tilde{\Gamma}_{1\text{-loop}}^{(1)}(p_\alpha = 0) = \frac{b_3}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2 + b_2}$$

$$V_{\text{eff}}^{(1)} = V_1 = \int d\phi_c \tilde{\Gamma}_{1\text{-loop}}^{(1)}(p_i = 0) = \int d\phi_c \frac{b_3}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2 + b_2}.$$

Assim, truncando em 1 *loop* o potencial efetivo é exatamente

$$V_{\text{eff}}^{1\text{-loop}} = V_0 + \int d\phi_c \frac{b_3}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2 + b_2}. \quad (2.17)$$

Ressalta-se aqui que este resultado, ainda no contexto de uma TQC euclidiana, é válido para qualquer potencial clássico que possa ser expresso em uma série de Taylor. Esta generalização é garantida por b_2 e b_3 , os quais carregam as informações do potencial genérico da teoria. Ou seja, o potencial efetivo a 1 *loop* para uma grande variedade de potenciais clássicos é conhecido e pode ser utilizado.

⁴ Evidenciadas na equação (2.16). Para real aprofundamento as referências [4, 19, 21–23] são indicadas.

2.2 TQC em Topologias Toroidais : adicionando temperatura e compactificações espaciais

Até o momento nada foi dito sobre os parâmetros de controle a serem utilizados: a temperatura, as compactificações espaciais e o potencial químico. Eles serão introduzidos diretamente em integrais do tipo

$$I = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2 + b_2}, \quad (2.18)$$

a partir do formalismo de espaços toroidais [10, 22].

A introdução de temperatura segue o formalismo do tempo imaginário, elaborado por Matsubara [7]. A denominação *tempo imaginário* refere-se à utilização da teoria de campos na métrica euclidiana, situação na qual é utilizada a variável real τ definida como $\tau = -it$. O procedimento de Matsubara surge de analogias entre o formalismo de teoria quântica de campos e o formalismo da mecânica estatística quântica e é aplicável somente para estudo de sistemas no equilíbrio termodinâmico. A função partição, no ensemble canônico, é dada por

$$Z(\beta) = \text{Tr } e^{-\beta H}, \quad (2.19)$$

sendo H o operador hamiltoniano e $\beta = \frac{1}{T}$, o inverso da temperatura⁵. O traço é a soma por todos os estados possíveis, podendo ser escrito como,

$$Z(\beta) = \int d\phi \langle \phi | e^{-\beta H} | \phi \rangle. \quad (2.20)$$

Representada deste modo, a função de partição é a amplitude de transição de um estado a si mesmo. O ponto de partida do desenvolvimento formal da integral de caminhos consiste no cálculo destas amplitudes de transição, como pode ser visto em várias boas referências sobre integral de caminhos [3, 15, 18–21, 26, 27]. A amplitude de transição é expressa, na métrica euclidiana, por

$$\int_{\phi(\tau_a, x_a) = \phi_a}^{\phi(\tau_b, x_b) = \phi_b} \mathcal{D}\phi e^{-\int d\tau \int d^{D-1}x \mathcal{L}_E}. \quad (2.21)$$

Para o caso especial aqui abordado retorna-se ao ponto inicial ($x_a = x_b = x$) e a integral no tempo imaginário τ está restrita ao intervalo $0 \leq \tau \leq \beta$, portanto,

$$Z(\beta) = \int_{\text{periódico}} \mathcal{D}\phi e^{-\int_0^\beta d\tau \int d^{D-1}x \mathcal{L}_E}. \quad (2.22)$$

A periodicidade se traduz como uma condição de contorno, garantindo que o estado final é igual ao inicial

$$\phi(\tau, x) \equiv \phi(\tau + \beta, x). \quad (2.23)$$

⁵ Escolha de grandezas tomada de modo que a constante de Boltzmann seja $k_B = 1$

Fica claro, na forma (2.22), que ao tomar o limite de temperatura nula, $\beta \rightarrow \infty$, a função partição se torna o funcional gerador das funções de correlações desconexas (ver equação (2.1)). O processo inverso, obter a função partição a partir da teoria de campos euclidiana, exigirá que seja adotada a condição de contorno (2.23).

Efetivamente, a dimensão associada ao tempo euclidiano será compactificada, deixando de se estender ao infinito e se restringindo a um tamanho $\beta = \frac{1}{T}$. A referência [2] introduz em seu primeiro capítulo essa relação tanto pelo ponto de vista canônico quando por integrais de caminho, demonstra também a questão das frequências de Matsubara para bósons e férmions – associadas à compactificação temporal.

As identificações de Matsubara podem ser obtidas no processo de construção do propagador livre da teoria, definido a partir da equação diferencial

$$(-\square + m^2)G(x, y) = \delta^D(x - y). \quad (2.24)$$

Devido à condição de periodicidade, equação (2.23), a componente de momentum associado ao tempo imaginário só poderá assumir valores discretos, denominados frequências de Matsubara

$$p_0 \rightarrow \omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}, \quad (2.25)$$

e a integral com respeito ao momentum se traduzirá em uma soma nas frequências de Matsubara

$$\int \frac{dp_0}{2\pi} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty}. \quad (2.26)$$

De modo que o propagador da teoria livre se torna

$$G(\tau, \mathbf{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{D-1}q}{(2\pi)^{D-1}} e^{-i\omega_n \tau} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \tilde{G}(\omega_n, \mathbf{q}), \quad (2.27a)$$

$$\tilde{G}(\omega_n, \mathbf{q}) = \frac{1}{\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \mathbf{q}^2 + m^2}. \quad (2.27b)$$

Malbouisson et al. [10, 22] realizam uma extensão do formalismo de Matsubara generalizando-o para a possibilidade de compactificações espaciais do sistema físico e introdução de potencial químico. Será trabalhado aqui com o procedimento geral onde serão realizadas d compactificações cada uma com seu tamanho característico L_α e um parâmetro μ_α associado. É introduzido o índice α para facilitar a escrita, de modo que $L_\alpha = (L_0, L_1, \dots, L_{d-1}) = (\beta, L_1, \dots, L_{d-1}) = (\beta, L_i)$, sendo L_i as compactificações espaciais. As condições de contorno estendidas para bósons,

$$\phi(\tau; x_i) \equiv \phi(\tau + \beta; x_i), \quad (2.28a)$$

$$\phi(\tau; x_i) \equiv \phi(\tau; x_i + L_i), 1 \leq i \leq d-1, \quad (2.28b)$$

introduzem a temperatura e as compactificações em direções espaciais⁶. Elas levam à obtenção das prescrições estendidas de Matsubara para bósons, seguindo as referências [10, 22], através das identificações

$$\int \frac{dp_\alpha}{2\pi} \rightarrow \frac{1}{L_\alpha} \sum_{n_\alpha=-\infty}^{\infty}, \quad (2.29a)$$

$$p_\alpha \rightarrow \frac{2\pi n_\alpha}{L_\alpha} - i\mu_\alpha. \quad (2.29b)$$

O parâmetro μ_α , quando associado à temperatura, assume o significado do potencial químico⁷ μ ; ele não significa nada quando associado às compactificações espaciais. Na prática ocorre $\mu_0 = \mu$ e $\mu_i = 0$, pois associa-se $L_0 = \beta$.

Salienta-se que, efetivamente, ao utilizar as identificações (2.29) e as condições de contorno (2.28), o sistema estará sendo transportado de uma métrica euclidiana D -dimensional $\mathbb{R}^D$ para uma métrica tipo toroidal $\mathbb{R}^{D-d} \times (\mathbb{S}^1)^d$; daí o nome do formalismo: teoria quântica de campos em espaços toroidais. O formalismo foi recentemente revisado na referência [10].

Por exemplo, tomando o espaço-tempo convencional, quadri-dimensional, e implementando duas compactificações, uma para gerar temperatura $\beta = 1/T$ e outra compactificando uma direção espacial em um tamanho L , o sistema se torna um filme infinito de espessura L imerso em um banho térmico de temperatura T . O filme apresenta a condição de contorno de que o campo é o mesmo na superfície inferior e superior, isto é, uma condição de contorno de Dirichlet. Efetivamente, o filme com esta condição de contorno apresenta a mesma topologia que um toro.

Voltando à compactificação gerada pelas identificações (2.29), os momenta associados às dimensões não compactificadas serão nomeados coletivamente como $\mathbf{q}$, de modo que, para um vetor momentum D -dimensional, se escreve

$$\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_{d-1}, \mathbf{q}).$$

O cálculo a ser realizado a 1 loop terá a forma da integral-soma,

$$I = \frac{1}{L_0 \dots L_{d-1}} \sum_{n_0, \dots, n_{d-1}=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{D-d}q}{(2\pi)^{D-d}} \frac{1}{q^2 + b_2 + \sum_{\alpha=0}^{d-1} \left(\frac{2\pi n_\alpha}{L_\alpha} - i\mu_\alpha \right)^2}.$$

Claramente, existem dois modos de proceder. Um dos caminhos consiste em primeiro realizar a integração e depois calcular o somatório, e este é o caminho comumente seguido

⁶ É interessante notar que a condição de contorno sob as direções espaciais não precisaria necessariamente ser periódica, outras condições contorno poderiam ser adotadas para compactificar. Neste trabalho é utilizada a extensão mais natural à condição de contorno já adotada para gerar a temperatura. Esta escolha leva à aplicação natural do formalismo de espaços toroidais.

⁷ Nas referências [15, Seção 3.2] e [26, Seção 2.4] é introduzido o potencial químico, utilizando do formalismo da integral de caminho, em associação à conservação de carga de um campo escalar complexo.

dentro do formalismo de espaços toroidais [9, 10]. O segundo caminho consiste em primeiro computar o somatório e depois tentar olhar a integração, que é o caminho comumente seguido no formalismo de temperatura finita [2]. A vantagem do procedimento utilizado no formalismo de espaços toroidais é a analiticidade. O modo exposto normalmente no formalismo de temperatura finita é próprio para situações nas quais se deseja somente aproximações e, certamente, é associada ao desconhecimento, na época, da existência de abordagem analítica bem definida.⁸

A integração está resolvida no Apêndice A. Para adequá-la, basta utilizar as identificações $D \rightarrow D - d$, $n \rightarrow 1$ e $m_0^2 \rightarrow b_2 + \sum_{\alpha=0}^{d-1} \left(\frac{2\pi n_\alpha}{L_\alpha} - i\mu_\alpha \right)^2$. Substituindo e organizando obtém-se,

$$I = \frac{1}{2^{D-d}\pi^{\frac{D-d}{2}}} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{D-d}{2}\right)}{L_0 \dots L_{d-1}} \sum_{n_0, \dots, n_{d-1}=-\infty}^{\infty} \left[b_2 + \sum_{\alpha=0}^{d-1} \left(\frac{2\pi n_\alpha}{L_\alpha} - i\mu_\alpha \right)^2 \right]^{\frac{D-d}{2}-1}. \quad (2.30)$$

Já é possível perceber aqui, com uso das identificações

$$m_0^2 = b_2, \quad s = 1 - \frac{D-d}{2}, \quad a_\alpha = \left(\frac{2\pi}{L_\alpha} \right)^2, \quad b_\alpha = \frac{L_\alpha \mu_\alpha}{2\pi},$$

a função zeta de Epstein-Hurwitz exposta no apêndice B e cuja extensão analítica é expressa na equação (B.16). Substituindo e organizando, obtém-se

$$\begin{aligned} I = & \frac{1}{2^D \pi^{\frac{D}{2}}} \left\{ (b_2)^{-1+\frac{D}{2}} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) + 2^2 \sum_{\alpha=0}^{d-1} \sum_{n_\alpha=1}^{\infty} \left(\frac{n_\alpha L_\alpha}{2\sqrt{b_2}} \right)^{1-\frac{D}{2}} \cosh(n_\alpha L_\alpha \mu_\alpha) \right. \\ & \times K_{\frac{D}{2}-1}\left(n_\alpha \sqrt{b_2} L_\alpha\right) + 2^3 \sum_{\alpha' > \alpha=0}^{d-1} \sum_{n_{\alpha'}=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n_\alpha^2 L_\alpha^2 + n_{\alpha'}^2 L_{\alpha'}^2}}{2\sqrt{b_2}} \right)^{1-\frac{D}{2}} \cosh(n_\alpha L_\alpha \mu_\alpha) \\ & \times \cosh(n_{\alpha'} L_{\alpha'} \mu_{\alpha'}) K_{\frac{D}{2}-1}\left(\sqrt{b_2} \sqrt{n_\alpha^2 L_\alpha^2 + n_{\alpha'}^2 L_{\alpha'}^2}\right) + \dots + 2^{d+1} \sum_{n_0, \dots, n_{d-1}=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\sum_{\alpha=1}^d n_\alpha^2 L_\alpha^2}}{2\sqrt{b_2}} \right)^{1-\frac{D}{2}} \\ & \left. \times \left[\prod_{\alpha=0}^{d-1} \cosh(n_\alpha L_\alpha \mu_\alpha) \right] K_{\frac{D}{2}-1}\left(\sqrt{b_2} \sqrt{\sum_{\alpha=0}^{d-1} n_\alpha^2 L_\alpha^2}\right) \right\}, \quad (2.31) \end{aligned}$$

que é a extensão analítica da soma (2.30), trazendo o aparecimento das funções de Bessel modificadas do segundo tipo (a partir deste ponto chamadas somente de funções de Bessel K).

⁸ A questão sobre a validade de mudança no ordenamento da integral-soma é intimamente relacionada à questão do ordenamento das integrais múltiplas antes de inserir a compactificação. A integral original converge para algumas escolhas de dimensionalidade D de modo que vale o teorema de Fubini nestes casos, garantindo a permutação das integrais. E, por consequência, das integrais e somas. A extensão para as dimensionalidades divergentes segue os prolongamentos da regularização dimensional.

Voltando ao caso de interesse ($\tilde{\Gamma}_{1\text{-Loop}}^{(1)}(p_\alpha = 0)$) e especificando que $L_0 = \beta$ e que somente $\mu_0 = \mu$, sendo todos os outros $\mu_i = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{1\text{-Loop}}^{(1)}(p_\alpha = 0) = & \frac{\Gamma(1 - \frac{D}{2})}{2(4\pi)^{\frac{D}{2}}} b_3 b_2^{\frac{D-2}{2}} + \frac{b_3 b_2^{\frac{D-2}{4}}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \left\{ \sum_{\alpha=0}^{d-1} \sum_{n_\alpha=1}^{\infty} \frac{\cosh(n_\alpha \beta \mu \delta_{\alpha 0})}{(n_\alpha L_\alpha)^{\frac{D-2}{2}}} K_{\frac{D-2}{2}} \left(n_\alpha L_\alpha \sqrt{b_2} \right) \right. \\ & \left. + \dots + 2^{d-1} \sum_{n_0, \dots, n_{d-1}=1}^{\infty} \frac{\cosh(n_0 \beta \mu)}{(\sum_{\alpha=0}^{d-1} n_\alpha^2 L_\alpha^2)^{\frac{D-2}{4}}} K_{\frac{D-2}{2}} \left(\sqrt{\sum_{\alpha=0}^{d-1} n_\alpha^2 L_\alpha^2} \sqrt{b_2} \right) \right\} \end{aligned}$$

Fica então faltando obter, com uso deste resultado, o potencial efetivo da teoria.

2.2.1 Potencial efetivo

Como já visto, a correção de 1 *loop* do potencial efetivo é computada com uso da equação (2.14).

No caso da correção de 1 *loop*, o cálculo do potencial efetivo é facilitado por um detalhe: o fato de $\tilde{\Gamma}_{1\text{-Loop}}^{(1)}(p_\alpha = 0)$ depender linearmente de b_3 e ser função de b_2 . Como toda a dependência em ϕ_c está contida em b_2 e b_3 obtem-se, utilizando a relação (2.13),

$$\int d\phi_c b_3 F(b_2) = \int d\phi_c \frac{db_2}{d\phi_c} F(b_2) = \int db_2 F(b_2).$$

Computando a integral,

$$\begin{aligned} V_1 = & \frac{\Gamma(1 - \frac{D}{2})}{D(4\pi)^{\frac{D}{2}}} b_2^{\frac{D}{2}} + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \sum_{\alpha=0}^{d-1} \sum_{n_\alpha=1}^{\infty} \frac{\cosh(n_0 \beta \mu \delta_{\alpha 0})}{(n_\alpha L_\alpha)^{\frac{D-2}{2}}} \int db_2 b_2^{\frac{D-2}{4}} K_{\frac{D-2}{2}} \left(n_\alpha L_\alpha \sqrt{b_2} \right) \\ & + \dots + \frac{2^{d-1}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \sum_{n_0, \dots, n_{d-1}=1}^{\infty} \frac{\cosh(n_0 \beta \mu)}{(\sum_{\alpha=0}^{d-1} n_\alpha^2 L_\alpha^2)^{\frac{D-2}{4}}} \int db_2 b_2^{\frac{D-2}{4}} K_{\frac{D-2}{2}} \left(\sqrt{\sum_{\alpha=0}^{d-1} n_\alpha^2 L_\alpha^2} \sqrt{b_2} \right), \end{aligned}$$

definindo $W_{D,k}$ por

$$\begin{aligned} W_{D,k}(\beta, L_i, \mu; b_2) = & \frac{b_2^{\frac{D-2k}{4}}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \sum_{\alpha=0}^{d-1} \sum_{n_\alpha=1}^{\infty} \frac{\cosh(n_0 \beta \mu \delta_{\alpha 0})}{(n_\alpha L_\alpha)^{\frac{D-2k}{2}}} K_{\frac{D-2k}{2}} \left(n_\alpha L_\alpha \sqrt{b_2} \right) \\ & + \dots + \frac{2^{d-1} b_2^{\frac{D-2k}{4}}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \sum_{n_0, \dots, n_{d-1}=1}^{\infty} \frac{\cosh(n_0 \beta \mu)}{(\sum_{\alpha=0}^{d-1} n_\alpha^2 L_\alpha^2)^{\frac{D-2k}{4}}} K_{\frac{D-2k}{2}} \left(\sqrt{\sum_{\alpha=0}^{d-1} n_\alpha^2 L_\alpha^2} \sqrt{b_2} \right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

e com

$$b_2 = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2} \frac{\phi_c^m}{m!}, \quad (2.33)$$

pode-se simplificar a notação e o potencial efetivo é reescrito como

$$V_{\text{eff}}(\phi_c; \beta, L_i, \mu; a_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \phi_c^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta a_n}{n!} \phi_c^n + \frac{\Gamma(1 - \frac{D}{2})}{D(4\pi)^{\frac{D}{2}}} b_2^{\frac{D}{2}} + \int db_2 W_{D,1}(\beta, L_i, \mu; b_2).$$

Fica restando somente uma integração, que depende diretamente da integral sobre as funções de Bessel K. Identificando o somatório nos tamanhos de compactificação como A , computa-se que

$$F_D^k(A, b_2) = \frac{b_2^{\frac{D-2k}{4}}}{A^{\frac{D-2k}{2}}} K_{\frac{D-2k}{2}}(A\sqrt{b_2}),$$

$$\int dx F_D^1(A, b_2) = -2F_D^0(A, b_2) + \frac{2^{D/2}\pi}{A} \frac{\csc(D\pi/2)}{\Gamma(1-D/2)}.$$

O segundo termo é completamente independente de b_2 (e, portanto, de ϕ_c) e poderá ser descartado no processo de renormalização⁹. Ressalta-se que este termo deixado de lado é finito. Ignorando o fator A sabe-se exatamente o resultado do termo esperado para cada dimensionalidade. A saber, em $D = 4$, o termo $2^{D/2}\pi \frac{\csc(D\pi/2)}{\Gamma(1-D/2)}$ é igual a 4 e, em $D = 3$, igual a $\sqrt{2\pi}$.

Assim, o potencial efetivo não renormalizado assume a simples forma

$$V_{\text{eff}}(\phi_c; \beta, L_i, \mu; a_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \phi_c^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta a_n}{n!} \phi_c^n + \frac{\Gamma(1 - \frac{D}{2})}{D(4\pi)^{\frac{D}{2}}} b_2^{\frac{D}{2}} - 2W_{D,0}(\beta, L_i, \mu; b_2), \quad (2.34)$$

onde L_i representa somente as dimensões espaciais compactificadas.

Falta somente ajustar os contratermos e obtém-se o potencial efetivo pronto para ser utilizado. O limite para o “*bulk*” (situação na qual as dimensões espaciais são ilimitadas, $L_i \rightarrow \infty$) e sem temperatura ($\beta \rightarrow \infty$) zera as funções de Bessel. Isto consistentemente elimina completamente a contribuição do termo $W_{\frac{D-2}{2}}$, de modo a restar somente a contribuição esperada da teoria euclidiana. Ou seja, o limite do *bulk* efetivamente remove a teoria da topologia tipo toroidal.

2.2.2 Restrições sobre a função W

No limite de baixas temperaturas ($\beta \rightarrow \infty$) e sem compactificações espaciais ($L_i \rightarrow \infty$) é necessário lidar com

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{K_\alpha(X\sqrt{b_2})}{X^\nu} \approx \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{e^{-X\sqrt{b_2}}}{X^\nu},$$

que naturalmente converge caso $\sqrt{b_2}$ seja real, exigindo assim que $b_2 > 0$.

Outra exigência que surge é associada somente à temperatura e ao potencial químico. Note que

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \cosh(X\mu) \frac{K_\nu(X\sqrt{b_2})}{X^\nu} = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{e^{\mu X} + e^{-\mu X}}{2} \frac{K_\nu(X\sqrt{b_2})}{X^\nu}.$$

Considerando $\mu > 0$ nota-se que o termo $e^{\mu X}$ não é convergente no limite de $X \rightarrow \infty$. Assim,

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{e^{\mu X} + e^{-\mu X}}{2} \frac{e^{X\sqrt{b_2}}}{X^\nu},$$

⁹ De fato, ele é eliminado na exigência comum de que $V_{\text{eff}}(\phi_c = 0) = 0$.

que converge somente caso $|\mu| < \sqrt{b_2}$. Isso traz um limite da boa aplicabilidade do modelo. Não é possível tratar de qualquer potencial químico, somente daqueles que se encaixam na restrição. Essa mesma restrição é encontrada também na referência [15, Sec. 3.2], no contexto de temperatura finita sem compactificações espaciais.

2.3 Correções nos parâmetros

Precisa-se agora adotar uma prescrição de renormalização, antes disso será feito um breve interlúdio para deixar claro como obter os parâmetros corrigidos da teoria.

Os parâmetros efetivos da teoria são dependentes dos parâmetros de controle β , L_i e μ segundo

$$a_n^{\text{eff}}(v; \beta, L_i, \mu) = \left. \frac{d^n V_{\text{eff}}}{d\phi_c^n} \right|_{\phi_c=v} = b_n(v) + \delta b_n(v) + \left. \frac{d^n V_1}{d\phi_c^n} \right|_{\phi_c=v} \quad (2.35)$$

Note que eles dependem do valor do vácuo v , ou seja, da fase do sistema. Na fase simétrica (desordenada), ocorre simplesmente $v = 0$. Deve-se então atentar à questão da fase no processo de renormalização. Caso exista interesse somente na fase simétrica, adota-se simplesmente $v = 0$. Obviamente, isto restringe a validade do estudo, invalidando a aplicação à fase quebrada.

Algo importante é saber derivar V_1 com respeito a ϕ_c . É possível generalizar este cálculo, pois V_1 depende de ϕ_c somente através de b_2 , permitindo assim realizar a regra da cadeia. Derivar com respeito a b_2 é direto:

$$\frac{d^n V_1}{db_2^n} = (-1)^{n-1} \frac{\Gamma(\frac{2n-D}{2})}{2(4\pi)^{\frac{D}{2}}} b_2^{\frac{D-2n}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} W_{D,n}(\beta, L_i, \mu; b_2). \quad (2.36)$$

A relação entre $\frac{d^n V_1}{d\phi_c^n}$ e $\frac{d^n V_1}{db_2^n}$ é combinatória,

$$\frac{d^n V_1}{d\phi_c^n} = \sum_{\text{Possibilidades}} \frac{n!}{n_1! \dots n_d! m_1! \dots m_d!} b_{m_1+2}^{n_1} \dots b_{m_d+2}^{n_d} \frac{d^{n_1+\dots+n_d} V_1}{db_2^{n_1+\dots+n_d}}. \quad (2.37)$$

Esta relação combinatória pode ser visualizada diagramaticamente. Desenha-se um *loop* e dele saem linhas (linhas externas) devido à presença de vértices. Um vértice b_{m_1+2} tem m_1 linhas externas. Os m_i identificam então os tipos de vértices presentes. Os n_i indicam quantas vezes cada um destes vértices se repetiu. Assim, $\sum_i n_i$ registra o número total de vértices e $n = \sum_i n_i m_i$ registra o número total de linhas externas.

As possibilidades podem ser percebidas diagramaticamente. Dado um número n de linhas externas desenha-se todos os diagramas de 1 *loop* que podem apresentar n linhas externas. A partir disto, verifica-se em cada diagrama destes os vértices presentes e suas repetições para poder obter o fator multiplicativo dado pelos fatoriais.

Esta representação diagramática é exibida na figura 2.3, onde são colocados todos os diagramas possíveis para representar a quarta derivada ($n = 4$). A informação colocada

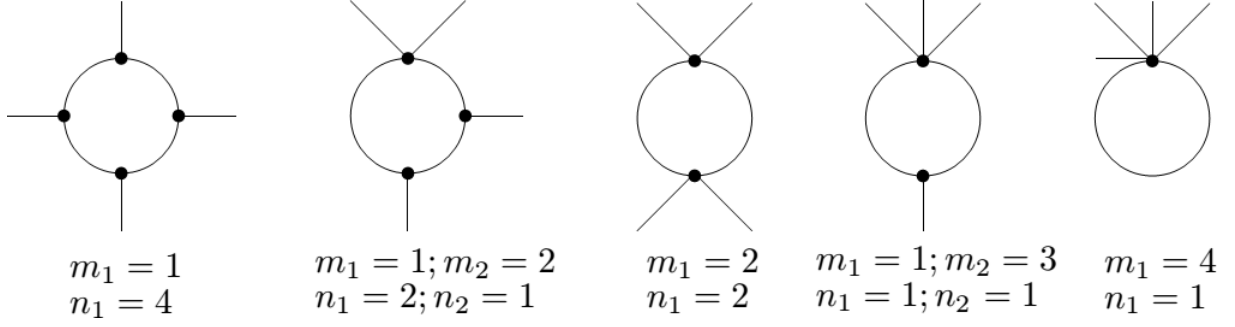


Figura 2.3: Diagramas associados a $n = 4$ e os respectivos valores de n_i e m_i associados a cada diagrama.

na figura dos valores de m_i e n_i permite uma melhor compreensão do significado de cada um.

Por questão de clareza, apresenta-se aqui as primeiras ordens:

$$\frac{dV_1}{d\phi_c} = b_3 \frac{dV_1}{db_2}, \quad (2.38a)$$

$$\frac{d^2V_1}{d\phi_c^2} = b_4 \frac{dV_1}{db_2} + b_3^2 \frac{d^2V_1}{db_2^2}, \quad (2.38b)$$

$$\frac{d^3V_1}{d\phi_c^3} = b_5 \frac{dV_1}{db_2} + 3b_4b_3 \frac{d^2V_1}{db_2^2} + b_3^3 \frac{d^3V_1}{db_2^3}, \quad (2.38c)$$

$$\frac{d^4V_1}{d\phi_c^4} = b_6 \frac{dV_1}{db_2} + (4b_5b_3 + 3b_4^2) \frac{d^2V_1}{db_2^2} + 6b_4b_3^2 \frac{d^3V_1}{db_2^3} + b_3^4 \frac{d^4V_1}{db_2^4}. \quad (2.38d)$$

A escolha do procedimento de renormalização é importante. Todas as prescrições válidas de renormalização concordam no resultado quando consideram-se todas as ordens da expansão perturbativa (ou seja, soma de todos os infinitos diagramas). Esta concordância, porém, não é garantida para séries truncadas, e de fato nem é esperada nesta situação. Além disto, não há como saber, a priori, qual o melhor procedimento de renormalização a ser utilizado. Por melhor procedimento, refere-se a uma prescrição que permita obter com menos termos algo mais próximo do resultado exato ou carregue aspectos importantes da teoria. Outra questão problemática é que no contexto de teoria quântica de campos em espaços toroidais, trabalhado aqui, a teoria de renormalização não foi completamente desenvolvida ainda¹⁰ [10, 22].

2.4 Prescrições de renormalização

No caso sem temperatura é sabido [3, 22, 28] que as prescrições de renormalização definindo alguns parâmetros como sendo medidas experimentais é realmente válida. Vários

¹⁰ O problema da prova está associado à sutileza de que ao trabalhar com diagramas de ordens superiores os somatórios nos momenta quantizados não comutam com as integrais nos parâmetros de Feynman. Este é um problema em aberto no formalismo de Espaços Toroidais.

procedimentos poderiam ser aqui utilizados, qualquer um deles requer uma futura análise via grupo de renormalização que, infelizmente, não cabe no escopo deste trabalho. O estudo da renormalização para temperatura finita e também para espaços toroidais não está fechado na literatura, não tendo sido provada completamente a renormalizabilidade. Na referência [22, sec 10.5] é realizado um estudo, ainda não encerrado, sobre o assunto.

Em geral [9, 10], é realizada uma supressão de infinitos evidenciados pela regularização zeta. Este procedimento apresenta a desvantagem de os parâmetros da ação deixarem de carregar significado físico claro devido à inexistência de condições de renormalização que os definam. Isto se assemelha à situação das prescrições de subtração mínima (MS) e subtração mínima modificada ($\overline{\text{MS}}$).

Outros procedimentos¹¹ são também possíveis, e permitiriam recuperar o significado físico direto dos parâmetros. Citamos aqui a definição de condições de renormalização no vácuo instável (onde se toma o limite $T = 0$ supondo $v = 0$) e a definição de condições de renormalização na fase quebrada olhando o vácuo estável ($T = 0$ mas agora $v \neq 0$). Além de várias outras possibilidades. É importante pontuar que o procedimento de renormalização no vácuo instável, a ser apresentado na sec. 2.4.3, quando tomado para todas as constantes de acoplamento da teoria, se mostra equivalente ao procedimento de supressão de infinitos, recuperando então a interpretação física direta dos parâmetros da ação.

Tanto o procedimento de renormalização por supressão como a renormalização no vácuo instável podem trazer, a 1 loop, o inconveniente de os resultados não serem reais. Este problema foi percebido já em Jackiw [24], onde é argumentado que este é um efeito de 1 loop e que seria corrigido caso fossem levadas em consideração correções superiores. De fato, outros modos de abordar o problema somando mais diagramas de Feynman encontram uma expressão puramente real, como o formalismo 2PI [25, 29] e a aproximação de N grande [30].

2.4.1 Subtração Mínima Modificada ($\overline{\text{MS}}$)

Este procedimento de renormalização está presente na literatura [28] e consiste em simplesmente remover os termos divergentes e a constante de Euler-Mascheroni (γ_E). A aplicação deste procedimento será dependente da dimensionalidade. A divergência do modelo apresentado, proveniente das funções $\Gamma(1 - D/2)$, se apresenta somente para as dimensionalidades pares, de modo que somente estas precisarão de tratamento. Para

¹¹ Existe ainda a possibilidade de fixar as condições de renormalização na fase simétrica definindo uma temperatura de renormalização; o que nada mais seria do que a temperatura na qual as medidas experimentais dos parâmetros são realizadas. Infelizmente não cabe ao escopo deste trabalho uma exploração da validade deste procedimento.

$D = 4 - 2\varepsilon$ a divergência será

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(1 - \frac{D}{2})}{D(4\pi)^{\frac{D}{2}}} b_2^{\frac{D}{2}} &\stackrel{(D=4-2\varepsilon)}{=} \frac{b_2^2}{4(4\pi)^2} \Gamma(-1 + \varepsilon) \left[1 + \frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon \ln \frac{b_2}{4\pi} \right] = \\ &= \frac{b_2^2}{4(4\pi)^2} \left[-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - 1 \right] \left[1 + \frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon \ln \frac{b_2}{4\pi} \right] = \frac{b_2^2}{4(4\pi)^2} \left[-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - \frac{3}{2} + \ln \frac{b_2}{4\pi} \right] \end{aligned} \quad (2.39)$$

Aplicando a prescrição $\overline{\text{MS}}$ os dois primeiros termos são removidos, o potencial efetivo fica como,

$$V_{\text{eff}}(\phi; \beta, L_i, \mu; a_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \phi^n + \frac{b_2^2}{4(4\pi)^2} \left[-\frac{3}{2} + \ln \frac{b_2}{m_E^2} \right] - 2W_{D,0}(\beta, L_i, \mu; b_2). \quad (2.40)$$

A única modificação extra foi a adição de uma escala m_E arbitrária. Ela precisa ser adicionada para tornar o argumento do logaritmo adimensional. Prescrições de renormalização baseadas em medidas de parâmetros levam à adição natural de uma escala. As prescrições de subtração não apresentam esta escala natural, daí a necessidade de colocá-la “a mão”.

2.4.2 Supressão de Infinitos

O procedimento de supressão de divergências pode trazer à recordação o esquema de subtração mínima (MS), onde apenas as divergências são eliminadas, e o esquema de subtração mínima modificada ($\overline{\text{MS}}$), onde tanto as divergências quanto as constantes de Euler-Mascheroni são eliminadas. Aqui ocorre algo maior, uma remoção completa do termo que geraria as divergências, o que pode ser visto também como uma eliminação das contribuições independentes da temperatura e da extensão espacial.

Este é o procedimento mais simples para remoção das divergências e é seguido pela ref.[10]. Toda divergência é gerada pelas funções gama presentes no potencial efetivo. Ao realizar a supressão, ocorre, para o potencial efetivo

$$V_{\text{eff}}(\phi_c; \beta, L_i, \mu; a_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \phi_c^n - 2W_{D,0}(\beta, L_i, \mu; b_2), \quad (2.41)$$

ou seja, os contratermos eliminam completamente o termo de função gama e a única contribuição que permanece é a da função W .

Infelizmente, este tipo de procedimento, tal como na MS e $\overline{\text{MS}}$, não traz consigo uma definição de escala e perde contato com o significado os parâmetros a_n como algo a ser medido experimentalmente.

2.4.3 Condição de Renormalização no vácuo instável

Este procedimento de renormalização consiste em tomar a prescrição

$$a_n^{\text{eff}}(v = 0, \beta \rightarrow \infty, L_i \rightarrow \infty, \mu \rightarrow 0) \stackrel{!}{=} a_n, \quad (2.42)$$

definindo os parâmetros a_n da teoria no regime euclidiano: sem presença de temperatura, compactificações espaciais ou potencial químico. Chamamos este vácuo de instável, pois, em tese, os sistemas a serem estudados estão na fase quebrada quando a temperatura é nula ($\beta \rightarrow \infty$), de modo que $v = 0$ não é o vácuo verdadeiro da teoria.

Atenção que isto não é necessariamente realizado para todos os a_n^{eff} , somente para os a_n presentes originalmente na ação.

Caso a renormalização seja tomada para todos os coeficientes da teoria indiscriminadamente obtém-se:

$$a_n^{\text{eff}}(v = 0; \beta \rightarrow \infty, L_i \rightarrow \infty, \mu \rightarrow 0) = a_n + \delta a_n + \left. \frac{d^n V_1}{d\phi_c^n} \right|_{\substack{\phi_c=0, \beta \rightarrow \infty \\ L_i \rightarrow \infty, \mu \rightarrow 0}} \quad (2.43)$$

$$\therefore \delta a_n = - \left. \frac{d^n V_1}{d\phi_c^n} \right|_{\substack{\phi_c=0, \beta \rightarrow \infty \\ L_i \rightarrow \infty, \mu \rightarrow 0}} \quad (2.44)$$

No potencial efetivo, a contribuição dos contratermos é

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \left. \frac{d^n V_1}{d\phi_c^n} \right|_{\substack{\phi_c=0, \beta \rightarrow \infty \\ L_i \rightarrow \infty, \mu \rightarrow 0}} \frac{\phi_c^n}{n!} = -V_1(\phi_c, \beta \rightarrow \infty, L_i \rightarrow \infty, \mu \rightarrow 0) = -\frac{\Gamma(1 - \frac{D}{2})}{D(4\pi)^{\frac{D}{2}}} b_2^{\frac{D}{2}} \quad (2.45)$$

Deste modo, esta prescrição de renormalização tomada para todos os parâmetros da teoria traz

$$V_{\text{eff}}(\phi_c; \beta, L_i, \mu; a_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \phi_c^n - 2W_{D,0}(\beta, L_i, \mu; b_2), \quad (2.46)$$

que é exatamente o mesmo resultado que se obtém ao realizar a supressão das funções gama. A diferença é que aqui se ganha contato com o significado físico dos parâmetros da teoria. Os parâmetros a_n são as constantes medidas pelo ponto de vista do vácuo $v = 0$ no limite a uma teoria de campo sem nenhuma compactificação espacial, sem temperatura e sem potencial químico.

2.4.4 Condição de Renormalização no vácuo estável

Renormalizar no vácuo estável é uma solução natural à insatisfação gerada pela seção anterior, onde é sugerido realizar o procedimento de renormalização a partir de um ponto de instabilidade do sistema.

As condições para renormalizar no vácuo estável são simplesmente

$$a_n^{\text{eff}}(v \neq 0, \beta \rightarrow \infty, L_i \rightarrow \infty, \mu \rightarrow 0) \stackrel{!}{=} a_n. \quad (2.47)$$

Mais à frente, o trabalho será restringido à análise da fase simétrica. Apesar de rapidamente exibida aqui, a renormalização a partir do vácuo estável da teoria quebrada não será utilizada, pois introduz parâmetros novos (o valor do vácuo v em temperatura nula) e termos a mais no problema. Além de dar preferência à análise da fase quebrada, quando nosso anseio principal é observar a transição de fase a partir do ponto de vista da fase simétrica.

2.5 Quadrado da massa

Em algumas situações¹² o controle sobre a transição de fase é efetuado pelo parâmetro de massa quadrada. Será exposta aqui a expressão exata do parâmetro de massa e então realizadas especificações para casos de interesse.

Utilizando as equações (2.35), (2.38b) e (2.36) monta-se diretamente:

$$a_2^{\text{eff}} = b_2 + \delta b_2 + \frac{b_4 b_2^{\frac{D-2}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(\frac{2-D}{2}\right) + b_4 W_{D,1}(\beta, L, \mu; b_2) - \frac{b_3^2 b_2^{\frac{D-4}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(\frac{4-D}{2}\right) - \frac{b_3^2}{2} W_{D,2}(\beta, L, \mu; b_2), \quad (2.48)$$

e não deve ser esquecido que a função W é definida em (2.32).

Ao realizar a supressão de infinitos (representada por simplicidade por *sup*), ou também adotar as condições de renormalização no vácuo instável para todos os parâmetros da teoria, obtêm-se, diretamente,

$$a_2^{\text{eff}}\Big|_{\text{sup}} = b_2 + b_4 W_{D,1}(\beta, L, \mu; b_2) - \frac{b_3^2}{2} W_{D,2}(\beta, L, \mu; b_2). \quad (2.49)$$

Para a fase simétrica em uma teoria com $a_3 = 0$,

$$a_2^{\text{eff}}\Big|_{\text{sup}} = a_2 + a_4 W_{D,1}(\beta, L, \mu; a_2). \quad (2.50)$$

Para o caso da subtração mínima modificada ($\overline{\text{MS}}$) em dimensionalidade ímpar, não existem contratermos. Já para a dimensão $D = 4 - 2\varepsilon$, se faz necessário analisar as duas funções gamas. Da primeira tira-se que

$$\begin{aligned} \frac{b_4 b_2^{\frac{D-2}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(\frac{2-D}{2}\right) &= \frac{b_4 b_2}{2(4\pi)^2} \left[1 - \varepsilon \ln \frac{b_2}{m_E^2}\right] \Gamma(-1 + \varepsilon) = \\ &= \frac{b_4 b_2}{2(4\pi)^2} \left[1 - \varepsilon \ln \frac{b_2}{m_E^2}\right] \left(-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - 1\right) = \frac{b_4 b_2}{2(4\pi)^2} \left[-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - 1 + \ln \frac{b_2}{m_E}\right] \end{aligned} \quad (2.51)$$

e, da segunda,

$$\begin{aligned} -\frac{b_3^2 b_2^{\frac{D-4}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(\frac{4-D}{2}\right) &= -\frac{b_3^2}{2(4\pi)^2} \left[1 - \varepsilon \ln \frac{b_2}{m_E^2}\right] \Gamma(\varepsilon) = \\ &= -\frac{b_3^2}{2(4\pi)^2} \left[1 - \varepsilon \ln \frac{b_2}{m_E}\right] \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E\right] = -\frac{b_3^2}{2(4\pi)^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E - \ln \frac{b_2}{m_E}\right]. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Assim, ao aplicar a $\overline{\text{MS}}$ para a dimensão $D = 4 - 2\varepsilon$ encontra-se

$$a_2^{\text{eff}}\Big|_{\overline{\text{MS}}} = b_2 + \frac{b_4 b_2}{2(4\pi)^2} \left[-1 + \ln \frac{b_2}{m_E}\right] + \frac{b_3^2}{2(4\pi)^2} \ln \frac{b_2}{m_E} + b_4 W_{4,1}(\beta, L, \mu; b_2) - \frac{b_3^2}{2} W_{4,2}(\beta, L, \mu; b_2) \quad (2.53)$$

¹² Como no estudo da transição de segunda ordem associada ao potencial ϕ^4 .

e, no caso da fase simétrica $\phi_c = 0$ e com $a_3 = 0$,

$$a_2^{\text{eff}} \Big|_{\overline{\text{MS}}} = a_2 + \frac{a_4 a_2}{2(4\pi)^2} \left[-1 + \ln \frac{a_2}{m_E^2} \right] + a_4 W_{4,1}(\beta, L, \mu; a_2). \quad (2.54)$$

2.6 Alternativa : Soma de diagramas *daisy* via recorrência em 1 loop

Nesta seção será explorada uma técnica simples que, pelo ponto de vista do quadrado de massa, é equivalente a duas outras técnicas presentes na literatura: abordagem 2PI com aproximação de Hartree-Fock [31] e também a aproximação de N grande [4]. Todos estes formalismos têm em comum que a correção na massa leva em consideração todos os diagramas *daisy* e super *daisy* (diagramas em forma de margaridas). De modo genérico os diagramas do tipo *daisy* e super *daisy* são representados na figura 2.4.

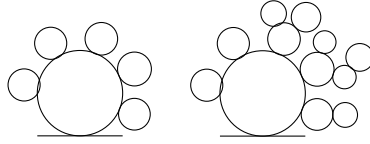


Figura 2.4: Representação de um diagrama do tipo *daisy*, à esquerda, e do tipo super *daisy*, à direita.

Uma opção simples que permite obter todas as contribuições de diagramas *daisy* e super *daisy* é realizar a cálculo a 1 loop supondo que o propagador das correções é o propagador completo da teoria. Assim, o que é modificado é simplesmente:

$$\frac{-1}{q^2 + b_2} \rightarrow \frac{-1}{q^2 + b_2^{\text{eff}}}, \quad (2.55)$$

onde

$$b_2^{\text{eff}} = a_2^{\text{eff}} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{m+2} \frac{\phi_c^m}{m!}. \quad (2.56)$$

Claramente, não é necessário repetir todas os cálculos para este novo caso. Basta aproveitar o que tem sido feito. Por exemplo, o parâmetro a_2^{eff} será, agora,

$$a_2^{\text{eff}} = b_2 + \delta b_2 + \frac{b_4 (b_2^{\text{eff}})^{\frac{D-2}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(\frac{2-D}{2}\right) + b_4 W_{D,1}(\beta, L, \mu; b_2^{\text{eff}}) - \frac{b_3^2 (b_2^{\text{eff}})^{\frac{D-4}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(\frac{4-D}{2}\right) - \frac{b_3^2}{2} W_{D,2}(\beta, L, \mu; b_2^{\text{eff}}). \quad (2.57)$$

e, restringindo-se à fase simétrica $v = 0$ dentro de uma teoria onde $a_3 = 0$,

$$a_2^{\text{eff}} = a_2 + \delta a_2 + \frac{a_4 (a_2^{\text{eff}})^{\frac{D-2}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(\frac{2-D}{2}\right) + a_4 W_{D,1}(\beta, L, \mu; a_2^{\text{eff}}). \quad (2.58)$$

Na presente aproximação, não é possível definir condições de renormalização que definam a_2 e a_4 , elas não eliminam de fato as divergências, que estão agora associadas diretamente a a_2^{eff} . Um dos procedimentos coerentes¹³ é tomar uma renormalização por subtração, que pode ser mínima (MS), mínima modificada ($\overline{\text{MS}}$) ou simplesmente a proposta de suprimir completamente o termo que traz a divergência.

Realizando a renormalização por supressão de divergência,

$$a_2^{\text{eff}} = a_2 + a_4 W_{D,1}(\beta, L, \mu; a_2^{\text{eff}}). \quad (2.59)$$

A correção através de $\overline{\text{MS}}$ também pode ser obtida diretamente, baseado no cálculo de 1 loop, como

$$a_2^{\text{eff}} = a_2 + \frac{a_4 a_2^{\text{eff}}}{2(4\pi)^2} \left[-1 + \ln \frac{a_2^{\text{eff}}}{m_E^2} \right] + a_4 W_{4,1}(\beta, L, \mu; a_2^{\text{eff}}), \quad (2.60)$$

para a situação de $D = 4$.

A presença da recorrência gera uma equação que descreve a correção tomando todos os diagramas *daisy* e super *daisy*. Isto pode ser mostrado graficamente ao notar que a equação é de fato

$$M^2 = m^2 + \Sigma_1(M^2), \quad (2.61)$$

onde Σ_1 é a correção gerada pelo *tadpole*, o diagrama de 1 loop.

$$\Sigma_k(M^2) = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q^2 + M^2)^k}, \quad (2.62)$$

notando aqui que esta contribuição é gerada pelo propagador completo, por isso se escreve a massa M^2 . Esta relação pode claramente ser reescrita como

$$-G^{-1} = -D^{-1} + \Sigma(M^2), \quad (2.63)$$

onde G é o propagador completo e D é o propagador em nível árvore. Invertendo-a,

$$G = D(1 - \Sigma(M^2)D)^{-1} = D + D\Sigma(M^2)D + \dots + D(\Sigma(M^2)D)^k + \dots, \quad (2.64)$$

cuja representação diagramática é exibida na figura 2.5.

$$\text{---} = \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots + \text{---} \bigcirc \dots \bigcirc \text{---}$$

Figura 2.5: Representação diagramática da relação (2.64). As linhas espessas representam o propagador $G(M^2)$ e as linhas finas o propagador $D(m^2)$.

Em uma teoria a 1 loop tem-se $\Sigma(m^2)$ e a única contribuição - obviamente - é o diagrama com 1 loop. No caso presente tem-se $\Sigma(M^2)$. Pode-se então realizar uma recorrência, ou seja,

$$\begin{aligned} \Sigma_1(M^2) &= \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} G = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} [D + D\Sigma_1(M^2)D + \dots] \\ &= \Sigma_1(m^2) + \Sigma_2(m^2)\Sigma_1(M^2) + \Sigma_3(m^2)[\Sigma_1(M^2)]^2 + \Sigma_4(m^2)[\Sigma_1(M^2)]^3 + \dots \end{aligned} \quad (2.65)$$

¹³ Existe também o ponto de vista de primeiro renormalizar e depois realizar a soma de diagramas *daisy*. Assim, ao invés de renormalizar a teoria de interesse, renormaliza-se uma teoria *intermediária*.

que está expressa diagramaticamente na figura 2.6.

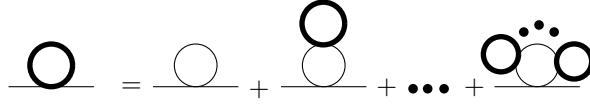


Figura 2.6: Representação diagramática da relação (2.65). As linhas espessas representam o propagador $G(M^2)$ e as linhas finas o propagador $D(m^2)$.

Parando aqui, têm-se todos os diagramas *daisy*. Seguindo em frente na recorrência obtêm-se todos os diagramas *daisy* e super *daisy*. Isto fica claro ao observar as figuras 2.5 e 2.6.

2.6.1 Correção sobre a_4

É ainda possível obter a correção sobre o parâmetro a_4 na teoria recorrente. Neste caso, esta correção não é equivalente ao que se encontra no formalismo $1/N$, tal como foi obtido para a correção sobre a_2 .

A correção renormalizada por supressão será

$$a_4^{\text{eff}} = a_4 - \frac{3}{2}a_4 W_{D,2}(\beta, L, \mu; a_2^{\text{eff}}). \quad (2.66)$$

Diagramaticamente, esta correção representa simplesmente um diagrama de super *daisy* onde uma das bolhas tem 4 pernas externas.

2.7 Resumo de Resultados

Nesta seção serão reexibidos os resultados que foram obtidos ao longo deste capítulo para facilitar o uso futuro.

Partindo de uma ação do tipo (2.10),

$$S_E = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \phi(x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta a_n}{n!} \phi(x)^n \right\},$$

foi realizado um deslocamento no vácuo do sistema para encontrar novos vértices e contra-termos,

$$b_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+n} \frac{\phi_c^m}{m!},$$

$$\delta b_n = \sum_{m=0}^{\infty} \delta a_{m+n} \frac{\phi_c^m}{m!}.$$

Este deslocamento permitiu utilizar o método de Lee-Sciaccaluga para computar a correção de 1 *loop* no potencial efetivo. Assim, obteve-se que o potencial efetivo corrigido

a 1 loop é

$$V_{\text{eff}}(\phi_c; \beta, L_i, \mu; a_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \phi_c^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta a_n}{n!} \phi_c^n + \frac{\Gamma(1 - \frac{D}{2})}{D(4\pi)^{\frac{D}{2}}} b_2^{\frac{D}{2}} - 2W_{D,0}(\beta, L_i, \mu; b_2), \quad (2.67)$$

tendo sido, por simplificação, definida a função W como

$$W_{D,k}(\beta, L_i, \mu; b_2) = \frac{b_2^{\frac{D-2k}{4}}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \sum_{\alpha=0}^{d-1} \sum_{n_\alpha=1}^{\infty} \frac{\cosh(n_0 \beta \mu \delta_{\alpha 0})}{(n_\alpha L_\alpha)^{\frac{D-2k}{2}}} K_{\frac{D-2k}{2}} \left(n_\alpha L_\alpha \sqrt{b_2} \right) \\ + \dots + \frac{2^{d-1} b_2^{\frac{D-2k}{4}}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \sum_{n_0, \dots, n_{d-1}=1}^{\infty} \frac{\cosh(n_0 \beta \mu)}{(\sum_{\alpha=0}^{d-1} n_\alpha^2 L_\alpha^2)^{\frac{D-2k}{4}}} K_{\frac{D-2k}{2}} \left(\sqrt{\sum_{\alpha=0}^{d-1} n_\alpha^2 L_\alpha^2} \sqrt{b_2} \right). \quad (2.68)$$

As correções sobre cada parâmetro da teoria são computadas a partir do conhecimento do potencial efetivo,

$$a_n^{\text{eff}}(v; \beta, L_i, \mu) = \left. \frac{d^n V_{\text{eff}}}{d\phi_c^n} \right|_{\phi_c=v} = b_n(v) + \delta b_n(v) + \left. \frac{d^n V_1}{d\phi_c^n} \right|_{\phi_c=v}, \quad (2.69)$$

onde a última derivada não precisa ser realizada passo a passo, podem-se utilizar os métodos combinatórios expostos anteriormente. As primeiras correções são

$$\frac{dV_1}{d\phi_c} = b_3 \frac{dV_1}{db_2}, \quad (2.70a)$$

$$\frac{d^2 V_1}{d\phi_c^2} = b_4 \frac{dV_1}{db_2} + b_3^2 \frac{d^2 V_1}{db_2^2}, \quad (2.70b)$$

$$\frac{d^3 V_1}{d\phi_c^3} = b_5 \frac{dV_1}{db_2} + 3b_4 b_3 \frac{d^2 V_1}{db_2^2} + b_3^3 \frac{d^3 V_1}{db_2^3}, \quad (2.70c)$$

$$\frac{d^4 V_1}{d\phi_c^4} = b_6 \frac{dV_1}{db_2} + (4b_5 b_3 + 3b_4^2) \frac{d^2 V_1}{db_2^2} + 6b_4 b_3^2 \frac{d^3 V_1}{db_2^3} + b_3^4 \frac{d^4 V_1}{db_2^4}, \quad (2.70d)$$

sendo a derivada com respeito a b_2 bem mapeada,

$$\frac{d^n V_1}{db_2^n} = (-1)^{n-1} \frac{\Gamma(\frac{2n-D}{2})}{2(4\pi)^{\frac{D}{2}}} b_2^{\frac{D-2n}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} W_{D,n}(\beta, L_i, \mu; b_2). \quad (2.71)$$

A correção sob o termo a_2 é

$$a_2^{\text{eff}} = b_2 + \delta b_2 + \frac{b_4 b_2^{\frac{D-2}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(\frac{2-D}{2}\right) + b_4 W_{D,1}(\beta, L, \mu; b_2) \\ - \frac{b_3^2 b_2^{\frac{D-4}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(\frac{4-D}{2}\right) - \frac{b_3^2}{2} W_{D,2}(\beta, L, \mu; b_2). \quad (2.72)$$

Restringindo ao caso $a_3 = 0$ e aplicando as prescrições de renormalização introduzidas encontra-se

$$a_2^{\text{eff}} \Big|_{\text{sup}} = a_2 + a_4 W_{D,1}(\beta, L, \mu; a_2), \quad (2.73)$$

$$a_2^{\text{eff}} \Big|_{\overline{\text{MS}}} = a_2 + \frac{a_4 a_2}{2(4\pi)^2} \left[-1 + \ln \frac{a_2}{m_E^2} \right] + a_4 W_{D,1}(\beta, L, \mu; a_2), \quad (2.74)$$

a primeira relação utiliza da supressão de infinitos e a segunda da subtração mínima modificada.

Outro modelo é também introduzido, que permite somar por todos os diagramas *daisy* e super *daisy*, através deste formalismo a correção do termo a_2 já com uso da supressão de infinitos é

$$a_2^{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}} = a_2 + a_4 W_{D,1} \left(\beta, L, \mu; a_2^{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}} \right). \quad (2.75)$$

CAPÍTULO 3

ϕ^4 COM COMPACTIFICAÇÃO ESPACIAL

Neste capítulo, é realizado o estudo de transições de fase de segunda ordem no modelo ϕ^4 . O estudo será baseado na observação do parâmetro de massa, o qual controla a transição de fase neste caso, e será realizado a partir da fase simétrica.

Serão mostrados resultados associados a três procedimentos distintos. Cada um apresenta seus problemas e suas vantagens. Por exemplo, ao se utilizar o formalismo da soma nos diagramas *daisy* e renormalizar por supressão de infinitos, ganha-se a vantagem de não existirem termos imaginários. Porém, perde-se a possibilidade de adicionar potencial químico no sistema e, além disto, perde-se a concordância com Ginzburg-Landau. Os formalismos de 1 *loop* sem recorrência se mostram consistentes com a aproximação de Ginzburg-Landau, mostrando que ela - aparentemente - é um efeito de 1 *loop*. Ao tomar o formalismo de 1 *loop* e renormalizar através da supressão de infinitos, ganha-se o problema de contribuições imaginárias no quadrado de massa. Isto pode ser contornado fazendo uma restrição ao caso real, ou - como também é feito - adotando uma prescrição diferente. Na prescrição da subtração mínima modificada, não surgem termos imaginários e é possível introduzir o potencial químico; o problema que surge é a necessidade de constante de acoplamento e escalas muito grandes.

De modo geral, é observado que os sistemas com compactificação espacial apresentam um comprimento mínimo de compactificação abaixo do qual não ocorre transição de fase. Além disto, este tamanho mínimo depende da quantidade de dimensões espaciais compactificadas: quanto maior o número delas, maior o comprimento mínimo.

Nas situações em que é permitido o uso do potencial químico, seu efeito principal é a geração de uma separação das curvas de coexistência de fase no “*bulk*” (situação sem compactificações espaciais), através de diminuição da temperatura crítica para aumento do potencial químico, não apresentando nenhuma alteração quanto ao comprimento mínimo do sistema.

3.1 Formulação

A ação euclidiana do sistema é

$$S_E = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) + m^2 \frac{\phi^2(x)}{2} + \lambda \frac{\phi^4(x)}{4!} + \delta m^2 \frac{\phi^2(x)}{2} + \delta \lambda \frac{\phi^4(x)}{4!} \right\}. \quad (3.1)$$

Aplicando o resultado, exposto na seção 2.7, do método do *tadpole* associado ao formalismo de espaços toroidais, podem ser utilizadas as identificações, para o modelo exposto na ação acima, $a_2 = m^2$, $a_4 = \lambda$ e $a_n = 0$ para os demais. Assim, $b_2 = m^2 + \lambda \phi_c^2/2$ e $b_4 = \lambda$. O potencial efetivo não-renormalizado da teoria a 1 *loop*, pela equação (2.67), se escreve

$$V_{\text{eff}} = m^2 \frac{\phi_c^2}{2} + \lambda \frac{\phi_c^4}{4!} + \delta m^2 \frac{\phi_c^2}{2} + \delta \lambda \frac{\phi_c^4}{4!} + \frac{\Gamma(1 - D/2)}{D(4\pi)^{D/2}} (m^2 + \lambda \phi_c^2/2)^{D/2} - 2W_{D,0}(\beta, \mu, L_i; m^2 + \lambda \phi_c^2/2), \quad (3.2)$$

a função W se mantém como em (2.68).

A correção nos parâmetros da teoria é computada, como visto anteriormente, tomando

$$a_n^{\text{eff}}(v; \beta, L_i, \mu) = \left. \frac{d^n V_{\text{eff}}}{d\phi_c^n} \right|_{\phi_c=v}. \quad (3.3)$$

Aplicando isto aos dois parâmetros (m^2 e λ) presentes e utilizando V_{eff} dado pela equação (3.2), obtém-se

$$\begin{aligned} m_{\text{eff}}^2(v; \beta) &= m^2 + \lambda \frac{v^2}{2} + \delta m^2 + \delta \lambda \frac{v^2}{2} + \frac{\lambda(m^2 + \lambda \frac{v^2}{2})^{\frac{D-2}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(\frac{2-D}{2}\right) \\ &\quad + \lambda W_{D,1}\left(\beta, \mu, L_i; m^2 + \lambda \frac{v^2}{2}\right) - \frac{\lambda^2 v^2 (m^2 + \lambda \frac{v^2}{2})^{\frac{D-4}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(\frac{4-D}{2}\right) \\ &\quad - \frac{\lambda^2 v^2}{2} W_{D,2}\left(\beta, \mu, L_i; m^2 + \lambda \frac{v^2}{2}\right), \quad (3.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{eff}} &= \lambda + \delta \lambda - 3\lambda^2 \frac{\Gamma\left(\frac{4-D}{2}\right)}{2(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \left(m^2 + \lambda \frac{v^2}{2}\right)^{\frac{D-4}{2}} + 6\lambda^3 v^2 \frac{\Gamma\left(\frac{6-D}{2}\right)}{2(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \left(m^2 + \lambda \frac{v^2}{2}\right)^{\frac{D-6}{2}} \\ &\quad - \lambda^4 v^4 \frac{\Gamma\left(\frac{8-D}{2}\right)}{2(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \left(m^2 + \lambda \frac{v^2}{2}\right)^{\frac{D-8}{2}} - \frac{3\lambda^2}{2} W_{D,2}\left(\beta, \mu, L_i; m^2 + \lambda \frac{v^2}{2}\right) \\ &\quad + \frac{3\lambda^3 v^2}{2} W_{D,3}\left(\beta, \mu, L_i; m^2 + \lambda \frac{v^2}{2}\right) - \frac{\lambda^4 v^4}{2^3} W_{D,4}\left(\beta, \mu, L_i; m^2 + \lambda \frac{v^2}{2}\right). \quad (3.5) \end{aligned}$$

Esse formalismo, com presença de v , permite investigar a fase quebrada do modelo ϕ^4 . Além disso, o conhecimento do potencial efetivo a 1 *loop* permite obter a evolução do parâmetro de ordem ϕ_c , além de permitir a obtenção de expoentes críticos da teoria. Este trabalho, porém, se restringirá ao estudo da região de criticalidade. Para tal, concentra-se no estudo do parâmetro de massa quadrada, visto que, no modelo ϕ^4 , para descrever

transições de segunda ordem, é o parâmetro de massa que controla a transição de fase. Além disso, pode ser adotada uma restrição à fase simétrica, onde $v = 0$. Isso também significa observar o sistema através do ponto $v = 0$, que é o mínimo verdadeiro na fase simétrica, e se torna um ponto instável na fase quebrada. Na fase simétrica, ainda sem renormalizar, obtém-se, fazendo $v = 0$ em (3.4),

$$m_{\text{eff}}^2 = m^2 + \delta m^2 + \frac{\lambda(m^2)^{\frac{D-2}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(\frac{2-D}{2}\right) + \lambda W_{D,1}(\beta, \mu, L_i; m^2). \quad (3.6)$$

Seguindo o capítulo 2 utiliza-se a prescrição de supressão - vista como equivalente a tomar condições de renormalização no ponto de instabilidade - reobtendo, assim a expressão (2.73),

$$m_{\text{eff}}^2 \Big|_{\text{sup}} = m^2 + \lambda W_{D,1}(\beta, L, \mu; m^2). \quad (3.7)$$

Será adotada também a prescrição de subtração mínima modificada, reobtendo a expressão (2.74),

$$m_{\text{eff}}^2 \Big|_{\overline{\text{MS}}} = m^2 + \frac{\lambda m^2}{2(4\pi)^2} \left[-1 + \ln \frac{m^2}{m_E^2} \right] + \lambda W_{4,1}(\beta, L, \mu; m^2). \quad (3.8)$$

Um procedimento alternativo é utilizar o formalismo 1 *loop* recorrente com a prescrição de supressão, ver seção 2.6, de onde tira-se que

$$m_{\text{eff}}^2 \Big|_{\text{Daisy}} = m^2 + \lambda W_{D,1} \left(\beta, L, \mu; m_{\text{eff}}^2 \Big|_{\text{Daisy}} \right). \quad (3.9)$$

3.2 Região de Criticalidade

Nesta seção será preparada a relação que permite gerar a curva crítica em que ocorre a transição de fase. A transição de fase ocorre quando o sistema se encontra na temperatura crítica, convencionou-se aqui chamar de *curva crítica* a curva de temperatura crítica do sistema, que pode depender das outras variáveis de controle disponíveis: L_i e μ .

Enquanto for possível, a dimensionalidade D do sistema será deixada em aberto. O número de compactificações espaciais $d - 1$ também será mantido em aberto. Para a realização do estudo é conveniente definir parâmetros adimensionais utilizando $|m|$ como escala. Note que refere-se a $|m|$ pois o sinal de m^2 ainda não é conhecido. As novas definições¹ serão:

$$\tau = \frac{1}{|m|\beta}, \quad \chi = \frac{1}{|m|L}, \quad \gamma = \frac{|\mu|}{|m|}, \quad \frac{m_{\text{eff}}^2}{|m^2|} = M_{\text{eff}}^2, \quad (3.10)$$

¹ Não confundir com notações antigas do texto. Na seção 2.2 τ foi utilizado para representar o tempo imaginário e agora representa a temperatura adimensional do sistema.

que levam às reescritas de (3.7), (3.8) e (3.9):

$$M_{\text{eff}}^2 \Big|_{\text{sup}} = \text{sgn}(m^2) + \lambda |m|^{D-4} [\text{sgn}(m^2)]^{\frac{D/2-1}{2}} \mathcal{W}_{D,1}(\tau, \chi_i, \gamma; \text{sgn}(m^2)) \quad (3.11a)$$

$$M_{\text{eff}}^2 \Big|_{\overline{\text{MS}}} = \text{sgn}(m^2) + \frac{\lambda}{2(4\pi)^2} \left[-1 + \ln \frac{m^2}{m_E^2} \right] + \lambda \sqrt{\text{sgn}(m^2)} \mathcal{W}_{4,1}(\tau, \chi_i, \gamma; \text{sgn}(m^2)) \quad (3.11b)$$

$$M_{\text{eff}}^2 \Big|_{\text{Daisy}} = \text{sgn}(m^2) + \lambda |m|^{D-4} [M_{\text{eff}}^2 \Big|_{\text{Daisy}}]^{\frac{D/2-1}{2}} \mathcal{W}_{D,1} \left(\tau, \chi_i, \gamma; M_{\text{eff}}^2 \Big|_{\text{Daisy}} \right) \quad (3.11c)$$

onde a nova função $\mathcal{W}$ é

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{D,k}(\tau, \chi_i, \gamma; S) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \sum_{\alpha=0}^{d-1} \sum_{n_\alpha=1}^{\infty} \frac{\cosh(\delta_{\alpha 0} n_0 \gamma / \tau)}{(n_\alpha / \chi_\alpha)^{\frac{D-2k}{2}}} K_{\frac{D-2k}{2}} \left(\sqrt{S} n_\alpha / \chi_\alpha \right) \\ &+ \cdots + \frac{2^{d-1}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \sum_{n_0, \dots, n_{d-1}=1}^{\infty} \frac{\cosh(n_0 \gamma / \tau)}{(\sum_{\alpha=0}^{d-1} n_\alpha^2 / \chi_\alpha^2)^{\frac{D-2k}{4}}} K_{\frac{D-2k}{2}} \left(\sqrt{S} \sqrt{\sum_{\alpha=0}^{d-1} n_\alpha^2 / \chi_\alpha^2} \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Aqui foi definido por simplicidade $\chi_0 = \tau$, deve ser lembrado que d é o número de compactificações presentes.

Faz-se necessário realizar uma análise de consistência em cada caso para verificar qual o sinal correto a ser adotado para m^2 e se existe algum tipo de restrição sob os parâmetros da teoria. Para facilitar este processo, remove-se por enquanto as compactificações espaciais; assim,

$$M_{\text{eff}}^2 \Big|_{\text{sup}} = \text{sgn}(m^2) + |m|^{D-4} [\text{sgn}(m^2)]^{\frac{D/2-1}{2}} \frac{\lambda}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(n\gamma/\tau)}{(n/\tau)^{\frac{D}{2}-1}} K_{\frac{D}{2}-1} \left(\sqrt{\text{sgn}(m^2)} n / \tau \right) \quad (3.13a)$$

$$M_{\text{eff}}^2 \Big|_{\overline{\text{MS}}} = \text{sgn}(m^2) + \frac{\lambda}{2(4\pi)^2} \left[-1 + \ln \frac{m^2}{m_E^2} \right] + \lambda \frac{\sqrt{\text{sgn}(m^2)}}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(\frac{n\gamma}{\tau})}{(n/\tau)} K_1 \left(\sqrt{\text{sgn}(m^2)} \frac{n}{\tau} \right) \quad (3.13b)$$

$$M_{\text{eff}}^2 \Big|_{\text{Daisy}} = \text{sgn}(m^2) + M_{\text{eff}}^2 \Big|_{\text{Daisy}}^{\frac{D}{2}-1} \frac{\lambda |m|^{D-4}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(n\gamma/\tau)}{(n/\tau)^{\frac{D}{2}-1}} K_{\frac{D}{2}-1} \left(\frac{n}{\tau} M_{\text{eff}}^2 \Big|_{\text{Daisy}} \right) \quad (3.13c)$$

e as compactificações espaciais serão readicionadas às expressões quando forem necessárias. Para isto será sempre referenciada a função (3.12).

As próximas seções se propõem a um estudo caso a caso. Será investigada a consistência de cada modelo proposto acima e quais os resultados que cada modelo retorna. A seção 3.3 mostra os resultados associados ao procedimento de supressão de infinitos: encontram-se neste ponto as mesmas dificuldades, dadas pela presença de termos complexos, observadas pela referência [8] e será buscado resolvê-las com o mesmo pensamento. Infelizmente, os resultados não são satisfatórios, mostrando uma certa inaplicabilidade

deste modelo. Seguindo ainda o ponto de vista da referência [8], é desenvolvido um outro modo de observar o problema, com uso da soma sob os diagramas *daisy* e *super daisy*. Este procedimento é baseado em diversos resultados obtidos na literatura [25, 29, 30] e é exposto na seção 3.5. Outro modo de observar o problema é com uso da subtração mínima modificada, $\overline{MS}$, que é exibida na seção 3.4, apresentando somente o problema de se utilizar uma escala muito grande.

Inicialmente, é investigada a consistência de cada modelo. Feito isso, a região de criticalidade é investigada, buscando informações sobre a temperatura crítica do sistema, seus comprimentos críticos e possíveis relações. Outro estudo, deixado para a seção 3.6, investiga a concordância dos modelos propostos com a aproximação de Ginzburg-Landau.

3.3 Supressão de Infinitos

3.3.1 Consistência

A primeira análise de consistência será com respeito à expressão, (3.13a), obtida realizando supressão direta das gamas,

$$M_{\text{eff}}^2 \Big|_{\text{sup}} = \text{sgn}(m^2) + |m|^{D-4} [\text{sgn}(m^2)]^{\frac{D/2-1}{2}} \frac{\lambda}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(n\gamma/\tau)}{(n/\tau)^{\frac{D}{2}-1}} K_{\frac{D}{2}-1} \left(\sqrt{\text{sgn}(m^2)} n/\tau \right) \quad (3.14)$$

Supondo $m^2 > 0$, (3.14) se reduz a

$$M_{\text{eff}}^2 \Big|_{\text{sup}} = 1 + \frac{\lambda |m|^{D-4}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(n\gamma/\tau)}{(n/\tau)^{\frac{D}{2}-1}} K_{\frac{D}{2}-1} (n/\tau). \quad (3.15)$$

O segundo termo é monotonicamente crescente em τ e sempre positivo. Necessariamente $\lambda > 0$; caso contrário, a teoria em nível árvore não tem como apresentar limite inferior no potencial. Assim, ao assumir $m^2 > 0$, não existe transição de fase. Isto é perfeitamente coerente com o fato de a supressão de funções gamas concordar com a renormalização no ponto de instabilidade. Observando o quadrado de massa a partir do vácuo $\phi = 0$, quando o sistema chega a $\tau = 0$ é natural que $m^2 < 0$ visto que este se encontra na fase quebrada. Portanto, nesta situação

$$M_{\text{eff}}^2 \Big|_{\text{sup}} = -1 + \frac{\lambda |m|^{D-4}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i\tau}{n} \right)^{\frac{D}{2}-1} \cosh \left(n \frac{\gamma}{\tau} \right) K_{\frac{D}{2}-1} \left(i \frac{n}{\tau} \right), \quad (3.16)$$

que é evidentemente complexo. Pode-se aqui assumir a postura exposta em Dolan & Jackiw [8] de que a componente imaginária é efeito de a série estar truncada. É uma consequência natural das prescrições de renormalização utilizadas; de certo modo uma “falha” a 1 *loop*. Somando mais termos, seria possível perceber a aniquilação da compo-

nente imaginária². De fato, este problema não aparece nos formalismos que somam os diagramas super *daisy* - um deles será analisado na seção 3.5 - nem em algumas outras situações, como no procedimento $\overline{\text{MS}}$ da seção 3.4. Seguindo a argumentação da ref. [8], será isolada a contribuição real do quadrado de massa.

A função de Bessel K com argumento imaginário pode ser reescrita com uso das relações 8.407 e 8.405 da ref. [32],

$$K_\nu(iX) = \frac{\pi}{2}(-i)^{\nu+1}H_\nu(X) = \frac{\pi}{2}(-i)^{\nu+1}[J_\nu(X) - iY_\nu(X)], \quad (3.17)$$

assim,

$$M_{\text{eff}}^2 \Big|_{\text{sup}} = -1 + \frac{\lambda|m|^{D-4}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{n}\right)^{\frac{D}{2}-1} \cosh\left(n\frac{\gamma}{\tau}\right) \left[-iJ_{\frac{D}{2}-1}\left(\frac{n}{\tau}\right) - Y_{\frac{D}{2}-1}\left(\frac{n}{\tau}\right)\right]. \quad (3.18)$$

A parte real será

$$\text{Re} \left[M_{\text{eff}}^2 \Big|_{\text{sup}} \right] = -1 - \frac{\lambda|m|^{D-4}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{n}\right)^{\frac{D}{2}-1} \cosh\left(n\frac{\gamma}{\tau}\right) Y_{\frac{D}{2}-1}\left(\frac{n}{\tau}\right). \quad (3.19)$$

A função $Y_\nu(1/z)$ é decrescente em z e negativa, caso $\nu > 0$ e para z não tão pequeno. Caso z seja muito pequeno, a função começa a oscilar. Claramente, o comportamento da função Bessel Y permite a existência de transição de fase ao se analisar a parte real do quadrado de massa efetiva, mas não permite estudar a situação de argumentos pequenos.

Existe mais um detalhe importante a ser analisado no formalismo, anteriormente – ver seção 2.2.2 – quando foi analisada a validade da função W , foi imposta uma restrição ao potencial químico de modo a garantir a convergência. Agora, a presença da Bessel Y gera uma oscilação na origem e não um termo de decaimento; ou seja, nada existe para conter o crescimento do cosseno hiperbólico. Assim, este modelo não é capaz de estudar os efeitos do potencial químico. A expressão a ser utilizada é

$$\text{Re} \left[M_{\text{eff}}^2 \Big|_{\text{sup}} \right] = -1 - \frac{\lambda|m|^{D-4}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{n}\right)^{\frac{D}{2}-1} Y_{\frac{D}{2}-1}\left(\frac{n}{\tau}\right). \quad (3.20)$$

3.3.2 Região de Criticalidade

Inicialmente nesta seção será mantido o sistema físico em situação na qual as dimensões espaciais não apresentam limitações (isto é, no *bulk*) e existe presença de temperatura. A componente real do quadrado de massa é dada pela equação (3.20) acima. Pode assim ser extraída qual a temperatura crítica do sistema ao especificar os parâmetros. Por exemplo, para $\lambda = 0.5$ e $D = 4$ é obtido que $\tau_c = 6.98$ (para truncamento da série em 500 termos).

² Um outro modo é modificar a prescrição de renormalização. Uma possibilidade que satisfaz a questão da realidade mas que não foi ainda validada por uma análise criteriosa é renormalizar na fase simétrica do sistema, escolhendo uma temperatura característica onde são feitas as medidas dos parâmetros da teoria.

Na figura 3.1 é exibido o comportamento do quadrado de massa. As oscilações próximas de $\tau = 0$ não são visíveis nesta escala. Este é o mesmo tipo de comportamento que será encontrado nas outras prescrições adotadas. Os modelos adotados ao longo deste capítulo estão restritos a acompanhar o quadrado de massa a partir da fase simétrica ($v = 0$) de modo que a fig.3.1 representa o quadrado de massa físico somente enquanto maior do que zero. A região $M^2 < 0$ dependeria do conhecimento do vácuo do sistema ($v \neq 0$). Isto, porém, não elimina o significado da curva para $M^2 < 0$ a região pode ser interpretada, como visto na seção 2.4.3, como o valor do quadrado de massa sendo observado a partir do ponto de instabilidade $v = 0$ quando nos encontramos na fase quebrada. Neste contexto $M^2 = -1$ é o valor do quadrado de massa, observado a partir do ponto de instabilidade, quando a temperatura do sistema é nula.

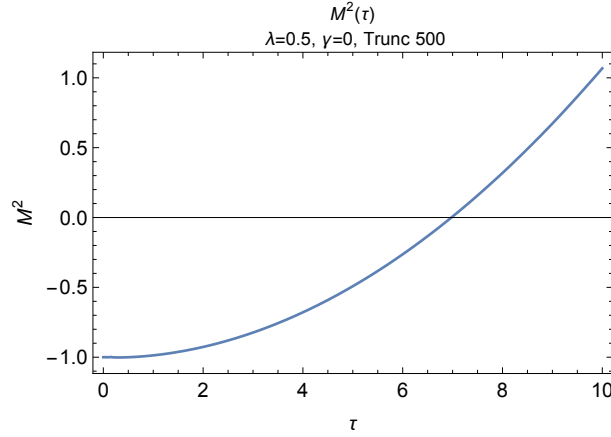


Figura 3.1: Variação do quadrado de massa com a temperatura.

Uma exploração analítica possível aqui é tomar o limite de altas temperaturas. Deve ser lembrado que a função de Bessel do segundo tipo $Y_\nu(1/z)$ deixa de apresentar oscilação para z suficientemente grande. Ou seja, o limite de altas temperaturas é exatamente o limite de maior validade do formalismo aqui apresentado. Tomando o limite de altas temperaturas, obtém-se que

$$\text{Re} \left[M_{\text{eff}}^2 \Big|_{\text{sup}} \right] = -1 + \frac{\lambda |m|^{D-4}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\frac{D}{2}-1}}{\pi} \Gamma \left(\frac{D}{2} - 1 \right) \left\{ \left(\frac{\tau}{n} \right)^{D-2} + \frac{1}{2(D-4)} \left(\frac{\tau}{n} \right)^{D-4} + \mathcal{O} \left(\left(\frac{\tau}{n} \right)^{D-6} \right) \right\}. \quad (3.21)$$

Mantendo somente o termo dominante e tomando a condição de criticalidade ($M_{\text{eff}}^2 = 0$),

$$0 = -1 + \frac{\lambda |m|^{D-4}}{4\pi^{\frac{D}{2}}} \Gamma \left(\frac{D}{2} - 1 \right) \zeta(D-2) \tau_c^{D-2},$$

onde $\zeta(s)$ é a função zeta de Riemann.

A temperatura crítica é então encontrada como uma função da constante de acoplamento e da dimensionalidade,

$$\tau_c = \left[\frac{4\pi^{\frac{D}{2}}}{\lambda|m|^{D-4}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{D}{2} - 1\right) \zeta(D-2)} \right]^{\frac{1}{D-2}}, \quad (3.22)$$

que para o caso especial $D = 4$, lembrando que $\zeta(2) = \pi^2/6$, fornece

$$\tau_c = \sqrt{\frac{4!}{\lambda}}. \quad (3.23)$$

Este resultado informa o comportamento da temperatura crítica no *bulk* em função da constante de acoplamento e permite notar que tomar limite de altas temperaturas é equivalente a tomar o limite de constante de acoplamento fraca.

Na situação com uma compactificação espacial, o quadrado da massa é dado, segundo as equações (3.12), (3.11a) e (3.20), por

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[M_{\text{eff}}^2 \Big|_{\text{sup}} \right] = & -1 - \frac{\lambda|m|^{D-4}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{n} \right)^{\frac{D}{2}-1} Y_{\frac{D}{2}-1} \left(\frac{n}{\tau} \right) - \frac{\lambda|m|^{D-4}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\chi}{n} \right)^{\frac{D}{2}-1} Y_{\frac{D}{2}-1} \left(\frac{n}{\chi} \right) \\ & - \frac{\lambda|m|^{D-4}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \pi \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n_1^2}{\tau^2} + \frac{n_2^2}{\chi^2}} \right)^{1-\frac{D}{2}} Y_{\frac{D}{2}-1} \left(\sqrt{\frac{n_1^2}{\tau^2} + \frac{n_2^2}{\chi^2}} \right). \quad (3.24) \end{aligned}$$

Surge neste ponto a dificuldade de que o modelo só é aplicável para valores grandes o suficiente de temperatura τ e, analogamente, só será válido para valores grandes o suficiente de χ , devido às grandes oscilações próximas à origem. Assim, a curva crítica obtida neste formalismo só será válida na região onde tanto τ quanto χ são suficientemente grandes para não se sentir as oscilações. É exatamente este alto comprometimento que motiva a busca por outros formalismos nas seções 3.4 e 3.5 abaixo. Mais à frente, no capítulo 4, é adotado um outro formalismo com $m^2 < 0$. Lá existe a vantagem da presença de um campo magnético externo uniforme, o qual garante a realidade dos argumentos da funções de Bessel modificadas do segundo tipo, de modo que não surgem os termos imaginários, muito menos as oscilações.

Uma situação que abre a possibilidade de aplicar o formalismo atual é a de acoplamentos fracos, como na figura 3.2. Como visto na equação (3.22), a temperatura crítica no modelo sem compactificação é proporcional a $\lambda^{-1/2}$. Assim, assumindo uma constante de acoplamento pequena, garantem-se altas temperaturas e um afastamento das oscilações. A figura 3.2 mostra que, tomando uma constante de acoplamento suficientemente fraca, a temperatura e o inverso do comprimento serão suficientemente grandes para sublimar as oscilações.

A abordagem de acoplamentos fracos permitiria seguir em frente com o tratamento atual. De fato, tomando a aproximação para acoplamentos fracos (τ e χ grandes), obtém-

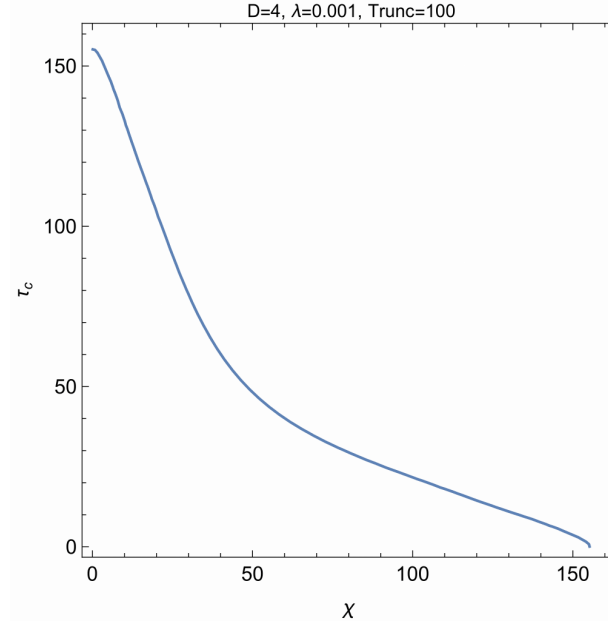


Figura 3.2: Temperatura crítica τ_c como função do inverso da espessura χ , a curva delimita a transição de fase. Acima da curva o sistema se encontra na fase simétrica e abaixo dela na fase quebrada. É considerada a situação de acoplamento fraco $\lambda = 0.001$, de modo a eliminar oscilações do modelo.

se diretamente que:

$$\text{Re} \left[M_{\text{eff}}^2 \Big|_{\text{sup}} \right] = -1 + \frac{\lambda |m|^{D-4}}{4\pi^{\frac{D}{2}}} \Gamma \left(\frac{D}{2} - 1 \right) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{n} \right)^{D-2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\chi}{n} \right)^{D-2} + 2 \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \left(\frac{n_1^2}{\tau^2} + \frac{n_2^2}{\chi^2} \right)^{1-\frac{D}{2}} \right\}, \quad (3.25)$$

que é exatamente a mesma expressão encontrada ao se utilizar o modelo com soma de diagramas *daisy* e super *daisy* ao tomar o limite para a criticalidade $M^2 \approx 0$, como será visto mais à frente na seção 3.5. A diferença é que no modelo com soma de diagramas *daisy* não existe a restrição para constantes de acoplamento pequenas. As análises possíveis serão então deixadas para serem exploradas na seção 3.5 com uso do novo ponto de vista.

3.4 Subtração Mínima Modificada ($\overline{MS}$)

Nesta seção, é estudado o caso em que os infinitos são removidos com uso da prescrição de subtração mínima modificada, como visto na seção 2.4.1.

3.4.1 Consistência

No caso da subtração mínima modificada, como visto na equação (3.13b), ocorre a presença de um termo a mais. Este termo a mais pode auxiliar na presença de uma

transição de fase, mesmo no caso $m^2 > 0$. Existem aqui duas possibilidades: a primeira é considerar que a escala arbitrária introduzida ao realizar a $\overline{\text{MS}}$ é igual à escala $|m|$; a segunda é considerar que o sistema depende de duas escalas arbitrárias e distintas. A primeira opção parece mais razoável, aplicando-a considerando $m^2 > 0$ a equação (3.13b) se reduz a

$$M_{\text{eff}}^2 \Big|_{\overline{\text{MS}}} = 1 - \frac{\lambda}{2(4\pi)^2} + \frac{\lambda}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(n\gamma/\tau)}{n/\tau} K_1(n/\tau) \quad (3.26)$$

Novamente, a soma é uma função positiva e crescente em τ . Mas, desta vez, é possível ocorrer uma transição de fase caso $\lambda > 2(4\pi)^2$, não sendo necessário tomar $m^2 < 0$. Esta é uma escolha bem grande³ para constante de acoplamento.

A presença do valor grande para a constante de acoplamento leva a valores muito pequenos para as variáveis termodinâmicas na transição de fase (deve ser lembrado que isto é associado à escala do sistema). Surge, porém, um aspecto positivo: os somatórios convergem muito rapidamente, bastando truncar em 10 termos.

3.4.2 Região de criticalidade

Assumindo um sistema com temperatura e uma compactificação espacial tem-se,

$$M_{\text{eff}}^2 \Big|_{\overline{\text{MS}}} = 1 - \frac{\lambda}{2(4\pi)^2} + \frac{\lambda}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(n\gamma/\tau)}{n/\tau} K_1(n/\tau) + \frac{\lambda}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n/\chi} K_1(n/\chi) \\ + \frac{2\lambda}{(2\pi)^2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{\cosh(n_1\gamma/\tau)}{\sqrt{\frac{n_1^2}{\tau^2} + \frac{n_2^2}{\chi^2}}} K_1 \left(\sqrt{\frac{n_1^2}{\tau^2} + \frac{n_2^2}{\chi^2}} \right), \quad (3.27)$$

onde foi utilizada a relação (3.12). A presença de uma única compactificação espacial permite identificar o sistema físico como filme cuja espessura é o tamanho característico $L = 1/\chi$.

Neste modelo, as constantes de acoplamento λ precisam ser muito grandes para permitir observar a transição de fase. Além disto, a temperatura adimensional é observada como muito pequena; o que deve ser associado a uma escolha implícita de escala $|m|$ grande, já que a temperatura verdadeira é $|m|\tau$ (em unidades de energia).

Fixando uma escolha para a constante de acoplamento, $\lambda = 10^4$, é computada a curva da figura 3.3a. A primeira informação que se obtém é que o sistema, coerentemente, não apresenta mais de uma transição de fase. Na mesma fig. 3.3a, é evidenciado o efeito do potencial químico na curva da temperatura crítica como função do inverso de comprimento. Evidentemente, ele gera uma separação das curvas no *bulk* ($\chi = 0$), apesar de não modificar o comprimento mínimo da teoria. Este comportamento já seria esperado da função (3.27), visto que o potencial químico é acoplado somente à temperatura do sistema.

³ O quão grande λ precisa ser depende da relação entre as escalas m e m_E . O apresentado é para a situação $m = m_E$.

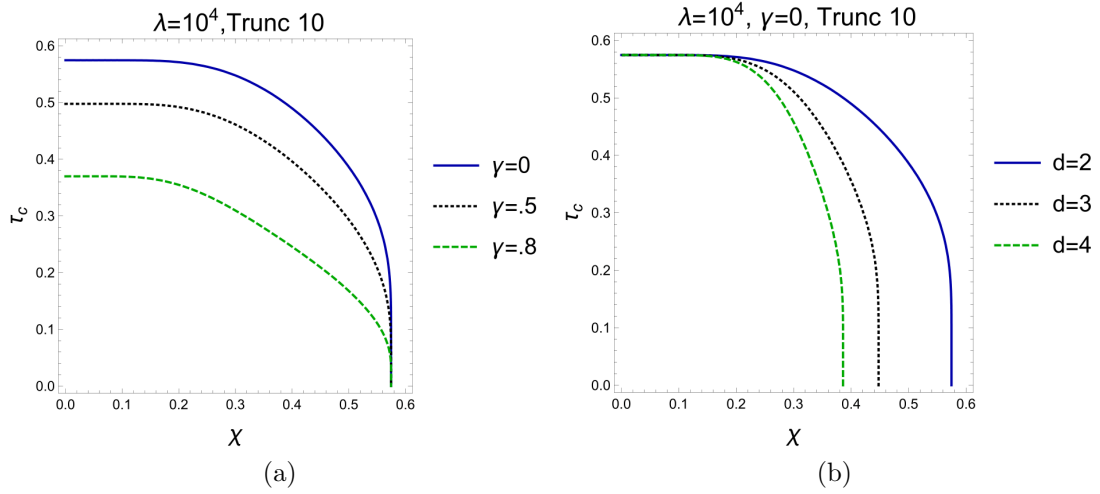


Figura 3.3: Curvas críticas, no plano $\chi \times \tau_c$, onde ocorre a transição de fase. À esquerda é variado o potencial químico para o caso de um filme ($d = 2$). À direita o potencial químico é mantido nulo e variado o número de compactificações: $d = 2$, filme; $d = 3$, fio; $d = 4$, grão.

Uma outra investigação interessante é modificar o tipo de sistema. Utilizando a relação (3.12) é possível generalizar a função (3.27) para as situações com um número maior de compactificações. Será tomada a situação de compactificações simétricas, ou seja: $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 \equiv \chi$. Seguindo o processo de identificação com um sistema físico, enquanto para uma compactificação o sistema é um filme de espessura $1/\chi$, para duas compactificações é um fio cuja área da seção reta é $1/\chi^2$ e para três compactificações é um grão de volume $1/\chi^3$. Na figura 3.3b, é exibido o comportamento da curva crítica de transição de fase para cada uma destas diferentes situações. Observa-se um esperado comportamento de que o número de compactificações presentes não interfere quando se toma o limite $\chi \rightarrow 0$: afinal, nesta situação, o sistema se aproxima do *bulk*, em que nenhuma direção espacial é limitada. É percebido claramente que o menor valor acessível para χ diminui com o aumento do número de compactificações. Isto implica que o tamanho mínimo acessível ao sistema aumenta com o número de compactificações. Deve ser lembrado que a ideia de “mínimo acessível” é associada ao pensamento de que o sistema sofrerá em algum momento uma transição de fase; caso o tamanho característico do sistema esteja abaixo do “mínimo acessível”, não ocorre transição.

3.5 Contribuições tipo *Daisy*

Nesta seção, um outro formalismo é explorado, no qual as contribuições dos diagramas *daisy* e *super daisy* são computadas. O tratamento aqui é baseado na seção 2.6.

3.5.1 Consistência

Neste último caso, a correção é segundo a equação (3.13c). Como o segundo termo é positivo sempre, a existência de uma transição de fase exige tomar $m^2 < 0$. Assim,

$$M_{\text{eff}}^2 \Big|_{\text{Daisy}} = -1 + M_{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}}^{\frac{D}{2}-1} \frac{\lambda|m|^{D-4}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(n\gamma/\tau)}{(n/\tau)^{\frac{D}{2}-1}} K_{\frac{D}{2}-1} \left(\frac{n}{\tau} M_{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}} \right).$$

Nota-se que este modelo não permite a introdução do potencial químico. Para garantir a convergência do somatório é necessário que $|\gamma| < M_{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}}$, mas aqui esta massa é dependente dos parâmetros! E, na criticalidade, é sabido que $M_{\text{eff}}^2 \Big|_{\text{Daisy}} = 0$. Deste modo, a única possibilidade matematicamente aceitável será $\gamma = 0$, resultando em

$$M_{\text{eff}}^2 \Big|_{\text{Daisy}} = -1 + M_{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}}^{\frac{D}{2}-1} \frac{\lambda|m|^{D-4}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n/\tau)^{\frac{D}{2}-1}} K_{\frac{D}{2}-1} \left(\frac{n}{\tau} M_{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}} \right). \quad (3.28)$$

É possível proceder utilizando diretamente a relação (3.28), tendo cuidado para escolher numericamente $M_{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}}$ suficientemente próximo de zero. Outra abordagem, mais direta, é tomar o limite assintótico da função de Bessel do segundo tipo modificada quando $M_{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}} \approx 0$, mantendo somente o primeiro termo dominante, ou seja,

$$K_{\frac{D}{2}-1} \left(\frac{n}{\tau} M_{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}} \right) = \Gamma \left(\frac{D}{2} - 1 \right) 2^{\frac{D}{2}-2} \left(\frac{n}{\tau} M_{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}} \right)^{1-\frac{D}{2}} + \Gamma \left(\frac{D}{2} - 1 \right) 2^{\frac{D}{2}-4} \left(\frac{n}{\tau} M_{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}} \right)^{3-\frac{D}{2}} + \mathcal{O}(M_{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}}^{5-\frac{D}{2}}). \quad (3.29)$$

Utilizando esta aproximação assintótica, que restringe o estudo exatamente à criticalidade, é possível dizer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A\tau}{n} \right)^{\frac{D}{2}-1} K_{\frac{D}{2}-1} \left(\frac{n}{\tau} A \right) \stackrel{A \approx 0}{\approx} 2^{\frac{D}{2}-2} \Gamma \left(\frac{D}{2} - 1 \right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{n} \right)^{D-2}. \quad (3.30)$$

Esta simplificação permitirá a reescrita da relação de criticalidade no caso de somente uma compactificação como

$$0 = -1 + \frac{\lambda|m|^{D-4}}{4(\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma \left(\frac{D}{2} - 1 \right) \tau_c^{D-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{D-2}}, \quad (3.31)$$

para o caso onde existe presença somente da temperatura.

3.5.2 Temperatura Crítica no *bulk*

Considerando o sistema sem presença de limitações espaciais, no *bulk*, sua relação de criticalidade é simplesmente o limite assintótico (3.30) aplicado à relação (3.28),

$$0 = -1 + \frac{\lambda|m|^{D-4}}{4(\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma \left(\frac{D}{2} - 1 \right) \tau_c^{D-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{D-2}}. \quad (3.32)$$

O somatório restante é simplesmente a função zeta de Riemann $\zeta(D - 2)$. Pode-se então obter a temperatura crítica do sistema diretamente,

$$\tau_c = \left[\frac{\lambda |m|^{D-4} \Gamma\left(\frac{D}{2} - 1\right) \zeta(D - 2)}{4\pi^{D/2}} \right]^{\frac{-1}{D-2}}. \quad (3.33)$$

É importante notar que este é o mesmo resultado obtido anteriormente, através de outro procedimento, ver equação (3.22). Em especial, para $D = 4$,

$$\tau_c = \sqrt{\frac{4!}{\lambda}}. \quad (3.34)$$

Esta expressão, bem simples, já havia sido encontrada na literatura convencional [8]. Tradicionalmente, o tratamento para introdução de temperatura a partir do formalismo de teoria de campos em espaços toroidais não é utilizado. Ao adicionar temperatura com uso do procedimento de Matsubara do tempo imaginário, é comum restringir-se somente a altas temperaturas. Tomar o limite de altas temperaturas é outro modo de resolver as integrais que se apresentam e que, neste trabalho, foram resolvidas com o formalismo de espaços toroidais. O resultado (3.34) mostra o motivo pelo qual o limite de altas temperaturas foi suficiente para obter bons resultados. Ao se tomar uma expansão perturbativa, é natural buscar λ pequeno, o que acarretará uma temperatura crítica grande. Ou seja, a transição de fase do sistema ocorre exatamente no limite de altas temperaturas. O procedimento exibido aqui não se vale desta *coincidência*, sendo capaz de analisar qualquer faixa de temperaturas. Reforça-se assim a utilidade deste modelo, que permite observar de modo mais completo o que acontece com o sistema, ao invés de se confinar a uma pequena região de validade.

3.5.3 Tamanho mínimo do sistema

Serão considerados agora sistemas físicos espacialmente limitados. Por simplificação, será assumido que as compactificações são simétricas, ou seja, todas as direções espaciais compactificadas terão o mesmo tamanho característico.

Como o sistema em estudo é geralmente um espaço convencional com $D = 4$, existem três direções espaciais disponíveis para serem confinadas. Para cada número de compactificações, ou simplesmente condições de borda⁴, o sistema físico se encontra com uma estrutura diferente.

A situação de uma compactificação espacial pode representar um filme com espessura característica. Para duas compactificações espaciais, o sistema é um fio de seção reta quadrada e com lado bem definido. Para três compactificações, o sistema se reduz a um

⁴ Relembre que as compactificações são diretamente associadas a definir condições de contorno, como exposto na seção 2.2

grão em formato cúbico. O comprimento característico será sempre $L = 1/\chi$. Assim, o filme tem espessura L , o fio tem área da seção reta L^2 e o grão tem volume L^3 .

A relação de massa para o sistema com somente uma compactificação espacial pode ser reobtida com uso de (2.32),

$$M_{\text{eff}}^2 \Big|_{\text{Daisy}} = -1 + M_{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}} \frac{\lambda |m|^{D-4}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{n} \right)^{\frac{D}{2}-1} K_{\frac{D}{2}-1} \left(\frac{n}{\tau} M_{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}} \right) \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\chi}{n} \right)^{\frac{D}{2}-1} K_{\frac{D}{2}-1} \left(\frac{n}{\chi} M_{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}} \right) + 2 \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n_1^2}{\tau^2} + \frac{n_2^2}{\chi^2}}^{1-\frac{D}{2}} K_{\frac{D}{2}-1} \left(M_{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}} \sqrt{\frac{n_1^2}{\tau^2} + \frac{n_2^2}{\chi^2}} \right) \right\}. \quad (3.35)$$

É importante notar que todos os somatórios apresentam funções positivo-definidas e monotonicamente crescentes com τ e χ . Pode-se então fazer uma análise pensando em uma função genérica monotonicamente crescente em seus parâmetros $f(\tau, \chi)$. Na criticalidade encontra-se o vínculo

$$0 = -1 + f(\tau_c, \chi). \quad (3.36)$$

A temperatura crítica no *bulk* é obtida fazendo $\chi = 0$. Ao aumentar o valor de χ , a função f naturalmente cresce – por ser monotonicamente crescente – e, para a equação de vínculo se manter, será necessária uma diminuição de τ_c . Este processo revela que o maior valor possível para τ_c ocorre em $\chi = 0$ e que o maior valor possível para χ ocorre em $\tau_c = 0$. Um valor máximo para χ significa um valor mínimo para $L = 1/\chi$. Deste modo, o modelo prevê naturalmente a presença de um tamanho mínimo no sistema e também que este tamanho mínimo é encontrado tomando $\tau_c = 0$.

3.5.3.1 Uma compactificação espacial (filme)

No caso de um filme com espessura $L = 1/\chi$ a relação de criticalidade, exibida na seção anterior, é dada por

$$M_{\text{eff}}^2 \Big|_{\text{Daisy}} = -1 + M_{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}} \frac{\lambda |m|^{D-4}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{n} \right)^{\frac{D}{2}-1} K_{\frac{D}{2}-1} \left(\frac{n}{\tau} M_{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}} \right) \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\chi}{n} \right)^{\frac{D}{2}-1} K_{\frac{D}{2}-1} \left(\frac{n}{\chi} M_{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}} \right) + 2 \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n_1^2}{\tau^2} + \frac{n_2^2}{\chi^2}}^{1-\frac{D}{2}} K_{\frac{D}{2}-1} \left(M_{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}} \sqrt{\frac{n_1^2}{\tau^2} + \frac{n_2^2}{\chi^2}} \right) \right\}.$$

Restringindo para o estudo na espessura mínima do filme $L_{\text{mín}}$, ou seja, tomando o limite $\tau_c = 0$, a expressão se reduz a

$$M_{\text{eff}}^2 \Big|_{\text{Daisy}} = -1 + M_{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}} \frac{\lambda |m|^{D-4}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n L_{\text{mín}}} \right)^{\frac{D}{2}-1} K_{\frac{D}{2}-1} \left(n L_{\text{mín}} M_{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}} \right).$$

Esta relação é idêntica à (3.28) encontrada anteriormente, bastando realizar a identificação $\tau \rightarrow 1/L_{\min}$. Pode-se então aproveitar diretamente do resultado (3.34) para obter,

$$L_{\min} = \left[\frac{\lambda |m|^{D-4} \Gamma\left(\frac{D}{2} - 1\right) \zeta(D-2)}{4\pi^{D/2}} \right]^{\frac{1}{D-2}} \stackrel{D=4}{=} \sqrt{\frac{\lambda}{4!}}. \quad (3.37)$$

Este resultado revela que a espessura mínima do filme é diretamente associada, em $D = 4$, com a constante de acoplamento do sistema. Ou seja, quanto mais fracamente acoplado o sistema, menor a espessura possível. Um sistema fortemente acoplado não permite ser muito compactificado e apresenta uma espessura mínima maior.

3.5.3.2 Duas compactificações espaciais (fio)

Ao realizar duas compactificações espaciais simétricas, o sistema se torna equivalente a um fio de seção reta quadrada com área L^2 . Como visto anteriormente, para obter o comprimento mínimo será necessário tomar $\tau_c = 0$. Então,

$$M_{\text{eff}}^2 \Big|_{\text{Daisy}} = -1 + M_{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}}^{\frac{D-1}{2}} \frac{\lambda |m|^{D-4}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \left\{ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\chi}{n}\right)^{\frac{D}{2}-1} K_{\frac{D}{2}-1} \left(\frac{n}{\chi} M_{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}}\right) \right. \\ \left. + 2 \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n_1^2}{\chi^2} + \frac{n_2^2}{\chi^2}}^{1-\frac{D}{2}} K_{\frac{D}{2}-1} \left(M_{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}} \sqrt{\frac{n_1^2}{\chi^2} + \frac{n_2^2}{\chi^2}} \right) \right\}.$$

Tomando o limite assintótico para a criticalidade,

$$0 = -1 + \frac{\lambda |m|^{D-4}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\chi}{n}\right)^{D-2} \Gamma\left(\frac{D}{2} - 1\right) 2^{\frac{D}{2}-1} \right. \\ \left. + \chi^{D-2} \Gamma\left(\frac{D}{2} - 1\right) 2^{\frac{D}{2}-1} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \frac{1}{(n_1^2 + n_2^2)^{\frac{D}{2}-1}} \right\}, \quad (3.38)$$

o que mostra a necessidade de computar a expressão dependente de D ,

$$\sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \frac{1}{(n_1^2 + n_2^2)^{\frac{D}{2}-1}} = Z_{\frac{D}{2}-1}^{(2)}, \quad (3.39)$$

cujos cálculos é desenvolvido no apêndice B.1, obtém-se que

$$Z_{\frac{D}{2}-1}^{(2)} = -\frac{1}{2} \zeta(D-2) + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{D-3}{2})}{2\Gamma(\frac{D}{2}-1)} \zeta(D-3) + \frac{2\pi^{\frac{D}{2}-1}}{\Gamma(\frac{D}{2}-1)} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}(2\pi n_1 n_2). \quad (3.40)$$

O tamanho mínimo será então, organizando as expressões, dado por

$$L_{\min} = \left\{ \frac{\lambda |m|^{D-4}}{(2\pi)^{D/2}} \left[2^{\frac{D}{2}-1} \Gamma\left(\frac{D}{2} - 1\right) \zeta(D-2) + 2 Z_{\frac{D}{2}-1}^{(2)} \right] \right\}^{\frac{1}{D-2}}. \quad (3.41)$$

A divergência presente em $Z_{\frac{D}{2}-1}^{(2)}$ não é física e oculta uma informação. Isto sugere uma remoção da divergência. Por consistência, será adotado o mesmo modo de tratar divergências que trouxe este resultado: será realizada uma supressão de infinitos. Para facilitar a notação, será utilizada a notação $\tilde{Z}$, representando que os infinitos foram suprimidos. Ocorre então uma passagem,

$$Z_{\frac{D}{2}-1}^{(2)} \rightarrow \tilde{Z}_{\frac{D}{2}-1}^{(2)}. \quad (3.42)$$

Aplicando-a, obtém-se que

$$L_{\min} = \left\{ \frac{\lambda |m|^{D-4}}{(2\pi)^{D/2}} \left[2^{\frac{D}{2}-1} \Gamma\left(\frac{D}{2} - 1\right) \zeta(D-2) + 2\tilde{Z}_{\frac{D}{2}-1}^{(2)} \right] \right\}^{\frac{1}{D-2}}. \quad (3.43)$$

No caso especial de $D = 4$, pode ser utilizado $\tilde{Z}_1^{(2)}$ da equação (B.23), resultando

$$L_{\min} = \sqrt{\frac{\lambda}{4!} \left[2 - 0,816584 \times \frac{12}{\pi^2} \right]} = 1,00357 \sqrt{\frac{\lambda}{4!}} \quad (3.44)$$

Isto mostra o mesmo comportamento que o caso de uma compactificação espacial, agora com uma constante multiplicativa extra. Este resultado evidencia que o tamanho mínimo até onde o sistema ainda apresenta transição de fase aumenta com o número de compactificações (aqui simétricas). O comprimento mínimo no caso de um filme $L_{\min}^{(1)}$ é menor do que no caso de um fio $L_{\min}^{(2)}$,

$$L_{\min}^{(2)} = 1,00357 L_{\min}^{(1)} > L_{\min}^{(1)}, \quad (3.45)$$

deixando claro que o aumento do número de compactificações espaciais pode eliminar a possibilidade de uma transição de fase.

3.5.3.3 Três compactificações espaciais (grão)

Ao realizar três compactificações espaciais simétricas, o sistema se torna um cubo de volume L^3 . Pode-se investigar qual o comprimento mínimo $L_{\min}$ acessível a este grão cúbico utilizando os mesmos procedimentos utilizados para filme e fio. Primeiro, parte-se da relação de criticalidade com temperatura crítica nula e três compactificações simétricas; basta observar a equação (2.32) para montá-la:

$$\begin{aligned} M_{\text{eff}}^2 \Big|_{\text{Daisy}} = & -1 + M_{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}}^{\frac{D}{2}-1} \frac{\lambda |m|^{D-4}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \left\{ 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\chi}{n} \right)^{\frac{D}{2}-1} K_{\frac{D}{2}-1} \left(\frac{n}{\chi} M_{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}} \right) \right. \\ & + 6 \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n_1^2}{\chi^2} + \frac{n_2^2}{\chi^2}}^{1-\frac{D}{2}} K_{\frac{D}{2}-1} \left(M_{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}} \sqrt{\frac{n_1^2}{\chi^2} + \frac{n_2^2}{\chi^2}} \right) \\ & \left. + 4 \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n_1^2}{\chi^2} + \frac{n_2^2}{\chi^2} + \frac{n_3^2}{\chi^2}}^{1-\frac{D}{2}} K_{\frac{D}{2}-1} \left(M_{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}} \sqrt{\frac{n_1^2}{\chi^2} + \frac{n_2^2}{\chi^2} + \frac{n_3^2}{\chi^2}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Tomando a criticalidade com uso da expansão assintótica,

$$0 = -1 + \frac{\lambda|m|^{D-4}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \left\{ 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\chi}{n} \right)^{D-2} \Gamma\left(\frac{D}{2} - 1\right) 2^{\frac{D}{2}-2} + 6\chi^{D-2} Z_{\frac{D}{2}-1}^{(2)} + 4\chi^{D-2} Z_{\frac{D}{2}-1}^{(3)} \right\}. \quad (3.46)$$

Aproveitando a definição (3.39) de $Z_{\frac{D}{2}-1}^{(2)}$ e definindo o análogo $Z_{\frac{D}{2}-1}^{(3)}$ como

$$\sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} \frac{1}{(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{\frac{D}{2}-1}} = Z_{\frac{D}{2}-1}^{(3)}. \quad (3.47)$$

Novamente, existe a presença de divergências. Elas são tratadas através da supressão de infinitos, como mostrado no apêndice B.1, isto é representado pela mudança de notação para $\tilde{Z}$. O comprimento mínimo é obtido por mera reorganização,

$$L_{\min} = \left\{ \frac{\lambda|m|^{D-4}}{(2\pi)^{D/2}} \left[3 \times 2^{\frac{D}{2}-2} \Gamma\left(\frac{D}{2} - 1\right) \zeta(D-2) + 6\tilde{Z}_{\frac{D}{2}-1}^{(2)} + 4\tilde{Z}_{\frac{D}{2}-1}^{(3)} \right] \right\}^{\frac{1}{D-2}}. \quad (3.48)$$

Para o caso $D = 4$, podem ser utilizadas as soluções numéricas (B.23) e (B.25), de modo que

$$\begin{aligned} L_{\min} &= \sqrt{\frac{\lambda}{4!} \left[3 + \frac{36\tilde{Z}_1^{(2)} + 24\tilde{Z}_1^{(3)}}{\pi^2} \right]} = \sqrt{\frac{\lambda}{4!} \left[3 - \frac{36 \times 0,816584}{\pi^2} + \frac{24 \times 0,411489}{\pi^2} \right]} \\ &= 1,01098 \sqrt{\frac{\lambda}{4!}}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

o que pode ser reescrito como

$$L_{\min}^{(3)} = 1,01098 L_{\min}^{(1)} > L_{\min}^{(2)} > L_{\min}^{(1)}. \quad (3.50)$$

3.5.3.4 Resultados

Os resultados anteriores mostraram que o comprimento mínimo para o qual ainda ocorre transição de fase no sistema compactificado aumenta caso seja aumentado o número de compactificações simétricas efetuadas. Manteve-se a forma da dependência com a constante de acoplamento em todos os casos. A informação da dependência com a dimensionalidade foi perdida, pois surgiu a necessidade de fixar $D = 4$. Obteve-se

$$\begin{aligned} L_{\min}^{(1)} &= \sqrt{\lambda/4!} \\ L_{\min}^{(2)} &= 1,00357 L_{\min}^{(1)} \\ L_{\min}^{(3)} &= 1,01098 L_{\min}^{(1)} \end{aligned}$$

É possível investigar outras dimensionalidades. Por exemplo, para $D = 5$ encontra-se $L_{\min}^{(2)} = 1,69029 L_{\min}^{(1)}$ e $L_{\min}^{(3)} = 2,01811 L_{\min}^{(1)}$, mostrando neste caso um aumento mais expressivo. Em $D = 5$, o comprimento mínimo para somente uma compactificação é $L_{\min}^{(1)} = \left[\frac{\lambda|m|\zeta(3)}{8\pi^2} \right]^{\frac{1}{3}}$.

A existência de um tamanho mínimo para que ocorra transição de fase pode ser fisicamente interpretado como a impossibilidade, para materiais de tamanho muito restritos, de definir uma distância de correlação infinita, impedindo a presença da transição de fase. O tamanho mínimo é um resultado já esperado experimentalmente [33–42]. É encontrado tradicionalmente que a curva de temperatura crítica, observada no plano $L \times \tau$, tem um comprimento mínimo no limite de temperatura crítica nula e apresenta uma temperatura crítica máxima no *bulk*. Ao longo deste trabalho, foi utilizado o plano $1/L \times \tau$, que evidencia a simetria do problema: existe um valor máximo de temperatura crítica quando o inverso de comprimento é nulo e um valor máximo de inverso de comprimento quando a temperatura crítica é nula. A situação de grãos é estudada nas referências [40–42], para transições ferroelétricas de partículas ultrafinas de titanato de chumbo (PbTiO_3), enquanto que o caso de filmes finos é abordado por [35–39], para transições supercondutoras em filmes de nióbio (Nb), transições magnéticas em filmes de disprósio (Dy), transições ferroelétricas em filmes de titanato de chumbo (PbTiO_3) e filmes policristalinos de titanato de bário (BaTiO_3). Por questão de visualização, é reproduzido um gráfico para filmes, figura 3.4a, extraído da referência [38] e um para grãos, figura 3.4b, extraído da referência [42] e com dados de [40, 41]. Além disto, a figura 3.4c mostra a curva crítica do modelo com soma de *daisy* a partir do plano $L \times \tau$.

Aqui não é objetivado comparar quantitativamente o modelo teórico desenvolvido e os resultados experimentais presentes na literatura. Este procedimento é realizado nas referências [33, 34] para o caso de uma transição de fase de primeira ordem e em [43] para o caso de segunda ordem dentro do modelo de Ginzburg-Landau. A busca por uma comparação quantitativa necessitaria da identificação dos parâmetros do modelo teórico com informações do material que foi experimentalmente medido.

3.5.4 Curva de Temperatura Crítica

A temperatura crítica como função do tamanho do sistema pode ser obtida a partir da relação

$$0 = -1 + \frac{\lambda|m|^{D-4}}{4(\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(\frac{D}{2} - 1\right) \tau_c^{D-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{D-2}} + \frac{\lambda|m|^{D-4}}{4(\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(\frac{D}{2} - 1\right) \chi^{D-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{D-2}} + \frac{\lambda|m|^{D-4}}{2(\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(\frac{D}{2} - 1\right) \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n_1}{\tau_c}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{\chi}\right)^2 \right]^{\frac{2-D}{2}}, \quad (3.51)$$

exposta anteriormente. Na figura 3.5, é exibida a curva da temperatura crítica que é obtida para algumas escolhas de constante de acoplamento e dimensionalidade. O potencial químico é obrigatoriamente nulo em todas as curvas, devido à restrição do modelo.

A constante de acoplamento influencia simplesmente modificando a escala da curva: quanto maior o acoplamento, menor a temperatura crítica possível e menor o $\chi_{\text{máx}}$ observado, indicando um aumento de $L_{\text{mín}}$. A modificação da dimensionalidade do sistema,

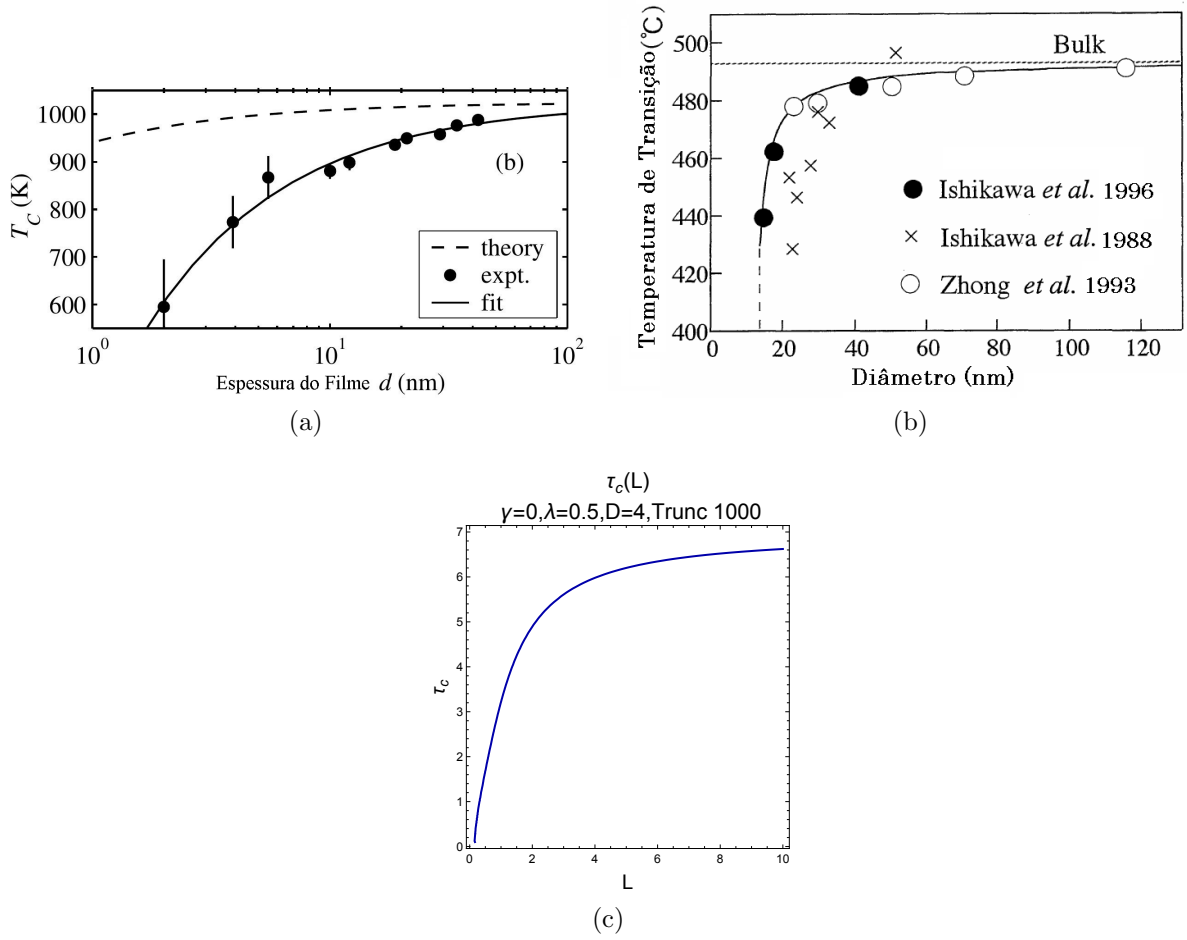


Figura 3.4: Em cima à esquerda o caso do filme fino, extraído da ref.[38]. Em cima à direita o caso do grão, extraído das refs.[40–42]. Embaixo a temperatura crítica no plano $L \times \tau_c$, onde L é a espessura do filme. Este gráfico permite evidenciar a comparação com as respostas experimentais exibidas.

porém, acarreta mudanças drásticas na forma da curva, figura 3.5a. Enquanto que para dimensionalidade $D = 4$, a concavidade da curva é para cima, para as dimensões observadas $D = 5$ e $D = 6$, a concavidade é para baixo. Além disto, a mudança da dimensionalidade promove uma mudança de escala: quanto maior a dimensionalidade, menores os valores acessíveis de temperatura crítica e maiores os valores do tamanho mínimo. A exploração com respeito a altas dimensionalidades não será seguida neste trabalho. Ela pode vir a se tornar útil em investigações de hipóteses com espaço-tempo apresentando dimensões superiores, ou até para analisar fenômenos de dimensionalidade normal com uso de uma teoria efetiva contendo dimensões extras.

3.6 Limite para a aproximação de Ginzburg-Landau

Será analisada aqui a concordância do modelo apresentado com o modelo de Ginzburg-Landau. O modelo de Ginzburg-Landau (GL) é uma primeira aproximação ao estudo de

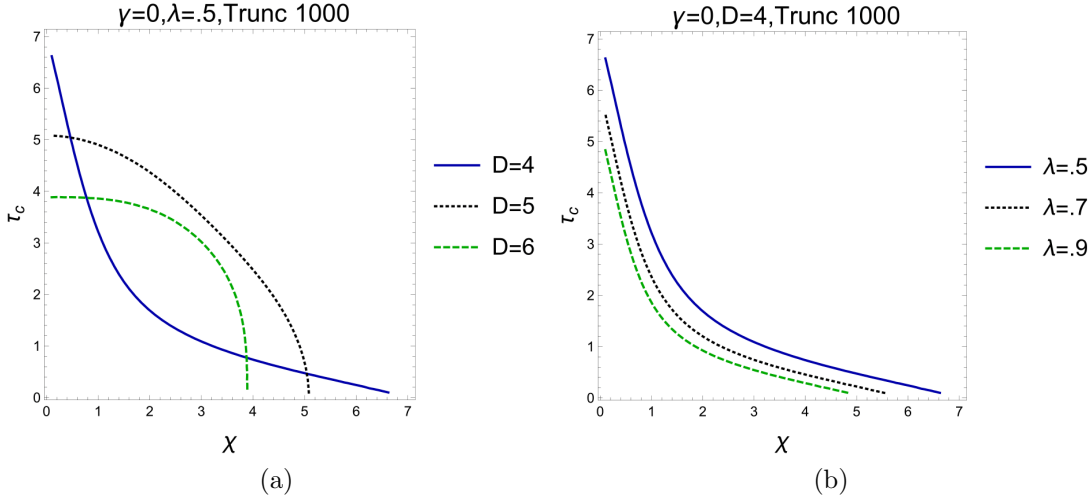


Figura 3.5: À esquerda a análise da curva crítica de transição de fase variando a dimensionalidade, à direita o mesmo variando a constante de acoplamento. Em ambas o truncamento da série é realizado em 1000 termos.

casos de transições de fase de segunda ordem, como ocorre com o potencial ϕ^4 . Caso o interesse se restrinja à superfície de transição de fase e regiões bem próximas a ela, GL é aplicável. A transição de fase é governada pelo parâmetro quadrado de massa m^2 que, na aproximação de GL, é tomado como $m^2 \propto T - T_c$.

O modelo ϕ^4 estudado ao longo deste capítulo é teoricamente capaz de atingir toda a faixa de temperaturas, ao invés de se restringir à região de criticalidade. Para se comparar com GL, serão deixadas de lado as compactificações espaciais e o potencial químico. Existem aqui dois tipos de modelos, aqueles no quais a dependência é direta - seções 3.3 e 3.4 - e aqueles em que existe a presença de recorrência, seção 3.5.

Para modelos não recorrentes, a dependência do quadrado de massa poderá ser diretamente separada em uma parte que é função da temperatura e outra constante,

$$m_{\text{eff}}^2(\tau) = A + B(\tau),$$

que é o caso da teoria a 1 *loop*.

A criticalidade ocorre quando $\tau = \tau_c$, fazendo $m_{\text{eff}}^2(\tau_c) = 0$. Isto gera, diretamente, a expressão

$$m_{\text{eff}}^2(\tau) = B(\tau) - B(\tau_c),$$

onde a temperatura crítica é encontrada a partir da relação

$$B(\tau_c) = -A.$$

Anteriormente, foi obtida a expressão exata do quadrado de massa não renormalizado, Eq. (2.48). Como os contratermos não são dependentes da temperatura, ficam contidos no idealizado termo A . Assim, **independentemente da prescrição adotada**, obtém-se,

da equação (2.72),

$$a_2^{\text{eff}} = b_4 W_{D,1}(\beta; b_2) - b_4 W_{D,1}(\beta_c; b_2) - \frac{b_3^2}{2} W_{D,2}(\beta; b_2) + \frac{b_3^2}{2} W_{D,2}(\beta_c; b_2).$$

Especificando para a teoria ϕ^4 ($a_2 = m^2$, $a_4 = \lambda$), tomando a fase simétrica $\phi_c = 0$ e evidenciando a função W , de acordo com a equação (2.68), esta relação se reduz a

$$m_{\text{eff}}^2(0; \beta) = \lambda \frac{(m^2)^{\frac{D-2}{4}}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n\beta)^{\frac{D-2}{2}}} K_{\frac{D-2}{2}} \left(n\beta \sqrt{m^2} \right) - \frac{1}{(n\beta_c)^{\frac{D-2}{2}}} K_{\frac{D-2}{2}} \left(n\beta_c \sqrt{m^2} \right) \right]. \quad (3.52)$$

É possível trabalhar com quantidades adimensionais definindo a escala $|m|$ e utilizando as grandezas definidas na equação (3.10). Assim, passa-se à expressão,

$$M_{\text{eff}}^2(0; \beta) = [\text{sgn}(m^2)]^{\frac{D-2}{4}} \frac{\lambda |m|^{D-4}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\tau}{n} \right)^{\frac{D}{2}-1} K_{\frac{D}{2}-1} \left(\frac{n}{\tau} \sqrt{\text{sgn}(m^2)} \right) - \left(\frac{\tau_c}{n} \right)^{\frac{D}{2}-1} K_{\frac{D}{2}-1} \left(\frac{n}{\tau_c} \sqrt{\text{sgn}(m^2)} \right) \right]. \quad (3.53)$$

Expandindo o primeiro termo em torno de τ_c , obtém-se

$$M_{\text{eff}}^2(0; \tau) = [\text{sgn}(m^2)]^{\frac{D-2}{4}} \frac{\lambda |m|^{D-4}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \left[A_1(\tau - \tau_c) + A_2 \frac{(\tau - \tau_c)^2}{2} + O[(\tau - \tau_c)^3] \right], \quad (3.54a)$$

onde

$$A_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\text{sgn}(m^2)} K_{\frac{D}{2}} \left(\frac{n}{\tau_c} \sqrt{\text{sgn}(m^2)} \right)}{n^{\frac{D}{2}-2} \tau_c^{3-\frac{D}{2}}} \quad (3.54b)$$

e

$$A_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\text{sgn}(m^2)}}{\tau_c^{4-\frac{D}{2}} n^{\frac{D}{2}-2}} \left[\sqrt{\text{sgn}(m^2)} \frac{n}{\tau_c} K_{\frac{D}{2}-1} \left(\frac{n}{\tau_c} \sqrt{\text{sgn}(m^2)} \right) + (D-3) K_{\frac{D}{2}} \left(\frac{n}{\tau_c} \sqrt{\text{sgn}(m^2)} \right) \right]. \quad (3.54c)$$

A primeira ordem é a aproximação de Ginzburg-Landau. Esta forma permite analisar até que ponto esta aproximação é válida. Isto ocorre enquanto o coeficiente do termo de ordem 2 for suficientemente pequeno em comparação com o termo linear. A dominância do primeiro termo significa que

$$\left| \frac{A_1(\tau - \tau_c)}{A_2 \frac{(\tau - \tau_c)^2}{2}} \right| \gg 1 \Rightarrow \left| \frac{2A_1}{A_2} \right| = R \gg \tau - \tau_c$$

ou seja,

$$\tau - \tau_c \ll 2 \left| \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^{2-\frac{D}{2}} K_{\frac{D}{2}} \left(\frac{n}{\tau_c} \sqrt{\text{sgn}(m^2)} \right)}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2-\frac{D}{2}}}{\tau_c} \left[\sqrt{\text{sgn}(m^2)} \frac{n}{\tau_c} K_{\frac{D}{2}-1} \left(\frac{n}{\tau_c} \sqrt{\text{sgn}(m^2)} \right) + (D-3) K_{\frac{D}{2}} \left(\frac{n}{\tau_c} \sqrt{\text{sgn}(m^2)} \right) \right]} \right|. \quad (3.55)$$

Na figura 3.6, é exibida a região de validade em função da temperatura crítica para os dois casos possíveis. A situação de $m^2 < 0$ é exposta na figura 3.6a e a de $m^2 > 0$ na figura 3.6b. Um comportamento evidente nas curvas é que a região de validade aumenta com o aumento da temperatura crítica. A principal diferença entre as escolhas $m^2 < 0$ e $m^2 > 0$ é a presença de oscilações, em temperaturas críticas pequenas, para a situação negativa. Isto decorre da presença de argumento complexo na função de Bessel.

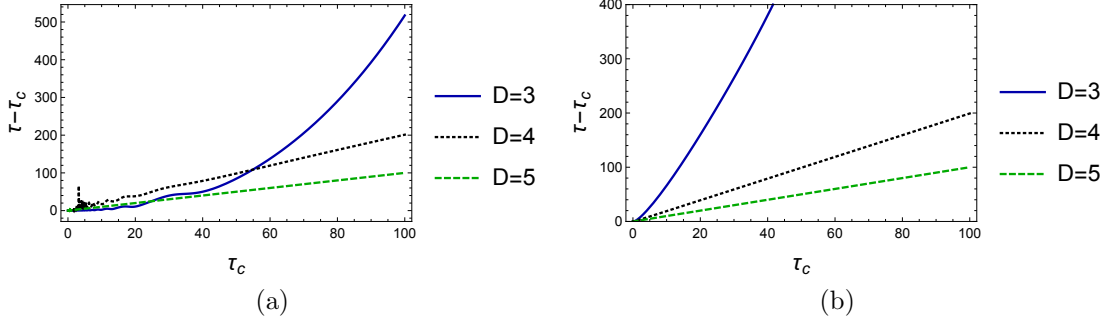


Figura 3.6: À esquerda, a região de validade em função da temperatura crítica no caso de $m^2 < 0$, as rápidas oscilações são reflexo da inaplicabilidade do modelo para baixas temperaturas. À direita, é mostrada a região de validade no caso $m^2 > 0$. Em ambos, o truncamento da série é fixado em 250 termos.

Em ambas as situações é explorada a dependência com a dimensionalidade. Encontra-se que o aumento da dimensionalidade reduz a inclinação da curva, e portanto reduz a região de validade da aproximação de Ginzburg-Landau. Fica evidente também que $D = 3$ tem região de validade grande, para uma temperatura crítica de $\tau_c = 100$ ocorre $\tau - \tau_c > 400$. Porém, $D = 3$ também é a dimensionalidade com maior discordância de comportamento entre $m^2 < 0$ e $m^2 > 0$. Para as dimensões $D = 4$ e $D = 5$, é observado basicamente o mesmo comportamento para temperaturas críticas altas. Por exemplo, da fig.3.6 é possível estimar que a região de validade de $D = 4$ para $\tau_c = 100$ está em torno de $\tau - \tau_c \sim 200$, tanto para $m^2 > 0$, quanto para $m^2 < 0$.

Fica evidente que a aproximação de GL se mostra menos válido para temperatura críticas pequenas e para um espaço com dimensão superior.

3.6.1 Caso recorrente

No modelo de 1 *loop* com recorrência, no qual é realizada a soma dos diagramas super *daisy*, há uma expressão do tipo

$$M_{\text{eff}}^2 \Big|_{\text{Daisy}} = -1 + M_{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}}^{\frac{D}{2}-1} \frac{\lambda |m|^{D-4}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{n} \right)^{\frac{D}{2}-1} K_{\frac{D}{2}-1} \left(\frac{n}{\tau} M_{\text{eff}} \Big|_{\text{Daisy}} \right). \quad (3.56)$$

Para estudar seu comportamento em torno da temperatura crítica, o processo analítico não é tão eficiente. O procedimento a ser adotado é fixar a constante de acoplamento

adimensional $\lambda|m|^{D-4}$ e computacionalmente obter o valor de M para uma lista de valores de τ . Alguns casos são exibidos na figura 3.7.

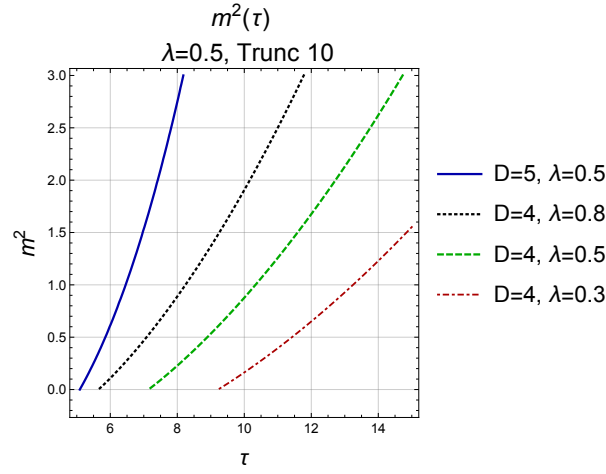


Figura 3.7: Dependência do quadrado de massa com a temperatura do sistema, modificando a dimensionalidade e a constante de acoplamento.

Para $\lambda = 0,5$ e $D = 4$ um bom ajuste é

$$M^2 = 0,23(\tau - 7,14)^{1,25}, \quad (3.57)$$

e para $\lambda = 0,5$ e $D = 5$

$$M^2 = 0,65(\tau - 5,07)^{1,34}. \quad (3.58)$$

O comportamento observado é que o modelo com recorrência não recupera o resultado de GL, ou seja, não é observado um comportamento do tipo $M^2 \sim \tau - \tau_c$. Por outro lado, é possível recuperar um comportamento do tipo $M^2 \sim (\tau - \tau_c)^\alpha$, indicando que pode-se obter o expoente crítico associado ao problema, como calculado nas equações (3.57) e (3.58).

Este resultado intensifica GL como um efeito de 1 *loop* visto que a aproximação não é reobtida neste caso. Além disto, é evidente aqui a possibilidade de utilizar o formalismo para estudar o modo como o sistema se aproxima da transição de fase.

CAPÍTULO 4

ϕ^4 COM COMPACTIFICAÇÃO ESPACIAL E CAMPO MAGNÉTICO

O formalismo introduzido por Lawrie [44], a ser exibido na seção 4.1, permite a introdução de um campo magnético estático em um sistema presente no espaço¹ com $D \geq 3$ utilizando uma modificação do propagador livre. Este formalismo introduz no sistema os níveis de Landau e reduz – efetivamente – a dimensionalidade. Será abordado aqui o caso do potencial $(\Phi^*\Phi)^2$ para o campo escalar complexo Φ . A ação euclidiana é dada por

$$S = \int d^D x \left\{ (D_\mu \Phi)^* D^\mu \Phi + m_0^2 \Phi^* \Phi + \frac{\lambda_0}{4} (\Phi^* \Phi)^2 \right\}, \quad (4.1)$$

é utilizada a definição de que $m_0^2 = m^2 + \delta m^2$ e $\lambda_0 = \lambda + \delta \lambda$, de modo que m^2 e λ são finitos. Os contratermos δm^2 e $\delta \lambda$ serão definidos mais à frente. Além disto, o campo eletromagnético é introduzido através do acoplamento mínimo, $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$.

O campo magnético será introduzido como um campo estático. Caso a dimensionalidade seja $D = 4$, isso é representado como $\vec{H} = H\hat{z}$. Em uma dimensionalidade genérica, $D \geq 3$, o campo estático pode ser representado por $F^{12} = H$, onde $F^{\mu\nu}$ é o tensor de campo eletromagnético. Será seguida a abordagem de que a ação ‘livre’ que define o propagador já contem o campo magnético. Desta maneira, é obtido um novo propagador $G(\vec{r}, \vec{r}')$ que não é invariante translacional. Ainda assim, é possível definir um caso especial $G(\vec{r}, \vec{r})$, representando uma linha que retorna ao mesmo ponto, com o qual pode-se trabalhar no espaço de momentos. Isto será explorado na seção 4.1.

Efetivamente, pode-se trabalhar com a identificação que passa de um propagador comum para um propagador da teoria com campo magnético acoplado,

$$G(\vec{r}, \vec{r}) = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2 + m^2} \rightarrow \int \frac{d^{D-2} q}{(2\pi)^{D-2}} \frac{\omega}{2\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{q^2 + m^2 + (2\ell + 1)\omega}, \quad (4.2)$$

¹ Para $D < 3$ não se define campo magnético, como pode ser visto ao trabalhar com a forma tensorial das equações de Maxwell.

onde a frequência de ciclotron $\omega = eH$, produto do módulo do campo magnético e da carga elementar, é sempre positivo. Deve ser notada a presença dos níveis de Landau ℓ , associados à quantização na presença do campo magnético estático.

É importante pontuar que o novo propagador nasce em meio à perda da invariância translacional de duas das dimensões do espaço-tempo, o plano xy , deixando assim um subespaço invariante $(D - 2)$ -dimensional. Ao adotar $D = 4$, este subespaço será bidimensional.

No caso aqui abordado, não é possível utilizar a definição convencional do potencial efetivo. Como exibido na seção 2.1, o potencial efetivo é definido tomando, na ação efetiva, a configuração de campo clássico constante, válido caso o sistema apresente invariância translacional. Na presente situação, a introdução de um campo magnético uniforme na direção $\hat{z}$ quebra explicitamente a simetria do plano xy perpendicular a ele. A quebra da invariância não permite definir o valor esperado do campo no vácuo como uma constante, existirá uma dependência com as coordenadas do plano xy . Assim, a definição convencional do potencial efetivo não poderá ser utilizada.

Ao invés de buscar contornar essa limitação e buscar um novo modo de definir o potencial efetivo, será trabalhado com o que existe a disposição. Neste caso, o conhecimento de $G(\vec{r}, \vec{r})$ e a possibilidade de aplicar isso ao cálculo direto da correção em parâmetros da teoria, mesmo sem conhecer o potencial efetivo. O estudo da transição de fase será realizado a partir da observação do quadrado de massa efetivo da teoria. Adota-se aqui a noção intuitiva de que enquanto em nível árvore é o parâmetro m^2 quem governa a transição, o seu análogo com as devidas correções quânticas e de temperatura M^2 que passará a governar diretamente a transição².

4.1 Introduzindo o campo magnético

Nesta seção é mostrado, seguindo a ref. [44], um modo de introduzir um campo magnético estático em um sistema composto por um campo escalar complexo. Será tomada somente a parte livre do campo e a sua interação com o campo eletromagnético, que é o relevante para obtenção do propagador.

Seja a ação euclidiana de um campo complexo com acoplamento mínimo

$$S_0 = \int d^D x \{ (D_\mu \Phi)^* D^\mu \Phi + m^2 \Phi^* \Phi \}, \quad (4.3)$$

ou, evidenciando a presença do potencial através do operador de derivação covariante $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$,

$$S_0 = \int d^D x \{ \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi^* \Phi - ieA_\mu (\Phi^* \partial^\mu \Phi - \Phi \partial^\mu \Phi^*) - e^2 A_\mu A^\mu \Phi^* \Phi \}. \quad (4.4)$$

² Um modo mais formal de estudar a transição é acompanhar a evolução do valor esperado do campo no vácuo, o que exige uma abordagem numérica.

É possível reorganizar realizando uma integração por partes e desprezando os termos de superfície,

$$S_0 = - \int d^D x \Phi^* [\square - m_0^2 + 2ieA_\mu \partial^\mu + e^2 A_\mu A^\mu] \Phi, \quad (4.5)$$

$$\equiv - \int d^D x \Phi^* \mathcal{D} \Phi, \quad (4.6)$$

definindo o operador diferencial $\mathcal{D}$ que gerará o propagador livre efetivo.

A abordagem seguida na ref. [44] consiste em restringir o potencial vetor a representar somente um campo magnético na direção $\hat{z}$. Observando segundo a dimensionalidade $D = 4$ a escolha desejada para o campo magnético pode ser representada como $\vec{H} = H\hat{z}$. Para obter $\vec{H} = H\hat{z}$, não existe uma escolha única de A^μ , visto que são associados segundo a relação $\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, que não tem uma inversa única. Uma das possibilidades é adotar o calibre $\vec{A} = Hx\hat{y}$, resultando³ em

$$\mathcal{D} = \square - m_0^2 - 2ieHx\partial_y - e^2 H^2 x^2, \quad (4.7)$$

em que já é possível identificar a frequência de ciclotron $\omega = eH$. As autofunções e autovalores deste operador, como obtido na referência [44], são

$$\Psi_{\vec{q}, p_y, \ell}(\vec{r}) = \frac{(\omega/\pi)^{1/4}}{\sqrt{2^\ell \ell!}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{z}} e^{i\omega p_y y} e^{-\omega(x-p_y)^2/2} H_\ell[\sqrt{\omega}(x-p_y)], \quad (4.8a)$$

$$E(q, \ell) = q^2 + (2\ell + 1)\omega + m^2, \quad (4.8b)$$

ℓ denota os níveis de Landau, H_ℓ são polinômios de Hermite, $\vec{q}$ representa as duas dimensões não restritas ($\hat{z}$ e o tempo euclidiano). Assim, o propagador a ser utilizado nas séries perturbativas para diagramas de Feynman se escreve como

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \int \frac{d^{D-2}q}{(2\pi)^{D-2}} \frac{dp_y}{2\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\Psi_{\vec{q}, p_y, \ell}(\vec{r}) \Psi_{\vec{q}, p_y, \ell}^*(\vec{r}')}{E(q, \ell)}. \quad (4.9)$$

A partir desta expressão, já é possível computar o propagador associado a sair de um ponto e voltar para ele mesmo, $G(\vec{r}, \vec{r})$, seguindo [45, 46] e fazendo $\vec{r}' = \vec{r}$,

$$\int dp_y \Psi_{\vec{q}, p_y, \ell}(\vec{r}) \Psi_{\vec{q}, p_y, \ell}^*(\vec{r}) = \int dp_y \frac{(\omega/\pi)^{1/2}}{2^\ell \ell!} e^{-\omega(x-p_y)^2} H_\ell[\sqrt{\omega}(x-p_y)] H_\ell^*[\sqrt{\omega}(x-p_y)]. \quad (4.10)$$

Utilizando a relação de ortonormalidade dos polinômios de Hermite,

$$\int du e^{-u^2} H_n(u) H_n^*(u) = 2^n n! \sqrt{\pi}, \quad (4.11)$$

obtem-se diretamente

$$\int dp_y \Psi_{\vec{q}, p_y, \ell}(\vec{r}) \Psi_{\vec{q}, p_y, \ell}^*(\vec{r}) = 1, \quad (4.12)$$

³ usando do fato de que $A_\mu = Hx(0, 0, 1, 0)$ e $A^\mu = -Hx(0, 0, 1, 0)$ lembrando que a primeira componente, A_0 , é associada ao tempo euclidiano. Apesar de feita para $D = 4$, esta escolha será válida para qualquer dimensionalidade $D \geq 3$.

gerando, assim, o propagador que leva de um ponto a si mesmo:

$$G(\vec{r}, \vec{r}) = \int \frac{d^{D-2}q}{(2\pi)^{D-2}} \frac{\omega}{2\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{q^2 + (2\ell + 1)\omega + m^2}. \quad (4.13)$$

Que, por deixar em aberto a dimensionalidade D , já se encontra na forma ideal ao tratamento por regularização dimensional. É também possível reescrever essa expressão no espaço de momenta definindo

$$G(x, x) = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \tilde{G}(q) \quad (4.14)$$

$$\tilde{G}(q) = \delta(q_1)\delta(q_2) \frac{\omega}{2\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{q^2 + (2\ell + 1)\omega + m^2}. \quad (4.15)$$

A referência [44] aborda ainda uma alternativa para o propagador no espaço de momenta. Obtém-se

$$\tilde{G}(k) = \int_0^{\infty} du \frac{e^{-u(q^2+m^2)} e^{-(k_x^2+k_y^2) \frac{\tanh(\omega u)}{\omega}}}{\cosh(\omega u)} \quad (4.16)$$

a partir da definição

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = e^{i\omega(x+x')(y-y')/2} \bar{G}(\vec{r} - \vec{r}') = e^{i\omega(x+x')(y-y')/2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \tilde{G}(k), \quad (4.17)$$

que permite extrair a parte invariante translacional e o fator que remove esta invariância. A transformada de Fourier é definida a partir do termo com a invariância. Note que em $\vec{r} = \vec{r}'$ ocorre $G(\vec{r}, \vec{r}') = \bar{G}(\vec{r} - \vec{r}')$. A reescrita com $\bar{G}$ permite visualizar a questão da perda de invariância translacional.

4.1.1 Preso ao formalismo de campo magnético

Não é possível retornar ao caso sem campo magnético observando simplesmente o propagador (4.13). Existe a presença de linearidade com ω e, claramente, tomar $\omega = 0$ destrói o propagador, mostrando a impossibilidade de se retornar ao caso livre.

Porém, é útil observar outros pontos de vista. O propagador (4.16) exibido por Lawrie com a soma sobre os níveis de Landau deve ser observado. Claramente, ao tomar $\omega = 0$ obtém-se $G(\vec{r}, \vec{r}') = \bar{G}(\vec{r} - \vec{r}')$, restando apenas o trabalho de avaliar a proposta para $G(k)$. Tomar o limite de $\omega \rightarrow 0$ resulta diretamente⁴

$$\tilde{G}(k) = \int_0^{\infty} du e^{-u(k^2+m^2)} = \frac{1}{k^2 + m^2}, \quad (4.18)$$

mostrando que a abordagem de Lawrie recupera, sim, o caso sem campo magnético. O problema é que ao integrar a expressão (4.16) surgem restrições que impedem retornar à situação $\omega \rightarrow 0$. Isto pode ser exibido obtendo $G(x, x)$ a partir da equação (4.16).

$$G(\vec{r}, \vec{r}) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int_0^{\infty} du \frac{e^{-u(q^2+m^2)} e^{-(k_x^2+k_y^2) \frac{\tanh(\omega u)}{\omega}}}{\cosh(\omega u)}. \quad (4.19)$$

⁴ Pois $\cosh(0) = 1$ e também $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh(ax)}{x} = a$.

As integrais em k_x e k_y são idênticas,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{-k_x^2 \frac{\tanh(\omega u)}{\omega}} = \Gamma(1/2) \left[\frac{\tanh(\omega u)}{\omega} \right]^{-1/2};$$

implementando-as, $G(\vec{r}, \vec{r}')$ se torna

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \int \frac{d^{D-2}q}{(2\pi)^{D-2}} \int_0^\infty \frac{du}{2} \frac{\omega}{2\pi} \frac{e^{-u(q^2+m^2)}}{\sinh(\omega u)}. \quad (4.20)$$

Note que a integral agora é escrita na variável q , o momentum do subespaço $(D-2)$ -dimensional invariante translacional.

Utilizando a integral 3.541(1) da ref. [32],

$$\int_0^\infty e^{-\mu x} \sinh^\nu(\beta x) dx = \frac{1}{2^{\nu+1}\beta} B\left(\frac{\mu}{2\beta} - \frac{\nu}{2}, \nu + 1\right), \quad (4.21)$$

onde B é a função beta e cujas restrições são

$$\mathbf{Re}\beta > 0; \quad \mathbf{Re}\nu > -1; \quad \mathbf{Re}\mu > \mathbf{Re}\beta\nu.$$

Para associar a equação (4.21) com a (4.20), são necessárias as identificações

$$\beta = \omega; \quad \mu = q^2 + m^2; \quad \nu = -1; \quad x = u,$$

de modo que as restrições se tornam

$$\omega > 0, \quad q^2 + m^2 > -\omega$$

Deve ser notado que a condição $\mathbf{Re} \nu > 1$ já foi descumprida. A consequência disto é a obtenção de $B(x, 0)$, que diverge. Mapeando a divergência, é encontrado que

$$B(x, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma - \psi(x) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (4.22)$$

sendo $\psi(x)$ a função digama. Assim, a equação (4.20) se torna

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \int \frac{d^{D-2}q}{(2\pi)^{D-2}} \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma - \psi\left(\frac{q^2 + m^2}{2\omega} + \frac{1}{2}\right) \right]. \quad (4.23)$$

Lembrando que $q \in [0, \infty[$ as restrições se tornam

$$\omega > 0; \quad \omega > -m^2, \quad (4.24)$$

mostrando que a mera efetuação da integral leva de um regime onde era possível tomar $\omega = 0$ para uma situação onde não é mais possível se libertar do campo magnético. A restrição aqui imposta, $\omega > -m^2$ ressurgirá mais à frente como a necessidade de se evitar inconsistentes termos imaginários nas funções que descrevem o sistema.

A equação (4.23) pode ser levada mais adiante utilizando a relação 8.362(1) da ref. [32],

$$\psi(x) = -\gamma - \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{x+\ell} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{1+\ell}.$$

Isso fornece diretamente que

$$G(\vec{r}, \vec{r}) = \int \frac{d^{D-2}q}{(2\pi)^{D-2}} \left[\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{1+\ell} \right) + \frac{\omega}{2\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{q^2 + m^2 + \omega(1+2\ell)} \right], \quad (4.25)$$

uma divergência somada ao conhecido propagador (4.13). Fica assim demonstrada a concordância de ambas as expressões, a menos de uma constante infinita, que pode ser removida através da supressão de infinitos.

4.2 Quadrado da massa

Considerando uma expansão em *loops*, a primeira correção na massa será dada pela contribuição do *tadpole*, que é exatamente do tipo $G(\vec{r}, \vec{r})$,

$$M^2 = m^2 + \delta m^2 + \frac{\lambda_0}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2 + m^2}, \quad (4.26)$$

onde M^2 é a massa efetiva do sistema corrigido a 1 *loop*. Contribuições de ordem superior necessitam do uso de $G(\vec{r}, \vec{r}')$, com $\vec{r} \neq \vec{r}'$.

Note, primeiramente, que este resultado está restrito à fase simétrica do sistema e não é capaz de atingir a fase quebrada; ele é obtido considerando $\langle \phi \rangle = v = 0$. Na fase quebrada, ocorre o surgimento de outros vértices, que permitiriam uma interação de três linhas. É evidente também a complicação associada a isto: o formalismo do propagador com campo magnético não está bem estabelecido para diagramas muito elaborados, onde as linhas não voltem ao mesmo vértice, devido à ausência de simetria translacional.

Estas limitações não permitirão obter uma correção para a constante de acoplamento na fase simétrica. Surge a obrigação de tomar $\lambda_0 = \lambda$, visto que qualquer correção no acoplamento envolveria dois vértices.

Aplicando na relação de massa (4.26) a prescrição (4.2) associada à introdução do campo magnético, tem-se

$$M^2 = m^2 + \delta m^2 + \frac{\lambda_0}{2} \frac{\omega}{2\pi} \int \frac{d^{D-2}q}{(2\pi)^{D-2}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{q^2 + m^2 + (2\ell+1)\omega}. \quad (4.27)$$

A próxima etapa consiste em seguir para uma teoria de campo toroidal. Este tópico foi abordado no capítulo 2 fora do contexto de campo magnético. Será utilizada a prescrição

estendida de Matsubara para bósons, seguindo [10],

$$\int \frac{dp_0}{(2\pi)} \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta}, \quad p_0 \rightarrow \frac{2\pi n}{\beta} - i\mu, \quad (4.28a)$$

$$\int \frac{dp_1}{(2\pi)} \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{L}, \quad p_1 \rightarrow \frac{2\pi n}{L}, \quad (4.28b)$$

sendo β o inverso da temperatura (em unidades de $k_B = 1$), L o comprimento de compactificação espacial e μ o potencial químico.

Ao estudar sistemas em $D = 4$, será possível realizar apenas duas compactificações no sistema, uma gerando a temperatura e a outra gerando a compactificação espacial. Isto ocorre, pois, ao adicionar o campo magnético duas das dimensões perdem invariância translacional e a validade de realizar compactificações não foi ainda abordada; sendo *a priori* inválido fazê-lo.

No presente contexto, o tamanho característico L pode ser visto como a espessura de um filme fino. Este filme sofre influência de um campo magnético H estático perpendicular ao plano do filme e está em contato com um banho térmico de temperatura característica $1/\beta$. Além disso, o sistema - modelado como um campo de spin 0 - apresenta efetivamente um potencial químico μ . Ele traz conhecimento sobre a resistência do sistema em aumentar o número de ‘partículas’ associadas ao campo. O potencial químico de grupos de partículas bosônicas é nulo ou negativo, indicando a inexistência de uma repulsão ao aumento de “partículas” (caso nulo) ou uma tendência a aumentar o número de “partículas”: formação de aglomerados de bósons.

O quadrado de massa da equação (4.27), utilizando as identificações (4.28), se torna

$$M^2 = m^2 + \delta m^2 + \frac{\lambda_0}{2} \frac{\omega}{2\pi} \sum_{n_1, n_2=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta L} \int \frac{d^{D-4}q}{(2\pi)^{D-4}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{q^2 + \left(\frac{2\pi n_1}{\beta} - i\mu\right)^2 + \left(\frac{2\pi n_2}{L}\right)^2 + m^2 + (2\ell + 1)\omega}. \quad (4.29)$$

Para resolver o lado direito da equação acima é primeiramente computada a integral com uso da regularização dimensional, exibida no Ap. A, o que já introduz uma leve renormalização, como mostrado no mesmo apêndice, e obtém-se que

$$M^2 = m^2 + \delta m^2 + \frac{\lambda}{2} \frac{1}{\beta L} \sum_{n_1, n_2=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\omega}{2\pi} \frac{1}{(4\pi)^{(D-4)/2}} \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) \times \left[\left(\frac{2\pi n_1}{\beta} - i\mu\right)^2 + \left(\frac{2\pi n_2}{L}\right)^2 + m^2 + (2\ell + 1)\omega \right]^{\frac{D}{2}-3}, \quad (4.30)$$

exibindo, assim, a função zeta de Epstein-Hurwitz. Utilizando o apêndice B, é realizado

um tratamento que gera uma extensão analítica e evidencia as divergências:

$$\begin{aligned}
M^2 = m^2 + \delta m^2 + \lambda\omega \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{4-D}{2}\right)}{2^D \pi^{D/2}} (m^2 + (2\ell+1)\omega)^{\frac{D-4}{2}} \\
+ \lambda\omega \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} \left(\sqrt{m^2 + (2\ell+1)\omega}\right)^{\frac{D-4}{2}} \left\{ \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{\cosh(n_1\mu\beta)}{(n_1\beta)^{\frac{D-4}{2}}} \right. \\
\times K_{\frac{4-D}{2}}\left(\sqrt{(m^2 + (2\ell+1)\omega)n_1\beta}\right) + \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{K_{\frac{4-D}{2}}\left(\sqrt{(m^2 + (2\ell+1)\omega)n_2L}\right)}{(n_2L)^{\frac{D-4}{2}}} \\
\left. + 2 \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \frac{\cosh(n_1\mu\beta) K_{\frac{4-D}{2}}\left(\sqrt{m^2 + (2\ell+1)\omega} \sqrt{n_1^2\beta^2 + n_2^2L^2}\right)}{\left(\sqrt{n_1^2\beta^2 + n_2^2L^2}\right)^{\frac{D-4}{2}}} \right\}. \quad (4.31)
\end{aligned}$$

Fixando a dimensionalidade como $D = 4 - 2\varepsilon$ e já evidenciando as singularidades da função gama, pode-se escrever

$$\begin{aligned}
M^2 = m^2 + \delta m^2 + \frac{\lambda\omega}{(4\pi)^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma\right) \left(1 - \varepsilon \ln \frac{m^2 + (2\ell+1)\omega}{4\pi}\right) \\
+ \lambda\omega \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \left\{ \sum_{n_1=1}^{\infty} \cosh(n_1\mu\beta) K_0\left(\sqrt{(m^2 + (2\ell+1)\omega)n_1\beta}\right) \right. \\
+ \sum_{n_2=1}^{\infty} K_0\left(\sqrt{(m^2 + (2\ell+1)\omega)n_2L}\right) \\
\left. + 2 \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \cosh(n_1\mu\beta) K_0\left(\sqrt{m^2 + (2\ell+1)\omega} \sqrt{n_1^2\beta^2 + n_2^2L^2}\right) \right\}. \quad (4.32)
\end{aligned}$$

Evidentemente, os somatórios podem ser reescritos como um grande termo,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{K}}(\beta, L, \mu, \omega; m^2) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \left\{ \sum_{n_1=1}^{\infty} \cosh(n_1\mu\beta) K_0\left(\sqrt{(m^2 + (2\ell+1)\omega)n_1\beta}\right) \right. \\
+ \sum_{n_2=1}^{\infty} K_0\left(\sqrt{(m^2 + (2\ell+1)\omega)n_2L}\right) \\
\left. + 2 \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \cosh(n_1\mu\beta) K_0\left(\sqrt{m^2 + (2\ell+1)\omega} \sqrt{n_1^2\beta^2 + n_2^2L^2}\right) \right\}, \quad (4.33)
\end{aligned}$$

o que torna mais simples a escrita da relação de correção da massa. Evidenciando os termos infinitos,

$$M^2 = m^2 + \delta m^2 + \frac{\lambda\omega}{(4\pi)^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\lambda\omega}{(4\pi)^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(-\gamma - \ln \frac{m^2 + (2\ell+1)\omega}{4\pi}\right) + \lambda\omega \tilde{\mathcal{K}}(\beta, L, \mu, \omega; m^2) \quad (4.34)$$

Uma tentativa natural de renormalização seria adotar uma prescrição de renormalização que definisse m^2 como a massa medida em determinada situação. Estes procedimentos, porém, não estão perfeitamente bem estabelecidos para teoria de campo em espaços toroidais.

4.2.1 Renormalização e restrições de validade

É necessário recordar que a equação obtida, ainda não renormalizada, vale **somente** na fase simétrica, de modo que não existe o direito de impor uma condição de renormalização a temperatura nula (afinal, nesta situação o sistema encontra-se na fase quebrada), como seria desejado para comparar com uma teoria de campo sem nenhuma compactificação presente. Sabe-se que, na fase quebrada, o ponto $\langle \Phi \rangle = 0$ deixa de representar o vácuo e passa a ser um ponto de equilíbrio instável. Existe a possibilidade, porém, de tentar renormalizar neste ponto instável. Renormalizar em um ponto de instabilidade não é algo bem definido, apesar disso, será analisado o que ocorre.

A condição para **renormalizar no ponto de instabilidade** é

$$M^2 \Big|_{v=0, T=0} \stackrel{!}{=} m^2 < 0. \quad (4.35)$$

A negatividade do quadrado de massa é associada ao fato de que, caso seja considerada a massa pelo ponto de vista do falso vácuo $v = 0$, o quadrado de massa será necessariamente negativo. Isso não ocorre, obviamente, pelo ponto de vista do vácuo verdadeiro do sistema, o qual, infelizmente, é inacessível devido às restrições impostas ao formalismo. Assim, aplicando a condição de renormalização (4.35) à massa não renormalizada (4.34), encontra-se que o contratermo é

$$\delta m^2 = -\frac{\lambda\omega}{(4\pi)^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\lambda\omega}{(4\pi)^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(-\gamma - \ln \frac{m^2 + (2\ell + 1)\omega}{4\pi} \right) - \lambda\omega \tilde{\mathcal{K}}(\beta \rightarrow \infty, L, \mu, \omega; m^2). \quad (4.36)$$

O último termo terá uma boa convergência para zero caso algumas condições sejam satisfeitas. Primeiro, é necessário⁵ que o argumento das funções de Bessel seja real, isto é,

$$m^2 + (2\ell + 1)\omega > 0. \quad (4.37)$$

A segunda restrição é de que o termo $e^{n_1\mu\beta}$ do cosseno hiperbólico não leve a função $\tilde{\mathcal{K}}$ a divergir. No limite de β muito grande, tem-se

$$\cosh(n_1\mu\beta) K_0(n_1\beta\sqrt{m^2 + (2\ell + 1)\omega}) \stackrel{\beta \rightarrow \infty}{\propto} e^{n_1|\mu|\beta} e^{-n_1\beta\sqrt{m^2 + (2\ell + 1)\omega}}, \quad (4.38)$$

trazendo naturalmente a exigência de que

$$\sqrt{m^2 + (2\ell + 1)\omega} > |\mu|. \quad (4.39)$$

Ambas as restrições se completam. A primeira, Eq. (4.37), pode ser vista como uma restrição sobre o valor de ω ,

$$\omega > \frac{-m^2}{(2\ell + 1)} = \frac{|m^2|}{(2\ell + 1)}, \quad (4.40)$$

⁵ Argumentos imaginários também levam a uma convergência. Porém, o sistema se aproximará de zero através de fortes oscilações. As oscilações são apenas indicativo de erro da abordagem, daí a necessidade de garantir a realidade do argumento.

lembrando que $m^2 < 0$. E, como $\ell \in \mathbb{N}$, a restrição precisa é tomar $\ell = 0$,

$$\omega > |m^2|, \quad (4.41)$$

mostrando que para este formalismo o fator $\omega = eH$ deve ser maior do que o valor absoluto do quadrado de massa.

A segunda restrição, Eq. (4.39), informa que o potencial químico neste modelo não pode ser muito grande. Claramente, quanto maior o nível de Landau menor a restrição sobre o potencial químico. A maior restrição ocorre ao tomar o nível zero,

$$|\mu| < \sqrt{-|m^2| + \omega}. \quad (4.42)$$

Portanto, a restrição sob o valor do potencial químico no formalismo apresentado aqui depende diretamente da escolha do campo magnético. Quando maior o campo magnético, maior o potencial químico permitido. Caso o campo magnético esteja no limite de validade, isto é, $\omega \sim |m^2|$, o potencial químico estará bem próximo de zero: $|\mu| \sim 0$.

Mantendo estas restrições em mente, a correção sobre a massa ao renormalizar no ponto de instabilidade pode ser reescrita aplicando o contratermo (4.36) diretamente à relação de massa (4.34),

$$M^2 = -|m^2| + \lambda\omega\tilde{\mathcal{K}}(\beta, L, \mu, \omega; -|m^2|). \quad (4.43)$$

Assim sendo, m^2 assume um significado bem específico: é o valor da massa corrigida medida à temperatura nula – sem desativar o campo magnético – e tomando o ponto de vista do ponto de instabilidade, onde $\langle \Phi \rangle = v = 0$.

Existem ainda **outras possibilidades** evidentes. O fato de a renormalização ser definida em um ponto de instabilidade pode gerar incômodo. Seria possível também impor uma condição de renormalizar em um ponto estável. No caso aqui presente, seria definir uma temperatura característica na qual a massa m^2 é medida. Mas, não importando a restrição tomada, continua-se com o problema de que não é possível zerar o campo magnético. O contratermo fica definido em função do campo magnético do sistema.

Outra possibilidade é realizar simplesmente uma subtração de infinitos. Isto pode ser realizado com uso de uma subtração mínima (MS, que extrai apenas a divergência), uma subtração mínima modificada ($\overline{\text{MS}}$, que extrai a divergência e a constante de Euler-Mascheroni) ou supressão completa dos termos independentes da temperatura, como abordado na seção 2.4.2. Todas estas abordagens apresentam a problemática comum de que a interpretação de m^2 é perdida, ou seja, deixa de ser um dos valores assumidos pelo quadrado de massa corrigida M^2 do sistema em alguma situação específica. Ao realizar a supressão de infinitos em (4.34), obtém-se diretamente,

$$M^2 = m^2 + \lambda\omega\tilde{\mathcal{K}}(\beta, L, \mu, \omega; m^2), \quad (4.44)$$

onde m^2 é simplesmente um parâmetro arbitrário da teoria. Será analisado mais a fundo esta relação. A função $\tilde{\mathcal{K}}$, apresentada na equação (4.33), é governada pela função de Bessel modificada do 2º tipo e por um acoplamento desta função com o cosseno hiperbólico. Primeiramente, deve ser observada a função Bessel K,

$$K_0 \left(n\beta \sqrt{m^2 + (2\ell + 1)\omega} \right), \quad (4.45)$$

supondo que o argumento seja real, isto é, $m^2 + (2\ell + 1)\omega > 0$, a função será monotonicamente crescente com a temperatura $1/\beta$ e sempre positivo-definida. Por outro lado, caso o argumento seja complexo, a parte real da função Bessel K também será monotonicamente crescente e positiva com $1/\beta$, mas agora apenas a partir de uma temperatura característica suficientemente grande. Abaixo desta temperatura característica inicia-se rápidas oscilações, de modo que a função pode até assumir valores negativos. Já o cosseno hiperbólico é monotonicamente decrescente com $1/\beta$ e também sempre positivo.

No regime em que a função de Bessel tem argumento real, a função $\tilde{\mathcal{K}}$ será uma composição de uma função monotonicamente crescente e outra decrescente em $1/\beta$, ambas positivas definidas; assim, $\tilde{\mathcal{K}} > 0$. Deste modo, a massa corrigida a 1 *loop* renormalizada por supressão terá a subsequente restrição:

$$M^2 = m^2 + \lambda\omega\tilde{\mathcal{K}}(\beta, L, \mu, \omega; m^2) > m^2. \quad (4.46)$$

Como objetiva-se observar transições de fase de segunda ordem, que ocorrem exatamente em $M^2 = 0$. A restrição acima mostra que o único modo disto ser possível ao tomar a renormalização por supressão é definir que $m^2 < 0$. Caso contrário, a teoria estará descrevendo uma situação sem transição de fase. Assim, novamente é reforçada a restrição de que $m^2 < 0$, associada à restrição de que $m^2 + (2\ell + 1)\omega > 0$, o que gera naturalmente a restrição sobre os valores que o campo magnético pode assumir, como mostrado anteriormente para o caso da renormalização no ponto de instabilidade.

Resta ainda a alternativa de que o argumento da função de Bessel seja complexo. Esta alternativa apresenta a complicação de que surgem termos imaginários em M^2 . Porém, pode-se adotar a postura da referência [8] e afirmar que estes termos imaginários refletem o fato de truncar a expansão em 1 *loop* e seriam eliminados ao considerar toda a série⁶. Assim, bastaria tomar somente a parte real da correção, como feito na seção 3.3. Adotando isso, a restrição se torna $m^2 + (2\ell + 1)\omega < 0$ implicando, devido a $\omega > 0$, que necessariamente $m^2 < 0$ e, por sua vez, que $\omega < \frac{|m^2|}{2\ell+1}$. Ou seja, esta outra possibilidade mantém a escolha $m^2 < 0$ mas permite observar agora o regime de campos magnéticos fracos. De qualquer modo, a presença de oscilações não se mostra conveniente e, como visto na seção 3.3, acrescenta mais restrições de validade ao modelo – a saber, no caso sem campo magnético, a restrição encontrada foi de que a temperatura critica necessitava ser muito grande.

⁶ De fato, isto foi observado já na seção 2.6

Encerra-se esta argumentação afirmando que para descrever uma transição de fase com o modelo, será necessário tomar $m^2 < 0$. Uma vez adotado isto, surge uma restrição sobre o campo magnético associada à necessidade de $\tilde{\mathcal{K}}$ convergir sem oscilações ao tomar o limite de temperaturas baixas. Além disso, considerando a prescrição de renormalização no ponto instável, surge também a restrição sobre o potencial químico.

4.2.2 Reescrita: Parâmetros dimensionais

Escolhe-se aqui permanecer com a renormalização no ponto instável, visto que nos retorna a mesma expressão que a renormalização por supressão e apresenta a vantagem de m^2 não ser um parâmetro arbitrário completamente desconhecido. É possível definir os novos parâmetros dimensionais,

$$\tau = \frac{1}{|m|\beta}, \quad \chi = \frac{1}{|m|L}, \quad \delta = \frac{\omega}{|m^2|}, \quad \gamma = \frac{|\mu|}{|m|}. \quad (4.47)$$

Assim a relação (4.43) é reescrita como

$$\frac{M^2}{|m|^2}(\tau, \chi, \gamma, \delta) = -1 + \lambda \delta \mathcal{K}(\tau, \chi, \gamma, \delta), \quad (4.48)$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\tau, \chi, \gamma, \delta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \left\{ \sum_{n_1=1}^{\infty} \cosh\left(n_1 \frac{\gamma}{\tau}\right) K_0\left(\frac{n_1}{\tau} c_\ell(\delta)\right) + \sum_{n_2=1}^{\infty} K_0\left(\frac{n_2}{\chi} c_\ell(\delta)\right) \right. \\ \left. + 2 \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \cosh\left(n_1 \frac{\gamma}{\tau}\right) K_0\left(c_\ell(\delta) \sqrt{\frac{n_1^2}{\tau^2} + \frac{n_2^2}{\chi^2}}\right) \right\}, \quad (4.49) \end{aligned}$$

e, por simplificação, foi definido que

$$c_\ell^2(\delta) = \sqrt{-1 + (2\ell + 1)\delta}. \quad (4.50)$$

Nesta forma adimensional, as restrições do modelo se tornam

$$\delta > 1, \quad \gamma < \sqrt{-1 + \delta}. \quad (4.51)$$

Analisando a evolução do quadrado de massa com a temperatura, exposta na 4.1, fica evidente que o aumento de χ leva a uma diminuição da temperatura crítica. Em especial, para χ alto não existe mais a presença de transição de fase, como será visto adiante.

Foi escolhido deixar evidente a temperatura crítica do sistema com $\chi = 0$, adicionando uma marcação na fig. 4.1. A temperatura crítica é, neste caso, $\tau_c = 6,48$ para truncamento da série realizado em 100 termos. Outro aspecto interessante é o fato de as curvas se mostrarem bem próximas de uma linha, o que parece levar a uma identificação com Ginzburg-Landau.

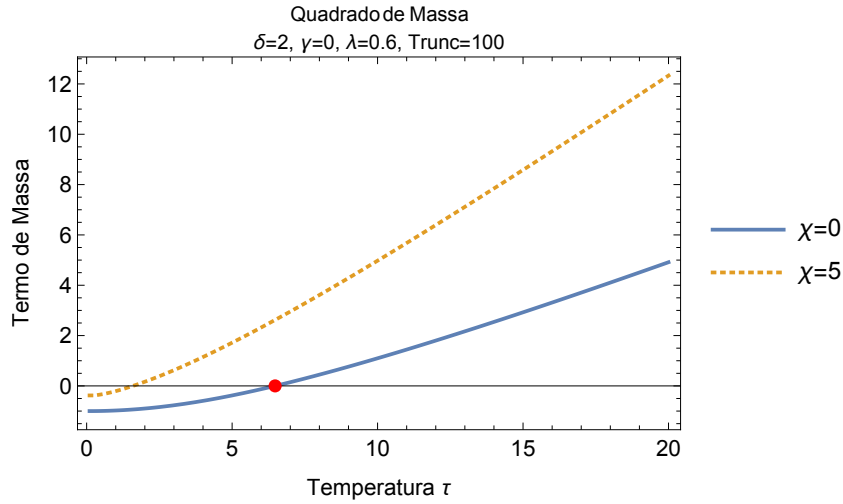


Figura 4.1: Quadrado de massa em função da temperatura. Observa-se aqui o efeito de modificar o inverso de comprimento χ . O ponto marcado é a temperatura crítica em $\chi = 0$, a saber, $\tau_c = 6,48$.

Um comentário sobre o parâmetro de campo magnético δ : ele precisa ser não somente maior do que 1 mas suficientemente maior. Isto é consequência da divergência introduzida pelo nível zero de Landau,

$$K_0 \left(\frac{n}{\tau} c_0(\delta) \right) = K_0 \left(\frac{n}{\tau} \sqrt{\delta - 1} \right) = -\gamma_E - \log \left(\frac{n\sqrt{\delta - 1}}{2\tau} \right) + \mathcal{O}(\delta - 1), \quad (4.52)$$

na qual γ_E denota a constante de Euler-Mascheroni, que não deve ser confundida com o potencial químico γ . O fato de que é necessário ter cuidado com a escolha de δ é evidenciado pela divergência logarítmica, valores de δ um pouco maiores que 1 ainda são suficientes para causar grandes estragos. Ao longo do trabalho utilizou-se o critério de bom comportamento, de modo a selecionar um valor de δ suficientemente longe da divergência.

4.3 Sistema no *bulk*

Nesta seção será considerado o *bulk*, situação em que $L \rightarrow \infty$. Isso reduz a dificuldade do problema, e permitirá que a curva seja comparada com o modelo de Ginzburg-Landau⁷. Utilizando a relação (4.48) e a definição (4.49) da função $\mathcal{K}$ obtém-se

$$\frac{M^2}{|m|^2}(\tau, \gamma, \delta) = -1 + \frac{\lambda\delta}{(2\pi)^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cosh \left(n \frac{\gamma}{\tau} \right) K_0 \left(\frac{n}{\tau} c_{\ell}(\delta) \right). \quad (4.53)$$

Já foi exibido na figura 4.1 o comportamento do quadrado de massa no *bulk*: ele é representado pela curva $\chi = 0$. O sistema sofre uma transição de fase em uma temperatura

⁷ Cuidado: o modelo pode concordar com Ginzburg-Landau no sentido de que GL é uma primeira aproximação para toda transição de segunda ordem. Isso não significa que a interpretação física do modelo aqui presente seja exatamente a interpretação obtida por Landau.

$\tau_c = 6,48$ evidenciada pela troca de sinal do quadrado de massa. Quando a temperatura se aproxima de zero, o termo de massa converge suavemente a um valor bem definido, $M^2 = -1$, que é o quadrado de massa adimensional do sistema, segundo o ponto de vista do vácuo instável.

Na figura 4.2a, é exibida a curva de dependência da temperatura crítica com o campo magnético para diferentes valores do potencial químico. É encontrado que o aumento do potencial químico reduz a temperatura crítica. A diminuição do campo magnético amplia a diferença entre curvas de potenciais químicos distintos. Além disto, o aumento do campo magnético aumenta a temperatura crítica quase linearmente (na região observada) sem remover a separação criada pelo potencial químico. Deve ser lembrada aqui a restrição de que o campo magnético precisa ser suficientemente grande e também de que os potenciais químicos permitidos são associados ao campo magnético. São exatamente estas restrições de validade que justificam a queda brusca das curvas quando se aproximam da região de campo magnético pequeno.

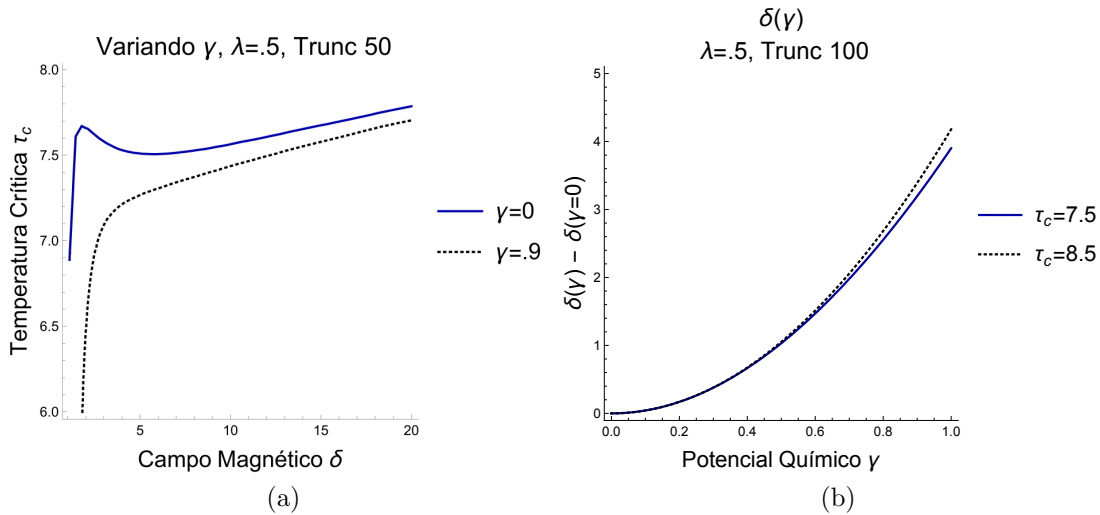


Figura 4.2: À esquerda, é exibida a temperatura crítica $\tau_c(\delta)$ para valores fixos de γ . À direita, são exibidas as isothermas $\delta(\gamma)$ para valores fixos de τ_c . Para poder exibir na mesma figura, é realizada uma regularização nestas curvas onde se subtrai: $\delta(\gamma = 0, \tau_c = 7,5) = 10,6$ e $\delta(\gamma = 0, \tau_c = 8,5) = 14,5$.

Fixando a temperatura crítica do sistema, é possível obter uma isoterma no plano $\gamma \times \delta$. Os valores de δ mudam drasticamente para pequenas modificações de τ_c , de modo que não é possível encaixar isothermas distintas no mesmo gráfico. Para ajustar isto, é realizada a regularização $\delta(\gamma) - \delta(\gamma = 0)$ de modo que todas as curvas iniciam em zero no ponto $\gamma = 0$ (veja a figura 4.2b). O comportamento é claramente uma lei de potência mostrando que ao aumentar o campo magnético é necessário aumentar o potencial químico para conseguir manter a mesma temperatura crítica. Para o caso representado, $\delta(\gamma = 0, \tau_c = 7,5) = 10,6$ e $\delta(\gamma = 0, \tau_c = 8,5) = 14,5$.

4.3.1 Ginzburg-Landau

É possível realizar uma reescrita da massa quadrada adimensional, dada na equação (4.53), evidenciando a temperatura crítica,

$$\frac{M^2}{|m|^2}(\tau, \gamma, \delta) = \frac{\lambda\delta}{(2\pi)^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cosh\left(n\frac{\gamma}{\tau}\right) K_0\left(\frac{n}{\tau}c_{\ell}(\delta)\right) - \frac{\lambda\delta}{(2\pi)^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cosh\left(n\frac{\gamma}{\tau_c}\right) K_0\left(\frac{n}{\tau_c}c_{\ell}(\delta)\right), \quad (4.54)$$

e então expandir o primeiro termo em torno da temperatura crítica, resultando em

$$\frac{M^2}{|m|^2}(\tau, \gamma, \delta) = (\tau - \tau_c)f_1(\tau_c, \gamma, \delta) + \frac{1}{2}(\tau - \tau_c)^2 f_2(\tau_c, \gamma, \delta), \quad (4.55)$$

sendo

$$f_1(\tau_c, \gamma, \delta) = \frac{\lambda\delta}{(2\pi)^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tau_c^2} \left\{ n\sqrt{\delta + 2\delta\ell - 1} \cosh\left(\frac{\gamma n}{\tau_c}\right) K_1\left(\frac{n\sqrt{2\delta\ell + \delta - 1}}{\tau_c}\right) - \gamma n \sinh\left(\frac{\gamma n}{\tau_c}\right) K_0\left(\frac{n\sqrt{2\delta\ell + \delta - 1}}{\tau_c}\right) \right\} \quad (4.56)$$

e

$$f_2(\tau_c, \gamma, \delta) = \frac{\lambda\delta}{(2\pi)^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\tau_c^4} \left\{ K_0\left(\frac{n\sqrt{(2\ell+1)\delta - 1}}{\tau_c}\right) \left[2\gamma\tau_c \sinh\left(\frac{\gamma n}{\tau_c}\right) + n(\gamma^2 + (2\ell+1)\delta - 1) \cosh\left(\frac{\gamma n}{\tau_c}\right) \right] - \sqrt{(2\ell+1)\delta - 1} K_1\left(\frac{n\sqrt{(2\ell+1)\delta - 1}}{\tau_c}\right) \left(2\gamma n \sinh\left(\frac{\gamma n}{\tau_c}\right) + \tau_c \cosh\left(\frac{\gamma n}{\tau_c}\right) \right) \right\}. \quad (4.57)$$

Reescrevendo a eq. (4.55) como

$$\frac{M^2}{|m|^2}(\tau, \gamma, \delta) = (\tau - \tau_c)f_1 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{f_2}{f_1}(\tau - \tau_c) \right], \quad (4.58)$$

fica mais evidente como determinar a região de validade de GL. Claramente, o segundo termo precisa ser muito pequeno,

$$\left| \frac{1}{2} \frac{f_2}{f_1}(\tau - \tau_c) \right| \ll 1; \quad (4.59)$$

portanto,

$$|\tau - \tau_c| \ll 2 \left| \frac{f_1}{f_2} \right|. \quad (4.60)$$

Evidentemente, esta relação independe de λ , mostrando que a validade da aproximação de GL independe da constante de acoplamento escolhida. Na figura 4.3, é exibido que a validade da aproximação de Ginzburg-Landau aumenta para temperaturas críticas grandes. Além disso, é notado que a diminuição do campo magnético colabora com o aumento de validade da aproximação. O potencial químico gera modificações ínfimas e não foi representado.

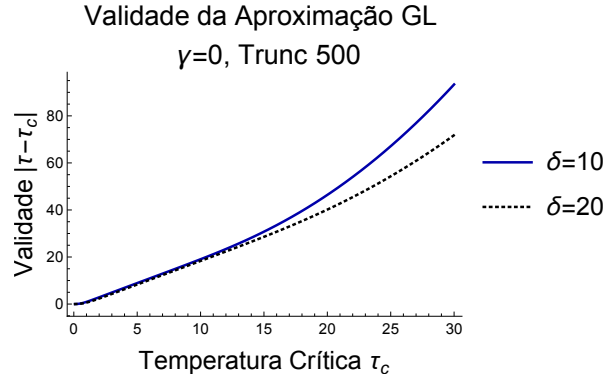


Figura 4.3: Validade da aproximação de Ginzburg-Landau para diferentes valores do campo magnético.

4.4 Investigando a Criticalidade

Retornando ao caso completo, pode-se investigar região de criticalidade, onde $M^2 = 0$. Isto permitirá definir uma temperatura crítica τ_c em termos dos outros parâmetros da teoria. Utilizando as equações (4.48) e (4.49) e se restringindo à criticalidade, encontra-se que o problema a ser resolvido é:

$$0 = -1 + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda \delta}{(2\pi)^2} \left\{ \sum_{n_1=1}^{\infty} \cosh \left(n_1 \frac{\gamma}{\tau_c} \right) K_0 \left(\frac{n_1}{\tau_c} c_{\ell}(\delta) \right) + \sum_{n_2=1}^{\infty} K_0 \left(\frac{n_2}{\chi} c_{\ell}(\delta) \right) + 2 \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \cosh \left(n_1 \frac{\gamma}{\tau_c} \right) K_0 \left(c_{\ell}(\delta) \sqrt{\frac{n_1^2}{\tau_c^2} + \frac{n_2^2}{\chi^2}} \right) \right\}. \quad (4.61)$$

Infelizmente, não é possível inverter exatamente esta função. Uma opção é realizar gráficos de contorno. Tomando o plano $\chi \times \tau$, serão fixados valores para δ , γ e λ . Na fig. 4.4a, observa-se a influência do potencial químico γ e, na fig. 4.4b, observa-se a influência do campo magnético δ . Um claro padrão presente nas curvas críticas de transição de fase é a presença de uma temperatura crítica e de um inverso de comprimento máximos. Além disto, as curvas são sempre contínuas e suaves. Claramente, a função $\tau_c(\chi)$ é monotonicamente decrescente em χ . Isto apenas deixa claro que o sistema está apresentando somente uma transição de fase: não existem duas temperaturas críticas diferentes para a mesma escolha de comprimento de compactificação.

A influência do potencial químico pode ser extraída da fig. 4.4a. Para um filme de espessura considerável (*bulk*, $\chi = 0$) modificar o potencial químico gera modificações na temperatura crítica da transição. Porém, esta mesma modificação interna do sistema não gera nenhuma alteração da espessura mínima ($1/\chi_{\text{máx}}$) para a qual ainda existe transição. Além disto, a presença do potencial químico mostra uma clara quebra de simetria da figura, que, quando $\gamma = 0$, não é alterada por uma mudança do tipo $\tau_c \leftrightarrow \chi$. Todas estas observações podem ser extraídas diretamente da relação (4.61). A simetria $\tau_c \leftrightarrow \chi$ está explícita e fica claro que, no limite $\tau \rightarrow 0$, o parâmetro γ não influencia no

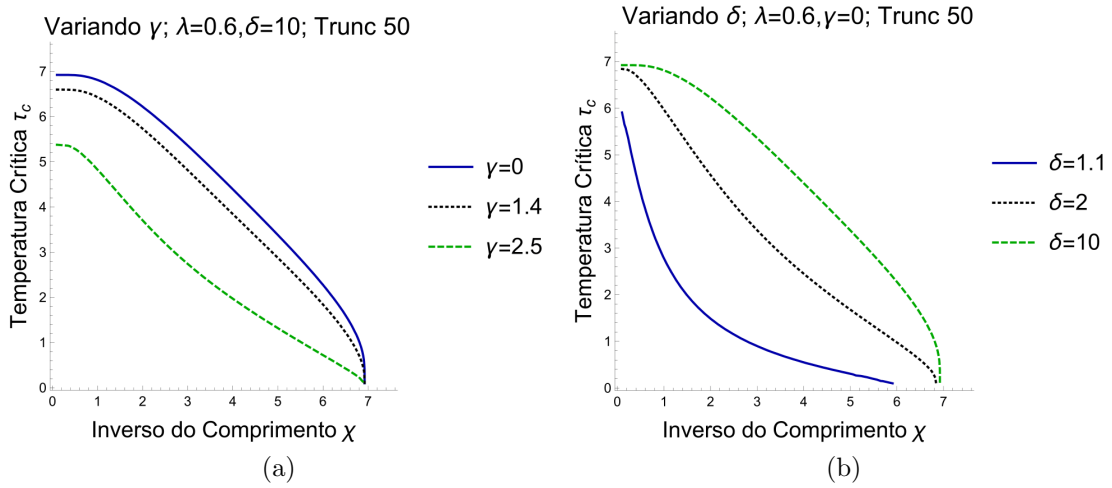


Figura 4.4: À esquerda, curva da temperatura crítica no plano $\chi \times \tau$, tomada variando o potencial químico γ . À direita, varia-se o campo magnético δ . Truncamento dos somatórios tomado em 50 termos.

comprimento. Este fato sugere que, para conhecer bem o inverso de comprimento máximo - ou comprimento mínimo da teoria - pode-se trabalhar com uma simplificação da eq. (4.61) para $\tau_c = 0$, o que aniquila a importância de γ . Isto está explorado na seção 4.5.

O campo magnético influencia a curva de coexistência no plano $\chi \times \tau_c$ modificando a forma da curva e o valor máximo que pode ser atingido, ver fig. 4.4b. A curva apresenta concavidade para cima quando o campo magnético está próximo do limite de validade ($\delta = 1.1$), o aumento do campo magnético modifica a concavidade da curva e aumenta a temperatura crítica máxima acessível ao sistema. A curva com $\delta = 2$ é quase linear, se encontra próximo da “transição” para as curvas de concavidade para baixo, como a representada por $\delta = 10$. Outro comportamento interessante é o modo como o sistema se aproxima do *bulk* e da espessura mínima. O aumento do campo magnético gera a presença de uma região de temperatura crítica constante, ao se aproximar do *bulk*, e uma região de comprimento próximo ao mínimo, ao se aproximar da temperatura crítica nula. A região de temperatura crítica constante revela que o filme chega na situação do *bulk* antes de tomar o limite $L \rightarrow \infty$. E, além disto, mostra que quanto maior o campo magnético menor a espessura necessária para o filme estar no *bulk*. Quanto ao comprimento mínimo temos algo análogo, na presença de campo magnético o sistema fica muito próximo do comprimento mínimo antes da temperatura crítica zerar. E, novamente, para campos magnéticos intensos a temperatura crítica para a qual o comprimento mínimo é atingido se torna cada vez maior.

4.5 Comprimento Mínimo

Como citado anteriormente, para explorar o comprimento mínimo da teoria $L_{\min} = 1/\chi_{\max}$, será tomado o limite $\tau_c = 0$ na equação (4.61), o que gera

$$\frac{\lambda\delta}{(2\pi)^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} K_0 \left(nL_{\min} \sqrt{-1 + (2\ell + 1)\delta} \right) = 1. \quad (4.62)$$

Seria interessante obter a partir desta relação uma função $L_{\min}(\delta, \lambda)$. A abordagem analítica, porém, não tem se mostrado possível. Entretanto, pode-se realizar uma investigação numérica e estimar uma função $L_{\min}(\delta, \lambda)$.

A restrição sobre o campo δ o limita inferiormente. A investigação numérica mostra que tomar δ próximo de seu limite gera complicações. Isto está associado a K_0 apresentar uma divergência logarítmica na origem e tomar $\delta \approx 1$ leva diretamente a esta divergência no nível zero de Landau, como discutido na seção 4.2.2. Foi realizada a escolha arbitrária de se tomar $\delta \geq 1.5$, o que garante bom comportamento devido ao afastamento em relação à divergência.

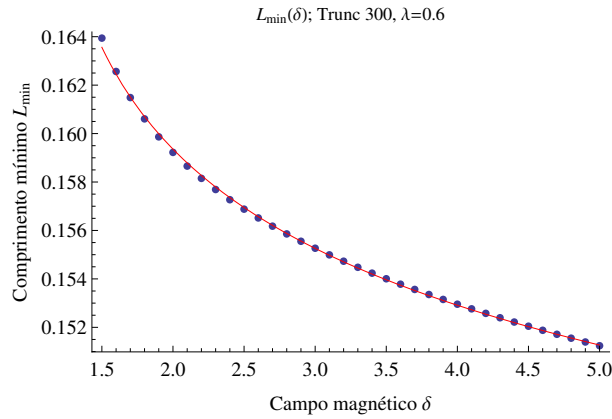


Figura 4.5: Dependência do comprimento mínimo com o campo magnético para $\lambda = 0,6$. Foi tomado truncamento da série 300 termos. A curva ajustada é $0,1594(\delta - 1)^{-0,0376}$.

Uma análise numérica de convergência da série indica que truncar os somatórios em 300 termos já é suficiente para uma boa estabilidade do resultado. Primeiro, é investigada a dependência do tamanho mínimo com o campo magnético. Obtém-se numericamente uma tabela de dados do comprimento mínimo para escolhas de campo magnético de $\delta = 1,5$ a $\delta = 5,0$, tendo sido fixada a constante de acoplamento em $\lambda = 0,6$. Os pontos obtidos numericamente indicam um comportamento similar a $A(\delta - 1)^B$, o que motiva a realização de um ajuste não-linear. Na figura 4.5, é exibida a lista de pontos e a curva de ajuste,

$$L_{\min} = 0,1594(\delta - 1)^{-0,0376}. \quad (4.63)$$

Os resíduos não passam de 2×10^{-4} , indicando um bom ajuste. Este resultado revela que a espessura mínima acessível ao filme para que continue ocorrendo transição de fase se torna cada vez menor ao aumentar o campo magnético aplicado.

Uma investigação seguinte consiste em determinar a dependência com a constante de acoplamento. Para tal, é realizado o ajuste da curva $A(\delta - 1)^B$ para várias escolhas da constante de acoplamento, intencionando montar relações $A(\lambda)$ e $B(\lambda)$. É explorada a região $0,6 \leq \lambda \leq 2,0$ e encontrado, como um bom ajuste,

$$A(\lambda) = 0,2145\lambda^{0,4865} - 0,0079, \quad (4.64)$$

$$C(\lambda) = 0,1382\lambda^{0,191} - 0,0876. \quad (4.65)$$

Unificando os ajustes realizados, encontra-se uma expressão numérica aproximada para o comprimento mínimo do sistema,

$$L_{\text{mín}} = (0,2145\lambda^{0,4865} - 0,0079)(\delta - 1)^{-0,1382\lambda^{0,191} + 0,0876}. \quad (4.66)$$

Este resultado é uma estimativa de inversão da relação (4.62) através da abordagem numérica. É interessante notar que a dependência com a constante de acoplamento é próxima do encontrado analiticamente no caso sem campo magnético, veja a seção 3.5.3, em que $L_{\text{mín}} \propto \sqrt{\lambda}$. A principal novidade aqui é a percepção de que é possível atingir comprimentos mínimos $L_{\text{mín}}$ cada vez menores ao aumentar o campo magnético δ aplicado ao sistema.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Intensifica-se com este trabalho a importância do formalismo de teoria quântica de campos em espaços toroidais desenvolvido por Malbouisson et al [10]. Em primeira instância, o formalismo se mostra como uma extensão natural ao estudo de teoria quântica de campos a temperatura finita. Originalmente restrito a casos limites, como baixíssimas e altíssimas temperaturas, o estudo de temperatura finita é estendido a toda a faixa de temperatura através do estudo da função zeta de Epstein-Hurwitz. Além deste grande passo, o formalismo permite ainda abordar a situação de dimensões espaciais compactificadas, levando os métodos de teoria de campos para problemas como a transição de fase sistemas de tamanho finito como filmes, fios e grãos.

Convencionalmente, o formalismo de espaços toroidais tem sido utilizado em conjunto com o procedimento de Coleman-Weinberg ou o formalismo 2PI com aproximação de Hartree-Fock para obtenção do potencial efetivo da teoria e extração de suas informações. Aqui, entretanto, foi escolhido utilizar a técnica de Lee-Sciaccaluga que permitiu um avanço generalizador. Agora, dada uma teoria escalar com potencial clássico que possa ser expandido em uma série de potências, é direta a obtenção do potencial efetivo a 1 *loop* para a teoria em espaços toroidais. Somando a isto o fato de que se trabalha sempre com teorias efetivas, nas quais a questão da renormalizabilidade não é tão importante, surge a possibilidade de estudar uma miríade de situações novas. Nesta dissertação, focou-se no estudo do já conhecido potencial ϕ^4 , muito importante para estudo das transições de fase de segunda ordem. Uma exploração futura abarcará outras possibilidades.

Ficou em aberto neste trabalho a questão de se determinar qual o procedimento ideal para renormalizar a teoria em espaços toroidais. Por ideal, fala-se daquele que reúna o máximo de aspectos positivos e faça a teoria *convergir* mais velocemente. Cada formalismo apresentado mostrou vantagens e desvantagens próprias. No desenvolver do texto foram utilizadas a subtração mínima modificada, a supressão de infinitos e a definição de condições de renormalização no vácuo instável.

Como o modelo de estudo foi o ϕ^4 , cuja transição de fase pode ser facilmente mapeada a partir do conhecimento do parâmetro de massa, foi analisada diretamente a evolução deste parâmetro. A transição de fase ocorre quando $m^2 = 0$, situação que permite obter

a curva crítica de transição de fase, na qual é observada a variação da temperatura crítica com o tamanho do sistema.

Analisando primeiramente o caso sem campo magnético externo, encontrou-se que a temperatura crítica do sistema no *bulk* – situação em que não existe presença de compactações espaciais, todas as dimensões são ilimitadas – é diretamente proporcional a $\lambda^{-0.5}$, mostrando, assim, que o limite de altas temperaturas é associado à situação de acoplamentos fracos. O modelo de subtração mínima modificada só permitiu estudo de sistemas com acoplamentos grandes, de modo que seus resultados foram para baixas temperatura críticas. O modelo de supressão de infinitos, sem a presença de campo magnético, apresentou o inconveniente de termos imaginários que impedem o estudo da situação de temperaturas críticas baixas. Como argumentado anteriormente, estes termos imaginários são mero *defeito* do procedimento de renormalização e são eliminados caso sejam considerados mais diagramas de ordem superior. De fato, utilizando a supressão de infinitos no modelo com soma de diagramas tipo *daisy* os argumentos complexos nas funções de Bessel não ocorrem e é possível observar qualquer faixa de temperatura. O modelo com subtração mínima modificada também trouxe a indicação de que os argumentos imaginários não são uma característica fixa da teoria. No caso com campo magnético, é possível utilizar a supressão de infinitos mesmo em um *loop*, já que valores suficientemente grandes do campo magnético garantem a realidade da teoria.

A partir do momento em que foi realizada ao menos uma compactificação espacial, foi possível obter uma curva da dependência da temperatura crítica com o tamanho de sistema, denominada aqui de curva crítica. Como característica geral, foi percebido sempre que a curva é suave e monotônica. A monotonicidade garante que sempre ocorre somente uma transição de fase ao variar a temperatura ou tamanho do sistema. Outra característica constante destas curvas é que a temperatura crítica máxima é obtida para o inverso de tamanho mínimo, e vice-versa.

A existência de um máximo para o inverso de tamanho do sistema significa a presença de um mínimo. O tamanho mínimo para o sistema é o menor valor possível para que ainda exista uma transição de fase. Abaixo deste valor, o sistema físico perde a possibilidade de apresentar transição de fase. Foi obtido que o tamanho mínimo do sistema depende do número de compactificações realizadas. E, mais forte do que isto, que o tamanho mínimo acessível aumenta ao adicionar mais compactificações. Este resultado foi visualizado dentro do formalismo de subtração mínima modificada e uma expressão analítica foi obtida através do formalismo de supressão de infinitos ao tomar a soma de diagramas *daisy*. Este resultado não pôde ser reanalisado no contexto com campo magnético, pois o formalismo utilizado permitiu realizar apenas uma compactificação espacial. Foi introduzido, porém, neste contexto uma expressão aproximada da dependência do comprimento mínimo do sistema com o campo magnético. A expressão, introduzida numericamente, é do tipo lei de potência, $L_{\min} \propto (\delta - 1)^\alpha$, sendo o valor α encontrado dependente da constante de

acoplamento. Revela que o comprimento mínimo do sistema pode se aproximar de zero para campos magnéticos intensos caso $\alpha < 0$.

Uma outra análise realizada ocorreu ao se introduzir potencial químico. Isto só foi possível em dois casos: no formalismo de subtração mínima modificada e na situação com campo magnético. Em ambos os casos, é percebido que a presença de potencial químico modifica a temperatura crítica do sistema no *bulk*, mas não gera nenhuma alteração com respeito ao comprimento mínimo do sistema. Efetivamente, o gráfico das curvas críticas sofre uma separação induzida pelo potencial químico.

O efeito do campo magnético nas curvas de temperatura crítica modifica sua forma, resultado que se assemelha à mudança da dimensionalidade do sistema na situação sem campo magnético. Ao modificar a dimensionalidade (modelo sem campo magnético) o valor máximo da temperatura crítica diminui, enquanto que o aumento do campo magnético (modelo com dimensão fixa) aumenta o valor do máximo da temperatura crítica.

Várias explorações ainda podem ser feitas. No sentido de estender o formalismo, podem ser computadas ordens superiores de diagramas e explorar o terreno de vários campos escalares. No sentido de generalizar ainda mais o formalismo, pode ser realizado um estudo do grupo de renormalização e uma investigação da prescrição ideal a ser utilizada. Em relação à aplicação no estudo de transições de fase, outros potenciais podem ser explorados. Há também a possibilidade de se considerar diretamente o potencial efetivo ou o parâmetro de ordem para encontrar transições de fase, situação não abordada neste trabalho por ter sido mais prático - aqui - observar diretamente o parâmetro de massa. Com respeito à introdução do campo magnético uniforme, é necessário realizar uma investigação maior e obter um modo eficiente de computar correções de ordem superior. Pode-se investir, por exemplo, na exploração de um potencial efetivo sem a invariância translacional ou, caso esta tarefa não se mostre possível, estudar a questão diretamente pela ação efetiva.

APÊNDICES

APÊNDICE A

REGULARIZAÇÃO DIMENSIONAL

Neste material é utilizada a regularização dimensional introduzida nos trabalhos [47, 48], duas das várias referências sobre o assunto são McComb [49, p. 10.3.3] e Ryder [19, Cap 9]. Neste apêndice, expõe-se a resolução de integrais através deste procedimento. Outros métodos de regularização são aplicados na literatura, boas referências são Le'Bellac [1, sec 6.1.3] e Zinn-Justin [3, Cap 9].

Outras técnicas são necessárias para poder resolver integrais de loops superiores. Entre elas a identidade de Feynman, que permite condensar vários propagadores, e é exibida mais à frente.

Ao trabalhar no euclidiano obtêm-se integrais do tipo

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q^2 + m_0^2)^n}.$$

Para resolvê-la, aproveita-se a simetria do problema e utiliza-se de coordenadas hiperesféricas

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q^2 + m_0^2)^n} &= \int \frac{d\Omega_D}{(2\pi)^D} \int_0^\infty q^{D-1} dq \frac{1}{(q^2 + m_0^2)^n} \\ &= \frac{\Omega_D}{(2\pi)^D} \int_0^\infty q^{D-1} dq \frac{1}{(q^2 + m_0^2)^n}. \end{aligned}$$

Sabendo que $\Omega_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}$ e realizando a substituição de variáveis $q^D = k$ então $Dq^{D-1}dq = dk$.

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q^2 + m_0^2)^n} &= \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)(2\pi)^D D} \int_0^\infty \frac{dk}{(m_0^2 + k^{2/D})^n} \\ &= \frac{1}{2^D \pi^{D/2} \Gamma(D/2 + 1)} \int_0^\infty \frac{dk}{(m_0^2 + k^{2/D})^n}. \end{aligned}$$

Essa é a integral 3.241 (4) da referência [32], e é calculada explicitamente na referência [20, Cap 7],

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1} dx}{(p + qx^\nu)^{n+1}} = \frac{1}{\nu p^{n+1}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\mu/\nu} \frac{\Gamma(\mu/\nu) \Gamma(1 + n - \mu/\nu)}{\Gamma(1 + n)}.$$

Realizando as substituições $x \rightarrow k$, $\mu \rightarrow 1$, $p \rightarrow m_0^2$, $q \rightarrow 1$, $\nu \rightarrow 2/D$, $n+1 \rightarrow n$ obtém-se que

$$\int_0^\infty \frac{dk}{(m_0^2 + k^{2/D})^n} = \frac{1}{(m_0^2)^{n-D/2}} \frac{\Gamma(D/2 + 1)\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)},$$

portanto,

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q^2 + m_0^2)^n} = \frac{1}{2^D \pi^{D/2}} \frac{1}{(m_0^2)^{n-D/2}} \frac{\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)}. \quad (\text{A.1})$$

O procedimento de regularização dimensional oculta em si uma renormalização. Isto é associado ao fato de que a equação (A.1) é exata somente para $D < 2n$. Utilizando a integral 3.194 (1) da ref [32] adaptada à situação presente,

$$\int_0^\Lambda \frac{dk}{(m_0^2 + k^{2/D})^n} = \frac{\Lambda}{(m_0^2)^n} {}_2F_1\left(n, \frac{D}{2}; 1 + \frac{D}{2}; -\frac{\Lambda^{2/D}}{m_0^2}\right).$$

Tomando o limite de $\Lambda \rightarrow \infty$ encontra-se que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dk}{(m_0^2 + k^{2/D})^n} &= (m_0^2)^{\frac{D}{2}-n} \frac{\Gamma(\frac{D}{2} + 1)\Gamma(n - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)} + \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{D-2n}{2} \rfloor} (-1)^\ell (m_0^2)^\ell \frac{(n+\ell)!}{n!\ell!} \times \\ &\quad \times \frac{D}{D-2(n+\ell)} \Lambda^{\frac{D-2(n+\ell)}{D}}. \end{aligned}$$

Ou seja, além do termo padrão válido somente para $D < 2n$, existe um termo divergente. O procedimento padrão é simplesmente remover esta divergência por subtração. Isto está implícito na realização da regularização dimensional. Um dos poucos textos que abordam esta questão na literatura é o de Zinn-Justin [3, sec 9.6].

A.1 Analisando Singularidades

Obtida a resposta para D arbitrário, faz-se necessário restringir-se à dimensão desejada e analisar quais as singularidades presentes. O modo habitual de fazer isto é realizando uma aproximação gradual. Por exemplo, caso exista interessados no caso em que $D = 7$ toma-se inicialmente $D = 7 - \varepsilon$ e observa-se o comportamento de $\varepsilon \rightarrow 0$; ressaltando que deve-se tomar cuidado para não desprezar indevidamente algum termo. Neste procedimento duas identificações são essenciais:

$$B^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon \ln B + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (\text{A.2a})$$

$$\Gamma(-\nu + \varepsilon) \approx \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \psi_1(\nu + 1) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right], \quad (\text{A.2b})$$

sendo

$$\psi_1(\nu + 1) = -\gamma_E + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\nu}, \quad \psi_1(1) = -\gamma_E,$$

$$\gamma_E = 0.577\,215\,664\,9 \quad (\text{constante de Euler-Mascheroni}).$$

A primeira relação é simplesmente uma expansão em séries de Taylor para ε pequeno (lembrar de fazer $B^\varepsilon = e^{\varepsilon \ln B}$ para deduzir). A segunda relação permite observar a estrutura de singularidade da Γ próximo às suas divergências (*inteiros negativos ou zero*). Mais informações sobre a função gama podem ser encontradas na referência [19, Apêndice 9B].

A.2 Parâmetros de Feynman

Algo muito útil é poder reduzir integrais com produtos no denominador a uma forma onde se possa aplicar diretamente (A.1). Será utilizada a identificação

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[a + (b-a)z]^2} \quad (\text{A.3})$$

que pode ser rapidamente demonstrada:

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{dx}{x^2}.$$

Fazendo $x = a + (b-a)z$ tem-se $dx = (b-a)dz$ e troca-se os limites de $x \in (a, b)$ para $z \in (0, 1)$. Este tipo relação pode ser útil em algumas situações para calcular diagramas mais complicados.

Um modo mais geral de escrever a parametrização de Feynman pode ser encontrado na ref. [27, pg. 157],

$$\frac{1}{D_1^{a_1} \dots D_k^{a_k}} = \frac{\Gamma[a_1 + \dots + a_k]}{\Gamma[a_1] \dots \Gamma[a_k]} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_k \frac{x_1^{a_1-1} \dots x_k^{a_k-1}}{(D_1 x_1 + \dots + D_k x_k)^{a_1 + \dots + a_k}} \delta(1 - x_1 - \dots - x_k). \quad (\text{A.4})$$

APÊNDICE B

FUNÇÃO ZETA DE EPSTEIN-HURWITZ

Este apêndice é dedicado ao estudo da função zeta de Epstein-Hurwitz que surge naturalmente após realizar as integrais de regularização dimensional. Todo o procedimento desta seção é baseado na referência [9]. A definição da função zeta pode ser encontrada em Elizalde [50, seção 3.6 pág 41]

$$E_d^{m^2}(s; a_i | b_i) = \sum_{n_1, \dots, n_d = -\infty}^{+\infty} \left[m^2 + \sum_{i=1}^d (n_i - ib_i)^2 a_i \right]^{-s} \quad (\text{B.1})$$

A seguinte identificação da função gama,

$$Q^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-tQ}, \quad (\text{B.2})$$

será utilizada de modo a permitir a reescrita

$$\begin{aligned} E_d^{m^2}(s; a_i | b_i) &= \sum_{n_1, \dots, n_d = -\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-t[m^2 + \sum_{i=1}^d (n_i - ib_i)^2 a_i]} \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-tm^2} \sum_{n_1, \dots, n_d = -\infty}^{+\infty} e^{-t \sum_{i=1}^d (n_i - ib_i)^2 a_i}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Explicitando o somatório,

$$\sum_{n_1, \dots, n_d = -\infty}^{+\infty} e^{-t \sum_{i=1}^d (n_i - ib_i)^2 a_i} = \sum_{n_1 = -\infty}^{+\infty} \dots \sum_{n_d = -\infty}^{+\infty} e^{-t(n_1 - ib_1)^2 a_1} \dots e^{-t(n_d - ib_d)^2 a_d}, \quad (\text{B.4})$$

note que alguns somatórios podem transitar (isto é, o k -ésimo somatório pode transitar por todas exponenciais que não dependam de n_k), de modo que a expressão pode ser reescrita como

$$\sum_{n_1, \dots, n_d = -\infty}^{+\infty} e^{-t \sum_{i=1}^d (n_i - ib_i)^2 a_i} = \left[\sum_{n_1 = -\infty}^{+\infty} e^{-t(n_1 - ib_1)^2 a_1} \right] \dots \left[\sum_{n_d = -\infty}^{+\infty} e^{-t(n_d - ib_d)^2 a_d} \right] \quad (\text{B.5})$$

Utiliza-se, para cada um dos termos entre colchetes, a igualdade exposta na referência [51, pag 476]

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{n^2\pi i\tau+2niz} \equiv \sqrt{\frac{1}{-i\tau}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{(z-n\pi)^2}{\pi i\tau}}, \quad (\text{B.6})$$

tomando as identificações $\pi i\tau = -at$ e $z = tba$ para adaptar a notação à presente aqui. Deste modo,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-t(n-ib)^2a} &= e^{tb^2a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-tn^2a+2intba} \equiv e^{tb^2a} \sqrt{\frac{\pi}{at}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{(tba-n\pi)^2}{-at}} \\ &= e^{tb^2a} \sqrt{\frac{\pi}{at}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-atb^2} e^{2\pi nb} e^{-\frac{n^2\pi^2}{at}} = \sqrt{\frac{\pi}{at}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi nb} e^{-\frac{n^2\pi^2}{at}}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Utilizando a expressão anterior e recombinaando os somatórios, obtém-se

$$\begin{aligned} \sum_{n_1, \dots, n_d=-\infty}^{+\infty} e^{-t \sum_{i=1}^d (n_i - ib_i)^2 a_i} &= \left[\sqrt{\frac{\pi}{a_1 t}} \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi n_1 b_1} e^{-\frac{n_1^2 \pi^2}{a_1 t}} \right] \dots \left[\sqrt{\frac{\pi}{a_d t}} \sum_{n_d=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi n_d b_d} e^{-\frac{n_d^2 \pi^2}{a_d t}} \right] \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a_1 t}} \dots \sqrt{\frac{\pi}{a_d t}} \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{n_d=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi n_1 b_1 - \frac{n_1^2 \pi^2}{a_1 t}} \dots e^{2\pi n_d b_d - \frac{n_d^2 \pi^2}{a_d t}} \\ &= \frac{\pi^{d/2}}{t^{d/2}} \frac{1}{\sqrt{a_1 \dots a_d}} \sum_{n_1, \dots, n_d=-\infty}^{+\infty} e^{-\sum_{i=1}^d \frac{n_i^2 \pi^2}{a_i t}} e^{\sum_{i=1}^d 2\pi n_i b_i}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Portanto, a função zeta de Epstein-Hurwitz, após passar pelo tratamento com a identidade da função gama e da identificação obtida na referência [51], assume a forma

$$E_d^{m^2}(s; a_i | b_i) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt \frac{t^{s-1-d/2} e^{-tm^2}}{\sqrt{a_1 \dots a_d}} \sum_{n_1, \dots, n_d=-\infty}^{+\infty} e^{-\sum_{i=1}^d \frac{n_i^2 \pi^2}{a_i t}} e^{\sum_{i=1}^d 2\pi n_i b_i}. \quad (\text{B.9})$$

É possível realizar uma expansão em grupamentos para o somatório. A ideia da expansão é trocar a soma de menos infinito a mais infinito por uma soma de 1 a infinito. O caso de uma única soma é exposto abaixo.

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{at}} e^{2\pi nb} &= 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{at}} e^{2\pi nb} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{at}} e^{2\pi nb} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{at}} e^{-2\pi nb} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{at}} e^{2\pi nb} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{at}} (e^{-2\pi nb} + e^{2\pi nb}) \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{at}} \cosh(2\pi nb). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Nota-se a possibilidade de separar um setor de $n = 0$ e um setor com soma no intervalo $[1, \infty[$. A decomposição dos vários somatórios é realizada seguindo este ponto de vista.

O primeiro termo tem todos os $n_i = 0$. O segundo termo apresenta $d - 1$ dos d termos n_i iguais a zero e somente um diferente de zero. O terceiro terá $d - 2$ iguais a zero e dois diferentes, e assim segue,

$$\begin{aligned} \sum_{n_1, \dots, n_d = -\infty}^{+\infty} e^{-\sum_{i=1}^d \frac{n_i^2 \pi^2}{a_i t}} e^{\sum_{i=1}^d 2\pi n_i b_i} &= 1 + \sum_{i=1}^d 2 \sum_{n_i=1}^{\infty} e^{-\frac{n_i^2 \pi^2}{a_i t}} \cosh(2\pi n_i b_i) + \\ &+ \sum_{j>i=1}^d 2^2 \sum_{n_i, n_j=1}^{\infty} e^{-\frac{n_i^2 \pi^2}{a_i t}} e^{-\frac{n_j^2 \pi^2}{a_j t}} \cosh(2\pi n_i b_i) \cosh(2\pi n_j b_j) + \dots \\ &+ 2^d \sum_{n_1, \dots, n_d=1}^{\infty} e^{-\frac{n_1^2 \pi^2}{a_1 t}} \dots e^{-\frac{n_d^2 \pi^2}{a_d t}} \cosh(2\pi n_1 b_1) \dots \cosh(2\pi n_d b_d). \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Retornando à função zeta,

$$\begin{aligned} E_d^{m^2}(s; a_i | b_i) &= \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt \frac{t^{s-1-d/2} e^{-tm^2}}{\sqrt{a_1 \dots a_d}} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^d 2 \sum_{n_i=1}^{\infty} e^{-\frac{n_i^2 \pi^2}{a_i t}} \cosh(2\pi n_i b_i) + \right. \\ &+ \sum_{j>i=1}^d 2^2 \sum_{n_i, n_j=1}^{\infty} e^{-\frac{n_i^2 \pi^2}{a_i t}} e^{-\frac{n_j^2 \pi^2}{a_j t}} \cosh(2\pi n_i b_i) \cosh(2\pi n_j b_j) + \dots \\ &\left. + 2^d \sum_{n_1, \dots, n_d=1}^{\infty} e^{-\frac{n_1^2 \pi^2}{a_1 t}} \dots e^{-\frac{n_d^2 \pi^2}{a_d t}} \cosh(2\pi n_1 b_1) \dots \cosh(2\pi n_d b_d) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

pode-se notar agora a presença da função de Bessel modificada do 2º tipo,

$$\int_0^{\infty} dx x^{\nu-1} e^{-\frac{a}{x} - bx} = 2 \left(\frac{a}{b} \right)^{\nu/2} K_{\nu}(2\sqrt{ab}), \quad (\text{B.13})$$

que, para $a \rightarrow 0$, recupera a identidade da função gama exposta anteriormente:

$$\int_0^{\infty} dx x^{\nu-1} e^{-bx} = b^{-\nu} \Gamma(\nu). \quad (\text{B.14})$$

Organizando,

$$\begin{aligned} E_d^{m^2}(s; a_i | b_i) &= \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(s) \sqrt{a_1 \dots a_d}} \left\{ \int_0^{\infty} dt t^{s-1-d/2} e^{-tm^2} \right. \\ &+ 2 \sum_{i=1}^d \sum_{n_i=1}^{\infty} \cosh(2\pi n_i b_i) \int_0^{\infty} dt t^{s-1-d/2} e^{-tm^2} e^{-\frac{n_i^2 \pi^2}{a_i t}} \\ &+ 2^2 \sum_{j>i=1}^d \sum_{n_i, n_j=1}^{\infty} \cosh(2\pi n_i b_i) \cosh(2\pi n_j b_j) \int_0^{\infty} dt t^{s-1-d/2} e^{-tm^2} e^{-\frac{n_i^2 \pi^2}{a_i t}} e^{-\frac{n_j^2 \pi^2}{a_j t}} \\ &\left. + \dots + 2^d \sum_{n_1, \dots, n_d=1}^{\infty} \cosh(2\pi n_1 b_1) \dots \cosh(2\pi n_d b_d) \int_0^{\infty} dt t^{s-1-d/2} e^{-tm^2} e^{-\sum_{i=1}^d \frac{n_i^2 \pi^2}{a_i t}} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

e, por fim,

$$\begin{aligned}
E_d^{m^2}(s; a_i | b_i) = & \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(s) \sqrt{a_1 \dots a_d}} \left\{ (m^2)^{-s+d/2} \Gamma(s-d/2) \right. \\
& + 2 \sum_{i=1}^d \sum_{n_i=1}^{\infty} 2 \left(\frac{n_i^2 \pi^2}{a_i m^2} \right)^{\frac{s-d/2}{2}} \cosh(2\pi n_i b_i) K_{s-d/2} \left(2 \sqrt{\frac{m^2 n_i^2 \pi^2}{a_i}} \right) \\
& + 2^2 \sum_{j>i=1}^d \sum_{n_i, n_j=1}^{\infty} 2 \left(\frac{\frac{n_i^2 \pi^2}{a_i} + \frac{n_j^2 \pi^2}{a_j}}{m^2} \right)^{\frac{s-d/2}{2}} \cosh(2\pi n_i b_i) \cosh(2\pi n_j b_j) K_{s-d/2} \left(2m \sqrt{\frac{n_i^2 \pi^2}{a_i} + \frac{n_j^2 \pi^2}{a_j}} \right) \\
& + \dots + 2^d \sum_{n_1, \dots, n_d=1}^{\infty} 2 \left(\sum_{i=1}^d \frac{n_i^2 \pi^2}{m^2 a_i} \right)^{\frac{s-d/2}{2}} \left[\prod_{i=1}^d \cosh(2\pi n_i b_i) \right] K_{s-d/2} \left(2m \sqrt{\sum_{i=1}^d \frac{n_i^2 \pi^2}{a_i}} \right) \left. \right\}.
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Esta é a expressão geral, de modo que basta verificar qual o caso específico desejado e aplicá-la.

B.1 Caso especial

Nesta seção objetiva-se resolver o caso especial da função zeta

$$Z_s^{(d)} = \sum_{n_1, \dots, n_d=1}^{\infty} (n_1^2 + \dots + n_d^2)^{-s}. \tag{B.17}$$

Será utilizada a extensão analítica demonstrada inicialmente na referência [50]

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + \alpha^2)^{-s} = -\frac{1}{2\alpha^{2s}} + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s-1/2)}{2\Gamma(s)} \frac{1}{\alpha^{2s-1}} + \frac{2\pi^s}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{\alpha} \right)^{s-1/2} K_{s-1/2}(2\pi n \alpha). \tag{B.18}$$

Os casos de maior interesse para o trabalho são $d = 2$ e $d = 3$. Além disto, como no corpo do trabalho é feita a identificação $\nu = 1 - D/2$, o caso principal será $\nu = -1$.

Para $d = 1$, a função se reduz trivialmente à função zeta de Riemann,

$$Z_s^{(1)} = \zeta(s). \tag{B.19}$$

Na situação $d = 2$ obtém-se,

$$\begin{aligned}
\sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} (n_1^2 + n_2^2)^{-s} &= \sum_{n_2=1}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{2n_2^{2s}} + \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(s-1/2)}{2\Gamma(s)} \frac{1}{n_2^{2s-1}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2\pi^s}{\Gamma(s)} \sum_{n_1=1}^{\infty} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{s-1/2} K_{s-1/2}(2\pi n_1 n_2) \right\} \\
&= -\frac{1}{2}\zeta(2s) + \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(s-1/2)}{2\Gamma(s)} \zeta(2s-1) \\
&\quad + \frac{2\pi^s}{\Gamma(s)} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{s-1/2} K_{s-1/2}(2\pi n_1 n_2) \quad (B.20)
\end{aligned}$$

Divergências na função zeta de Riemann são encontradas para $s \leq 1$. Pode parecer que ocorreu uma perda de simetria neste processo. Afinal, o lado esquerdo é perfeitamente simétrico por troca $n_1 \leftrightarrow n_2$, enquanto que o lado direito não parece ser tão simétrico: mas na verdade é. A simetria ficou apenas um pouco escondida. Foi escolhido aqui manter a simetria escondida ao invés de evidenciá-la seguindo a soma simetrizadora da referência [52]. A vantagem que se ganha aqui é a clareza, visto que a soma simetrizadora exige que mais termos sejam tomados.

Na situação $d = 3$, faz-se necessária uma dupla aplicação da relação (B.18). Primeiro é feita a soma sob n_1 ,

$$\begin{aligned}
\sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{-s} &= \sum_{n_2, n_3=1}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{2(n_2^2 + n_3^2)^s} + \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(s-1/2)}{2\Gamma(s)} \frac{1}{(n_2^2 + n_3^2)^{s-\frac{1}{2}}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2\pi^s}{\Gamma(s)} \sum_{n_1=1}^{\infty} \left(\frac{n_1}{\sqrt{n_2^2 + n_3^2}}\right)^{s-1/2} K_{s-1/2}(2\pi n_1 \sqrt{n_2^2 + n_3^2}) \right\}.
\end{aligned}$$

Então, a soma sob n_2

$$\begin{aligned}
\sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{-s} &= \sum_{n_3=1}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2n_3^{2s}} + \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(s-1/2)}{2\Gamma(s)} \frac{1}{n_3^{2s-1}} \right] \right. \\
&\quad + \frac{2\pi^s}{\Gamma(s)} \sum_{n_2=1}^{\infty} \left(\frac{n_2}{n_3}\right)^{s-1/2} K_{s-1/2}(2\pi n_2 n_3) \Big] + \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(s-1/2)}{2\Gamma(s)} \left[-\frac{1}{2n_3^{2s-1}} \right. \\
&\quad + \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(s-1)}{2\Gamma(s-1/2)} \frac{1}{n_3^{2s-2}} + \frac{2\pi^{s-\frac{1}{2}}}{\Gamma(s-1/2)} \sum_{n_2=1}^{\infty} \left(\frac{n_2}{n_3}\right)^{s-1} K_{s-1}(2\pi n_2 n_3) \Big] \\
&\quad \left. + \frac{2\pi^s}{\Gamma(s)} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \left(\frac{n_1}{\sqrt{n_2^2 + n_3^2}}\right)^{s-1/2} K_{s-1/2} \left(2\pi n_1 \sqrt{n_2^2 + n_3^2} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

E por último a soma sob n_3 , que evidencia a presença da zeta de Riemann,

$$\begin{aligned} \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{-s} &= -\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \zeta(2s) + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s-1/2)}{2\Gamma(s)} \zeta(2s-1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\pi^s}{\Gamma(s)} \sum_{n_2, n_3=1}^{\infty} \left(\frac{n_2}{n_3} \right)^{s-1/2} K_{s-1/2}(2\pi n_2 n_3) \right] + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s-1/2)}{2\Gamma(s)} \left[-\frac{1}{2} \zeta(2s-1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s-1)}{2\Gamma(s-1/2)} \zeta(2s-2) + \frac{2\pi^{s-1/2}}{\Gamma(s-1/2)} \sum_{n_2, n_3=1}^{\infty} \left(\frac{n_2}{n_3} \right)^{s-1} K_{s-1}(2\pi n_2 n_3) \right] \\ &\quad + \frac{2\pi^s}{\Gamma(s)} \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} \left(\frac{n_1}{\sqrt{n_2^2 + n_3^2}} \right)^{s-1/2} K_{s-1/2} \left(2\pi n_1 \sqrt{n_2^2 + n_3^2} \right). \end{aligned}$$

Basta agora organizar completamente a expressão,

$$\begin{aligned} \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{-s} &= \frac{1}{4} \zeta(2s) - \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s-1/2)}{2\Gamma(s)} \zeta(2s-1) + \frac{\pi}{4} \frac{\Gamma(s-1)}{\Gamma(s)} \zeta(2s-2) \\ &\quad + \frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \sum_{n_2, n_3=1}^{\infty} \left(\frac{n_2}{n_3} \right)^{s-1} K_{s-1}(2\pi n_2 n_3) - \frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \sum_{n_2, n_3=1}^{\infty} \left(\frac{n_2}{n_3} \right)^{s-1/2} K_{s-1/2}(2\pi n_2 n_3) \\ &\quad + \frac{2\pi^s}{\Gamma(s)} \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} \left(\frac{n_1}{\sqrt{n_2^2 + n_3^2}} \right)^{s-1/2} K_{s-1/2} \left(2\pi n_1 \sqrt{n_2^2 + n_3^2} \right), \quad (\text{B.21}) \end{aligned}$$

que, por sua vez, apresenta divergências para $s \leq 3/2$.

Situação $s = 1$

Devido à utilidade, será mostrado o caso especial $s = 1$, onde será utilizada uma supressão de infinitos para remover as divergências presentes.

No caso $d = 2$ da equação (B.20) a única divergência presente em $s = 1$ é dada por $\zeta(2s-1)$. Removendo este termo,

$$\tilde{Z}_1^{(2)} = \mathcal{P} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} (n_1^2 + n_2^2)^{-1} = -\frac{1}{2} \zeta(2) + 2\pi \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{1/2} K_{1/2}(2\pi n_1 n_2), \quad (\text{B.22})$$

a notação $\mathcal{P} \sum$ está sendo utilizada para simbolizar que foram extraídas as divergências da soma, a notação $\tilde{Z}$ está sendo utilizada para definir uma nova função sem as partes divergentes. A parte restante tem solução numérica rapidamente convergente,

$$\tilde{Z}_1^{(2)} = \mathcal{P} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} (n_1^2 + n_2^2)^{-1} = -0,816584. \quad (\text{B.23})$$

Na situação $d = 3$ existe a presença da divergência $\zeta(2s - 1)$ e também de $\Gamma(s - 1)$. Ambas serão suprimidas; assim,

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_1^{(3)} = \mathcal{P} \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{-1} &= \frac{1}{4}\zeta(2) + \pi \sum_{n_2, n_3=1}^{\infty} K_0(2\pi n_2 n_3) \\ - \pi \sum_{n_2, n_3=1}^{\infty} \left(\frac{n_2}{n_3}\right)^{1/2} K_{1/2}(2\pi n_2 n_3) &+ 2\pi \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} \left(\frac{n_1}{\sqrt{n_2^2 + n_3^2}}\right)^{1/2} K_{1/2}\left(2\pi n_1 \sqrt{n_2^2 + n_3^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Novamente, os somatórios restantes são rapidamente convergentes,

$$\tilde{Z}_1^{(3)} = \mathcal{P} \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{-1} = 0,411489. \quad (\text{B.25})$$

Fica evidente que é necessária uma análise caso a caso. A situação $s = 3/2$, por exemplo, é exibida abaixo:

$$\tilde{Z}_{3/2}^{(2)} = 2,32698 \quad (\text{B.26})$$

$$\tilde{Z}_{3/2}^{(3)} = -1,34414. \quad (\text{B.27})$$

BIBLIOGRAFIA

1. LE BELLAC, M. *Quantum and statistical field theory* trad. por BARTON, G., 592 (Oxford University Press, New York, NY, 1991) (ver pp. [1](#), [6](#), [8](#), [10](#), [87](#)).
2. DAS, A. *Finite temperature field theory* 404 (World Scientific, Singapore, 1997) (ver pp. [1](#), [2](#), [21](#), [23](#)).
3. ZINN-JUSTIN, J. *Quantum field theory and critical phenomena* 4^a ed., 1054 (Clarendon Press, Oxford, 2002) (ver pp. [1](#), [8](#), [10](#), [20](#), [27](#), [87](#), [88](#)).
4. AMIT, D. J. *Field theory, the renormalization group, and critical phenomena* 2^a ed., 394 (World Scientific, Singapore, 1984) (ver pp. [1](#), [8](#), [10](#), [14](#), [15](#), [19](#), [32](#)).
5. BREZIN, E., LE GUILLOU, J. & ZINN-JUSTIN, J. em *Phase Transitions and Critical Phenomena* (eds. DOMB, C. & GREEN, M.) 125 (Academic Press, London, 1976) (ver pp. [1](#), [8](#), [10](#)).
6. ZINN-JUSTIN, J. *Phase Transitions and Renormalization Group* (Oxford University Press, New York, 2007) (ver pp. [1](#), [8](#)).
7. MATSUBARA, T. A new approach to quantum-statistical mechanics. *Progress of theoretical physics* **14**, 351–378 (1955) (ver pp. [1](#), [20](#)).
8. DOLAN, L & JACKIW, R. Symmetry behavior at finite temperature. *Physical Review D* **9**, 3320 (1974) (ver pp. [2](#), [40–42](#), [49](#), [71](#)).
9. MALBOUISSON, A., MALBOUISSON, J. & SANTANA, A. Spontaneous symmetry breaking in compactified $\lambda\phi^4$ theory. *Nuclear Physics B* **631**, 83 (2002) (ver pp. [2](#), [23](#), [28](#), [91](#)).
10. KHANNA, F., MALBOUISSON, A., MALBOUISSON, J. & SANTANA, A. Quantum field theory on toroidal topology: Algebraic structure and applications. *Physics Reports* **539**, 135–224 (2014) (ver pp. [2](#), [20–23](#), [27–29](#), [67](#), [81](#)).
11. COLEMAN, S. & WEINBERG, E. Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking. *Physical Review D* **7**, 1888 (1973) (ver pp. [2](#), [15](#)).
12. LEE, S. & SCIACCALUGA, A. Evaluation of higher-order effective potentials with dimensional regularization. *Nuclear Physics B* **96**, 435 (1975) (ver pp. [2](#), [16](#)).

13. SALINAS, S. R. A. *Introdução a física estatística* 2^a ed. (Editora da Universidade de São Paulo - EDUSP, São Paulo, SP, 2008) (ver pp. 5, 10).
14. LEMOS, N. A. *Mecânica Analítica* 386 (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2004) (ver p. 6).
15. LE BELLAC, M. *Thermal field theory* 256 (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1996) (ver pp. 8, 9, 20, 22, 26).
16. GREINER, W., NEISE, L. & STOCKER, H. *Thermodynamics and statistical mechanics* 463 (Springer-Verlag, New York, 1995) (ver p. 10).
17. GLIMM, J. & JAFFE, A. *Quantum physics: a functional integral point of view*. 2^a ed., 535 (Springer-Verlag, New York, 1987) (ver p. 13).
18. FEYNMAN, A. R. RICHARD P.; HIBBS. *Quantum mechanics and path integrals* 365 (McGraw-Hill, New York, 1965) (ver pp. 13, 20).
19. RYDER, L. H. *Quantum field theory* 2^a ed., 487 (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1996) (ver pp. 14, 19, 20, 87, 89).
20. PESKIN, M. E. & SCHROEDER, D. V. *An introduction to quantum field theory*. 842 (Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1995) (ver pp. 14, 20, 87).
21. DAS, A. *Field theory: a path integral approach* 2^a ed., 361 (World Scientific, Singapore, 2006) (ver pp. 14, 19, 20).
22. KHANNA, F. C., MALBOUISSON, A., MALBOUISSON, J. & SANTANA, A. *Thermal quantum field theory: algebraic aspects and applications* 461 (World Scientific, Singapore, 2009) (ver pp. 14, 19–22, 27, 28).
23. MIRANSKY, V. A. *Dynamical symmetry breaking in quantum field theories*. 533 (World Scientific, Singapore, 1993) (ver pp. 14, 16, 19).
24. JACKIW, R. Functional evaluation of the effective potential. *Physical Review D* **9**, 1686 (1974) (ver pp. 16, 28).
25. CORNWALL, J. M., JACKIW, R. & TOMBOULIS, E. Effective action for composite operators. *Physical Review D* **10**, 2428 (1974) (ver pp. 16, 28, 41).
26. KAPUSTA, J. I. & GALE, C. *Finite-Temperature Field Theory : Principles and Applications*. 442 (Cambridge University Press, Cambridge, 2005) (ver pp. 20, 22).
27. RAMOND, P. *Field theory: a modern primer* 2^a ed., 329 (Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1990) (ver pp. 20, 89).
28. WEINBERG, S. *The quantum theory of fields* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1996) (ver pp. 27, 28).
29. AMELINIO-CAMELIA, G & PI, S.-Y. Self-consistent improvement of the finite-temperature effective potential. *Physical Review D* **47**, 2356 (1993) (ver pp. 28, 41).

30. COLEMAN, S., JACKIW, R. & POLITZER, H. Spontaneous symmetry breaking in the $O(N)$ model for large N . *Physical Review D* **10**, 2491 (1974) (ver pp. [28](#), [41](#)).
31. ELIZALDE, E & ROMEO, A. Expressions for the zeta function regularized Casimir energy. *Journal of Mathematical Physics* **30**, 1133 (1989) (ver p. [32](#)).
32. GRADSHTEIN, I. S. & RYZHIK, I. M. *Table of integrals, series and products* 7^a ed., 1171 (Academic Press, Burlington, MA; Oxford, UK, 2007) (ver pp. [42](#), [65](#), [66](#), [87](#), [88](#)).
33. LINHARES, C., MALBOUISSON, A., MILLA, Y. & RODITI, I. Critical temperature for first-order phase transitions in confined systems. *European Physical Journal B* **60**, 353 (2007) (ver p. [54](#)).
34. LINHARES, C., MALBOUISSON, A., MILLA, Y. & RODITI, I. First-order phase transitions in superconducting films: A Euclidean model. *Physical Review B* **73**, 214525 (2006) (ver p. [54](#)).
35. KODAMA, J., ITOH, M. & HIRAI, H. Superconducting transition temperature versus thickness of Nb film on various substrates. *Journal of Applied Physics* **54**, 4050 (1983) (ver p. [54](#)).
36. DUDAS, J, FEHER, A & JANOS, S. Influence of thickness on magnetic phase transitions in thin films of dysprosium and samarium. *Acta Physica Hungarica* **62**, 77 (1987) (ver p. [54](#)).
37. MINHAI, M. S. M., MEEPAGALA, S, CHEN, J & WENGER, L. E. Thickness dependence on the superconducting properties of thin Nb films. *Physical Review B* **49**, 15235 (1994) (ver p. [54](#)).
38. STREIFFER, S. K., EASTMAN, J. A., FONG, D. D., THOMPSON, C., MUNKHOLM, A., MURTY, M. V. R., AUCIELLO, O., BAI, G. R. & STEPHENSON, G. Observation of Nanoscale 180 degree Stripe Domains in Ferroelectric PbTiO₃ Thin Films. *Physical Review Letters* **89**, 067601 (2002) (ver pp. [54](#), [55](#)).
39. STRUKOV, B. A., DAVITADZE, S. T., KRAVCHUM, S. N., TARASKIN, S. A., GOLTZMAN, M, LEMANOV, V. V. & SHULMAN, S. G. Specific heat and heat conductivity of BaTiO₃ polycrystalline films in the thickness range 20-1100 nm. *J Phys: Condens Matter* **15**, 4331 (2003) (ver p. [54](#)).
40. ISHIKAWA, K., YOSHIKAWA, K & OKADA, N. Size effect on the ferroelectric phase transition in PbTiO₃ ultrafine particles. *Physical Review B* **37**, 5852 (1988) (ver pp. [54](#), [55](#)).
41. ZHONG, W. L., JIANG, B, ZHANG, P. L., MA, J. M., CHENG, H. M., YNANG, Z. H. & LI, L. X. Phase transition in PbTiO₃ ultrafine particles of different sizes. *J Phys: Condens Matter* **5**, 2619 (1993) (ver pp. [54](#), [55](#)).

42. ISHIKAWA, K., NOMURA, T., OKADA, N. & TAKADA, K. Size Effect on the Phase Transition in PbTiO₃ Fine Particles. *Journal of Applied Physics* **35**, 5196–5198 (1996) (ver pp. 54, 55).
43. ABREU, L., MALBOUISSON, A. & RODITI, I. Gauge fluctuations in superconducting films. *European Physical Journal B* **37**, 515 (2004) (ver p. 54).
44. LAWRIE, I. D. Magnetic Scaling in Superconductors. *Physical Review Letters* **79**, 131 (1997) (ver pp. 61–64).
45. CORRÊA, E., LINHARES, C. & MALBOUISSON, A. Finite-size, magnetic and chemical-potential effects on first-order phase transitions. *Physics Letters A* **377**, 1984 (2013) (ver p. 63).
46. ABREU, L., LINHARES, C., MALBOUISSON, A. & MALBOUISSON, J. Magnetic effects on spontaneous symmetry breaking/restoration in a toroidal topology. *Physical Review D* **88**, 107701 (2013) (ver p. 63).
47. BOLLINI, C. & GIAMBIAGI, J. Dimensional Renormalization: The Number of Dimensions as a Regularizing Parameter. *Il Nuovo Cimento* **12**, 20 (1972) (ver p. 87).
48. 'T HOOFT, G. & VELTMAN, M. Regularization and Renormalization of gauge fields. *Nuclear Physics B* **44**, 189 (1972) (ver p. 87).
49. MCCOMB, W. D. *Renormalization methods: a guide for beginners* 330 (Oxford University Press, Oxford, 2004) (ver p. 87).
50. ELIZALDE, E. *Ten physical applications of spectral zeta functions* (Springer-Verlag, Berlin, 1995) (ver pp. 91, 94).
51. WHITTAKER, E. & WATSON, G. *A course of modern analysis* 4^a ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 1950) (ver p. 92).
52. ABREU, L., CALAN, C. D., MALBOUISSON, A. & SANTANA, A. Critical behavior of the compactified ϕ^4 theory. *Journal of Mathematical Physics* **46**, 012304 (2005) (ver p. 95).